

# Le groupe $GL_n$ tordu, sur un corps fini

J.-L. Waldspurger

## Introduction

Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps fini à  $q$  éléments et  $n$  un entier  $\geq 1$ . On suppose que la caractéristique  $p$  de  $\mathbb{F}_q$  est  $\neq 2$  et que  $q > n$ . On note  $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ . Introduisons l'élément de  $G$  :

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

et le groupe  $G^+ = G \rtimes \{1, \theta\}$ , où  $\theta^2 = 1$  et  $\theta g \theta^{-1} = J^{-1} g J$  pour tout  $g \in G$ . On pose  $\tilde{G} = G^+ \setminus G$ .

Considérons l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  qui sont quadratiques-unipotentes, c'est-à-dire qui sont sous-représentations d'une représentation induite (à la Harish-Chandra) d'un caractère d'ordre au plus 2 du tore déployé maximal de  $G$ . Ces représentations sont paramétrées par l'ensemble  $\mathcal{P}_2(n)$  des couples de partitions  $(\mu_1, \mu_2)$  tels que  $S(\mu_1) + S(\mu_2) = n$ , où on note  $S(\mu)$  la somme des termes d'une partition  $\mu$ . Chacune de ces représentations se prolonge en une représentation de  $G^+$ . Il y a bien sûr deux prolongements possibles. On donnera un moyen de les distinguer et de choisir précisément l'un d'eux. À  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ , on associe donc une représentation  $\pi^+(\mu_1, \mu_2)$  de  $G^+$ . Notons  $trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)$  la restriction à  $\tilde{G}$  du caractère de cette représentation. On voudrait calculer cette fonction. Grâce à Lusztig, on connaît la méthode : on doit exprimer cette fonction comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères sur  $\tilde{G}$ .

La théorie des faisceaux-caractères pour les groupes non connexes a été développée récemment par Lusztig dans une série d'articles. On en extrait la construction suivante. Notons  $\mathcal{F}_{cusp}$  l'ensemble des couples  $(h_1, h_2)$  où  $h_1 \in \mathbb{N}$ ,  $h_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $h_1(h_1 + 1) + h_2^2 = n$ . À chacun de ces couples, on peut associer une fonction caractéristique  $\phi(h_1, h_2)$  d'un faisceau-caractère cuspidal. Son support est la classe de conjugaison géométrique d'un élément de  $\tilde{G}$  dont la partie semi-simple  $s$  vérifie la condition suivante : le centralisateur connexe  $Z_G(s)^0$  est produit du groupe spécial orthogonal d'une forme quadratique de dimension  $1 + 3 + \dots + (2|h_2| - 1)$  et d'un groupe symplectique d'une forme symplectique de dimension  $2 + 4 + \dots + 2h_1$ . Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $W_m$  le groupe de Weyl du système de racines de type  $C_m$  et  $\hat{W}_m$  l'ensemble de ses représentations irréductibles. Notons  $\hat{\mathcal{F}}$  l'ensemble des sextuplets  $\rho = (h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2)$  où  $h_1, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ ,  $h_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $h_1(h_1 + 1) + h_2^2 + 2N_1 + 2N_2 = n$  et  $\rho_j \in \hat{W}_{N_j}$  pour  $j = 1, 2$ . À un tel  $\rho$ , on peut associer une fonction caractéristique  $\phi(\rho)$  d'un faisceau-caractère. On la construit par induction de Deligne-Lusztig à partir de la fonction  $\phi(h_1, h_2)$  sur  $\tilde{G}_{n'}$ , où  $n' = h_1(h_1 + 1) + h_2^2$  et  $\tilde{G}_{n'}$  est l'ensemble analogue à  $\tilde{G}$  quand on remplace  $n$  par  $n'$ . Remarquons que  $\mathcal{F}_{cusp}$  s'identifie à un sous-ensemble de  $\hat{\mathcal{F}}$  par  $(h_1, h_2) \mapsto (h_1, h_2, 0, 0, -, -)$ .

On définira une bijection  $f : \mathcal{P}_2(n) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  et une application  $\gamma : \mathcal{P}_2(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Signalons que les couples  $(\mu_1, \mu_2)$  tels que  $f(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$  sont exactement ceux de la forme  $\mu_1 = (a, a - 1, \dots, 1)$ ,  $\mu_2 = (b, b - 1, \dots, 1)$  où  $\frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} = n$ . Le résultat est alors très simple :

**Théorème.** *Pour tout  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ , on a l'égalité :*

$$trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2) = \gamma(\mu_1, \mu_2) \phi \circ f(\mu_1, \mu_2).$$

Certains cas de cette égalité sont dus à Digne et Michel, cf. [DM] théorème 5.2.

Notre méthode de démonstration reprend celle de [W1] qui elle-même reprenait les idées de Asai et Shoji, en utilisant bien sûr constamment les résultats de Lusztig. Une étape essentielle est de calculer l'image d'une fonction  $trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)$  par un foncteur d'induction de Deligne-Lusztig. Les deux ingrédients pour ce calcul sont d'une part que l'on peut calculer le produit

scalaire de deux telles images, d'autre part que l'image d'une représentation virtuelle (c'est-à-dire combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de représentations irréductibles) par un tel foncteur d'induction est encore une représentation virtuelle.

Notons  $\mathcal{P}_{2,cusp}(n)$  l'ensemble des  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$  tels que  $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ . La première étape de la preuve et un raisonnement par récurrence permettent de montrer que les familles de fonctions  $(\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))_{(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_{2,cusp}(n)}$  et  $(\phi(h_1, h_2))_{(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}}$  sont des bases d'un même espace, notons-le  $\mathcal{C}_{cusp}$ . Il reste à calculer la matrice de changement de bases. Dans [W1], on avait résolu un problème analogue en calculant les valeurs en des points particuliers de chacune des fonctions qui interviennent. Ici, le calcul direct de la valeur en un point d'une fonction  $\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  paraît difficile. Considérons une fonction  $\varphi$  sur  $\tilde{G}$ , à support dans un ensemble  $sU$ , où  $s$  est un élément semi-simple de  $\tilde{G}$  et  $U$  est un sous-groupe unipotent de  $G$ , telle que la fonction sur  $U : u \mapsto \varphi(su)$  soit un caractère de ce groupe. Appelons une telle fonction "fonction de Whittaker". Pour des fonctions de Whittaker  $\varphi$  bien choisies, la théorie des modèles de Whittaker dégénérés permet de calculer le produit scalaire  $\langle \text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2), \varphi \rangle$ . On peut ainsi construire suffisamment de formes linéaires sur l'espace  $\mathcal{C}_{cusp}$  telles que l'on puisse calculer leurs valeurs sur chacun des éléments des bases ci-dessus. On en déduit la forme de la matrice de passage puis le théorème.

Les paragraphes 1 à 4 contiennent des généralités sur le groupe  $G^+$ , la classification des éléments semi-simples et unipotents, l'induction de Deligne-Lusztig et les caractères d'ordre 2 de  $G^+$ . La construction des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères et leurs propriétés occupent les paragraphes 5 à 8. Le calcul du produit scalaire d'une telle fonction contre une fonction de Whittaker est effectué au paragraphe 9. Au paragraphe 10, on définit précisément les représentations  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Le calcul du produit scalaire d'une fonction  $\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  contre une fonction de Whittaker est effectué aux paragraphes 11 et 12. Au paragraphe 13, on prouve que, pour  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ , la fonction  $\phi(h_1, h_2)$  appartient à l'espace engendré par nos fonctions  $\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . De premières propriétés concernant le comportement des fonctions  $\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  par induction de Deligne-Lusztig sont présentées au paragraphe 14. Les définitions des applications  $\mathfrak{f}$  et  $\gamma$  sont données au paragraphe 15. Au paragraphe 16, on prouve une propriété technique qui servira à la fin de la démonstration. Le théorème est énoncé au paragraphe 17. Aux paragraphes 18, 19 et 20, on traduit en termes combinatoires l'induction de Deligne-Lusztig et, en reprenant la méthode d'Asai, on détermine complètement le comportement des fonctions  $\text{trace}_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  par une telle induction. La preuve du théorème est achevée au paragraphe 21

## 1. Définitions et notations

Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps fini à  $q$  éléments. On note  $p$  sa caractéristique. On note les variétés algébriques définies sur  $\mathbb{F}_q$  par des lettres grasses et leurs ensembles de points sur  $\mathbb{F}_q$  par la même lettre fine :  $X = \mathbf{X}(\mathbb{F}_q)$ .

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On note  $\mathbf{G}$  le groupe algébrique  $GL_n$  sur  $\mathbb{F}_q$ . Introduisons l'élément de  $G$  :

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

et l'automorphisme  $\theta$  de  $\mathbf{G}$  :  $\theta(g) = J^{-1}gJ$ . On note  $1, \theta$  le groupe à deux éléments, que l'on considère comme un groupe algébrique sur  $\mathbb{F}_q$ . On note  $\mathbf{G}^+$  le produit semi-direct  $\mathbf{G} \rtimes \{1, \theta\}$ , où  $\theta$  agit sur  $\mathbf{G}$  par  $\theta g \theta^{-1} = \theta(g)$ . On note  $\mathbf{G}$  l'unique composante connexe de  $\mathbf{G}^+$  distincte de  $\mathbf{G}$ .

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{F}_q$  muni d'une base  $e_1, \dots, e_n$ . On note  $V^*$  son dual et  $e_1^*, \dots, e_n^*$  la base duale. On note  $\mathbf{Isom}(V, V^*)$  l'ensemble des isomorphismes de  $V$  sur  $V^*$ . On peut identifier  $\mathbf{G}$  à  $\mathbf{GL}(V)$  puis au sous-groupe des éléments de  $\mathbf{GL}(V \oplus V^*)$  de la

forme :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix}.$$

En identifiant  $\theta$  à l'élément :

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

de  $\mathbf{GL}(V \oplus V^*)$ , on identifie  $\mathbf{G}^+$  au sous-groupe de  $\mathbf{GL}(V \oplus V^*)$  réunion de l'ensemble des éléments de la forme (1) et de celui des éléments de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t \sigma^{-1} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

pour  $\sigma \in \mathbf{Isom}(V, V^*)$ . Finalement, on peut identifier  $\tilde{\mathbf{G}}$  à  $\mathbf{Isom}(V, V^*)$  et  $\mathbf{G}^+$  à  $\mathbf{G} \sqcup \mathbf{Isom}(V, V^*)$ . Pour  $\sigma \in \mathbf{Isom}(V, V^*)$ , on note pour éviter les confusions  $\tilde{\sigma}$  l'élément correspondant de  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Il y a alors des relations telles que  $\tilde{\sigma}g = \tilde{\sigma}\tilde{g}$ ,  $g\tilde{\sigma} = {}^t g^{-1}\sigma$ ,  $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 = {}^t \sigma_1^{-1}\sigma_2$ .

Le cas échéant, on affectera d'un indice  $n$  les objets ci-dessus :  $\mathbf{G}_n$ ,  $\theta_n$  etc...

## 2. Classification des éléments semi-simples et unipotents

On suppose  $p \neq 2$ . Un élément  $g \in \tilde{\mathbf{G}}$  est dit semi-simple s'il est semi-simple en tant qu'élément de  $\mathbf{G}^+$  ou, ce qui revient au même, si  $g^2$  est semi-simple dans  $\mathbf{G}$ . Tout élément  $g \in \tilde{\mathbf{G}}$  se décompose uniquement en produit  $g = su$  de deux éléments qui commutent, où  $s \in \tilde{\mathbf{G}}$  est semi-simple et  $u \in \mathbf{G}$  est unipotent.

Considérons les données suivantes :

- $I$  est un ensemble fini,  $I^* \subseteq I$  un sous-ensemble ;
- pour  $i \in I$ ,  $d_i$  est un entier  $\geq 1$  et  $a_i$  un élément de  $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$ , où  $\bar{\mathbb{F}}_q$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_q$  ;
- $V_+$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $d_+$ , muni d'une forme quadratique non dégénérée  $q_+$  ;
- $V_-$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $d_-$ , muni d'une forme symplectique non dégénérée  $q_-$ .

Eventuellement  $V_+$  ou  $V_-$  peuvent être nuls. Pour  $i \in I \setminus I^*$ , on pose  $k'_i = \mathbb{F}_q[a_i]$ , on suppose que  $a_i^{-1}$  n'est pas conjugué à  $a_i$  par le groupe de Galois  $Gal(k'_i/\mathbb{F}_q)$ . Si  $i \in I^*$ , on pose  $k_i = \mathbb{F}_q[a_i]$ , on suppose que  $k_i$  est extension quadratique d'une sous-extension  $k'_i$  de  $\mathbb{F}_q$  et que  $a_i\tau_i(a_i) = 1$ , où  $\tau_i$  est l'unique élément non trivial de  $Gal(k_i/k'_i)$ . Dans les deux cas, on pose  $f_i = [k'_i : \mathbb{F}_q]$ . On suppose de plus :

$$n = d_+ + d_- + 2 \sum_{i \in I} d_i f_i$$

et, pour  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ , il n'y a pas d'isomorphisme de  $\mathbb{F}_q[a_i]$  sur  $\mathbb{F}_q[a_j]$  envoyant  $a_i$  sur  $a_j$  ou  $a_j^{-1}$ .

Nous allons associer à ces données une classe de conjugaison dans  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Pour  $i \in I \setminus I^*$ , posons  $V_i = k_i'^{2d_i}$ . On écrit  $x = (x_j)_{j=1, \dots, 2d_i}$  tout élément de  $V_i$ . On définit  $\sigma_i \in Isom(V_i, V_i^*)$  par l'égalité :

$$\langle x, \sigma_i(y) \rangle = trace_{k'_i/\mathbb{F}_q} \left( \sum_{j=1, \dots, d_i} x_j y_{d_i+j} + a_i \sum_{j=1, \dots, d_i} x_{d_i+j} y_j \right).$$

Pour  $i \in I^*$ , on pose  $V_i = k_i^{d_i}$ , on fixe  $\lambda_i \in k_i$  tel que  $\tau_i(\lambda_i)\lambda_i^{-1} = a_i$  et on définit  $\sigma_i \in Isom(V_i, V_i^*)$  par l'égalité :

$$\langle x, \sigma_i(y) \rangle = trace_{k_i/\mathbb{F}_q} \left( \lambda_i \sum_{j=1, \dots, d_i} x_j \tau_i(y_j) \right).$$

On définit  $\sigma_+ \in \text{Isom}(V_+, V_+^*)$  par l'égalité :

$$\langle x, \sigma_+(y) \rangle = q_+(x, y)$$

et  $\sigma_- \in \text{Isom}(V_-, V_-^*)$  de façon similaire. En identifiant  $V$  à  $V_+ \oplus V_- \oplus (\oplus_{i \in I} V_i)$ , la collection  $(\sigma_+, \sigma_-, (\sigma_i)_{i \in I})$  définit  $\sigma \in \text{Isom}(V, V^*)$ , d'où  $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$ . C'est un élément semi-simple dont la classe de conjugaison est bien déterminée.

Aux isomorphismes évidents près, on obtient ainsi une classification des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de  $\tilde{G}$ .

Avec des notations évidentes, le commutant dans  $G$  de l'élément  $\tilde{\sigma}$  ci-dessus est isomorphe à  $O(q_+) \times Sp(q_-) \times (\prod_{i \in I \setminus I^*} GL_{d_i}(k'_i)) \times (\prod_{i \in I^*} U_{d_i}(k'_i))$ . Rappelons comment on paramètre les classes de conjugaison unipotentes dans un tel groupe.

On appelle partition une suite décroissante  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  d'entiers  $\geq 0$  et presque tous nuls. On pose  $S(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ , on dit plus précisément que  $\lambda$  est une partition de  $S(\lambda)$ . On note  $\text{mult}_\lambda$  la fonction "multiplicité dans  $\lambda$ ". Elle est définie dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; pour  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $i$  intervient dans  $\lambda$  avec la multiplicité  $\text{mult}_\lambda(i)$ . Pour un tel  $i$ , on pose aussi :

$$\text{mult}_\lambda(\geq i) = \sum_{j \geq i} \text{mult}_\lambda(j).$$

Pour tout entier  $d \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}(d)$  l'ensemble des partitions de  $d$ .

Dans un groupe  $GL_d(k)$  ou  $U_d(k)$ ,  $k$  étant une extension finie de  $\mathbb{F}_q$ , les classes de conjugaison unipotentes sont classifiées par les partitions de  $d$  : à un élément unipotent, on associe la partition formée des tailles de ses blocs de Jordan. Considérons le cas d'un groupe symplectique  $Sp(q_-)$ . A un élément unipotent  $u$  on associe comme ci-dessus une partition  $\lambda$  de  $d_-$ . Elle est symplectique, i.e.  $\text{mult}_\lambda(i)$  est pair si  $i$  est impair. On note  $\text{Jord}^{bp}(\lambda) = \{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; i \text{ est pair, } \text{mult}_\lambda(i) > 0\}$ . On associe à  $u$  une fonction  $\eta_u : \text{Jord}^{bp}(\lambda) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Posons  $X = -2\frac{1-u}{1+u}$ . C'est un élément nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}(q_-)$ . Pour tout  $i \in \text{Jord}^{bp}(\lambda)$ , posons :

$$V_-[i] = \text{Ker}(X^i) / (\text{Ker}(X^{i-1}) + X(\text{Ker}(X^{i+1}))).$$

On définit une forme quadratique non dégénérée  $q_u[i]$  sur  $V_-[i]$  par la formule :

$$q_u[i](v, v') = (-1)^{[(i-1)/2]} q_-(X^{i-1}(v), v').$$

Enfin, pour toute forme quadratique non dégénérée  $q$  sur un espace  $W$  sur  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $d$ , on définit son discriminant  $(-1)^{[d/2]} \det(q)$  qui est un élément de  $\mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ , puis  $\eta(q) \in \{\pm 1\}$  image de ce discriminant par l'unique caractère non trivial  $\eta$  de  $\mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ . On pose  $\eta_u(i) = \eta(q_u[i])$ . Les données  $(\lambda, \eta_u)$  classifient les classes unipotentes dans  $Sp(q_-)$ . Dans un groupe  $O(q_+)$ , la classification est similaire. Les partitions  $\lambda$  sont cette fois orthogonales :  $\text{mult}_\lambda(i)$  est pair si  $i$  est pair. On pose alors  $\text{Jord}^{bp}(\lambda) = \{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; i \text{ est impair, } \text{mult}_\lambda(i) > 0\}$  et on poursuit la construction comme ci-dessus. Dans ce cas orthogonal, les fonctions  $\eta_u$  vérifient la condition :

$$\prod_{i \in \text{Jord}^{bp}(\lambda)} \eta_u(i) = \eta(-1)^{[|\text{Jord}_{\text{imp}}^{bp}(\lambda)|/2]} \eta(q_+),$$

où  $\text{Jord}_{\text{imp}}^{bp}(\lambda) = \{i \in \text{Jord}^{bp}(\lambda); \text{mult}_\lambda(i) \text{ impair}\}$ .

### 3. Induction de Deligne-Lusztig

Soient  $\mathbf{P}$  un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{L}$  un sous-groupe de Lévi de  $\mathbf{P}$  (on appellera un tel groupe  $\mathbf{L}$  un "groupe de Lévi"). Notons  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{P})$ , resp.  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{L})$ , le normalisateur de  $\mathbf{P}$ , resp.  $\mathbf{L}$ , dans  $\mathbf{G}^+$ . On pose  $\mathbf{L}^+ = \mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{P}) \cap \mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{L})$ . On suppose que  $\mathbf{L}^+$  est défini sur  $\mathbb{F}_q$  et que  $\mathbf{L}^+ \cap \tilde{\mathbf{G}} \neq \emptyset$ . Remarquons que la première condition entraîne que  $\mathbf{L}$  est défini sur  $\mathbb{F}_q$  mais pas forcément  $\mathbf{P}$ . On pose  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^+ \cap \tilde{\mathbf{G}}$ .

Une représentation d'un groupe fini  $H$  est un couple  $(\pi, E)$  où  $E$  est un espace vectoriel complexe (que l'on supposera de dimension finie) et  $\pi : H \rightarrow GL(E)$  un homomorphisme. On parlera selon la situation de "la représentation  $\pi$ " ou du " $H$ -module  $E$ ". On note  $\hat{H}$  l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de  $H$ .

Soit  $E$  un  $L^+$ -module. On définit de façon usuelle le  $G^+$ -module virtuel  $R_{L^+}^{G^+}(E)$ . Rappelons sa définition. On note  $F$  l'action du Frobenius sur toute variété algébrique définie sur  $\mathbb{F}_q$ . Notons  $\mathbf{U}$  le radical unipotent de  $\mathbf{P}$ , introduisons la variété :

$$\mathbf{X}^+ = \{x(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})) \in \mathbf{G}^+ / (\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})); x^{-1}F(x) \in F(\mathbf{U})\}.$$

Le groupe  $G^+ \times L^+$  agit sur  $\mathbf{X}^+$  par  $(g, \ell)x(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})) = gx\ell^{-1}(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U}))$ . Fixons un nombre premier  $\ell \neq p$  et un isomorphisme  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ . On définit les espaces de cohomologie  $H_c^i(\mathbf{X}^+)$  qui sont a priori des espaces sur  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$  mais que l'on identifie à des espaces complexes grâce à l'isomorphisme choisi. Le groupe  $G^+ \times L^+$  agit sur ces espaces via son action sur  $\mathbf{X}^+$ . Pour tout  $i$ ,  $G^+$  continue à agir sur l'espace d'invariants  $(H_c^i(\mathbf{X}^+) \otimes_{\mathbb{C}} E)^{L^+}$ . On pose :

$$R_{L^+}^{G^+}(E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (H_c^i(\mathbf{X}^+) \otimes_{\mathbb{C}} E)^{L^+}.$$

Notons  $\mathcal{C}(G^+)$ , resp.  $\mathcal{C}(G)$ ,  $\mathcal{C}(\tilde{G})$ , l'espace des fonctions sur  $G^+$ , resp.  $G$ ,  $\tilde{G}$ , à valeurs complexes, invariantes par conjugaison par  $G$ , et  $\mathcal{C}(G^+)^{G^+}$  le sous-espace des éléments de  $\mathcal{C}(G^+)$  invariants par conjugaison par  $G^+$ . On définit de même  $\mathcal{C}(L^+)$  etc... En identifiant toute représentation à son caractère puis en prolongeant par linéarité, on obtient un homomorphisme :

$$R_{L^+}^{G^+} : \mathcal{C}(L^+)^{L^+} \rightarrow \mathcal{C}(G^+)^{G^+}$$

qui envoie  $\mathcal{C}(\tilde{L})$  dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})$ . Si  $q$  est assez grand, par exemple  $q > n$ , on montre qu'il ne dépend que de  $\mathbf{L}^+$  et pas de  $\mathbf{P}$ .

**Hypothèse :** on suppose désormais  $q > n$ .

Pour tout entier  $d \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_2(d)$  l'ensemble des couples  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  de partitions tels que  $S(\boldsymbol{\lambda}) + S(\boldsymbol{\mu}) = d$ . Soient  $n', d \in \mathbb{N}$  tels que  $n' + 2d = n$  et soit  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{P}_2(d)$ . Ces données paramètrent un groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  tel que :

$$L \simeq \left( \prod_{i \geq 1} (\mathbb{F}_{q^{\lambda_i}}^\times \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_i}}^\times) \right) \times \left( \prod_{i \geq 1} \mathbb{F}_{q^{2\mu_i}}^\times \right) \times G_{n'}.$$

Conformément à cette décomposition, on écrit tout élément  $l \in L$  sous la forme  $l = ((x_i, x'_i)_{i \geq 1}, (y_i)_{i \geq 1}, g')$ . On note  $\tau_i$  l'élément non trivial du groupe de Galois de l'extension  $\mathbb{F}_{q^{2\mu_i}}/\mathbb{F}_{q^{\mu_i}}$ . On va construire  $\mathbf{P}$  vérifiant les conditions précédentes et  $\theta_L \in \tilde{L}$  tel que  $\theta_L^2 = 1$  et, pour  $l$  comme ci-dessus, on ait l'égalité :

$$\theta_L l \theta_L^{-1} = ((x_i'^{-1}, x_i^{-1})_{i \geq 1}, (\tau_i(y_i)^{-1})_{i \geq 1}, \theta_{n'}(g')).$$

Pour voir cela, introduisons la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre :

$$A = \left( \prod_{i \geq 1} (\mathbb{F}_{q^{\lambda_i}} \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_i}}) \right) \times \left( \prod_{i \geq 1} \mathbb{F}_{q^{2\mu_i}} \right).$$

Elle est munie d'une involution  $\tau$  définie par  $\tau((x_i, x'_i)_{i \geq 1}, (y_i)_{i \geq 1}) = ((x'_i, x_i)_{i \geq 1}, (\tau_i(y_i))_{i \geq 1})$ . Notons  $\Sigma$  l'ensemble des homomorphismes de  $\mathbb{F}_q$ -algèbre de  $A$  dans  $\bar{\mathbb{F}}_q$ . Fixons une bijection :

$$\begin{aligned} \{1, \dots, 2d\} &\rightarrow \Sigma \\ j &\mapsto \sigma_j \end{aligned}$$

telle que  $\sigma_{2d+1-j} = \sigma_j \tau$  pour tout  $j$ . Identifions  $A \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$  à  $\bar{\mathbb{F}}_q^\Sigma$  par :

$$a \otimes z \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma} z \sigma(a) e_\sigma$$

pour  $a \in A$  et  $z \in \bar{\mathbb{F}}_q$ , où  $(e_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  est la base canonique de  $\bar{\mathbb{F}}_q^\Sigma$ . Introduisons les espaces  $V_n$  et  $V_{n'}$ , identifions  $V_n$  à  $A \oplus V_{n'}$ , d'où  $V_n \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$  à  $\bar{\mathbb{F}}_q^\Sigma \oplus (V_{n'} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q)$ . Le groupe  $\mathbf{L}(\bar{\mathbb{F}}_q)$  agit naturellement dans  $(A \oplus V_{n'}) \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ . Des identifications précédentes résulte un plongement de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{G}$ . Pour  $j \in \{1, \dots, 2d\}$ , notons  $W_j$  le sous-espace de  $\bar{\mathbb{F}}_q^\Sigma \oplus (V_{n'} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q)$  engendré par :

- $e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_j}$ , si  $j \leq d$ ;
- $e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_j}$  et  $V_{n'} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$  si  $j > d$ .

Le groupe  $\mathbf{P}$  qui stabilise tous ces sous-espaces  $W_j$  répond à la question. Notons  $j_{n'}$  l'élément de  $Isom(V_{n'}, V_{n'}^*)$  tel que  $\tilde{j}_{n'} = \theta_{n'}$ . Définissons  $j_L \in Isom(V_n \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, V_n^* \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q)$  par :

$$\begin{aligned} j_L(e_{\sigma_j}) &= e_{\sigma_{2d+1-j}}^*, \text{ pour } j \in \{1, \dots, 2d\}, \\ j_L|_{V_{n'} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q} &= j_{n'}, \end{aligned}$$

où  $(e_\sigma^*)_{\sigma \in \Sigma}$  est la base duale de  $(e_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ . Posons  $\theta_L = \tilde{j}_L \in \tilde{\mathbf{G}}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ . Il vérifie les conditions requises, en particulier il appartient à  $\tilde{G}$ . Le couple  $(\mathbf{L}, \theta_L)$  que l'on vient de construire est bien défini à conjugaison près.

Soit  $\chi$  un caractère de  $A^\times$  tel que  $\chi \circ \tau = \chi^{-1}$ . Soit  $(\rho', E')$  une représentation de  $G_{n'}^+$ . On construit une représentation  $(\rho'_\chi, E'_\chi)$  de  $L^+$  par les formules :

- $E'_\chi = E'$ ;
- pour  $l = (a, g') \in L \simeq A^\times \times G_{n'}$ ,  $\rho'_\chi(l) = \chi(a) \rho'(g')$ ;
- $\rho'_\chi(\theta_L) = \rho'(\theta_{n'})$ .

On en déduit un  $G^+$ -module  $R_{L^+}^{G^+}(E'_\chi)$ . Considérons  $\chi$  comme fixé. On obtient un foncteur qui à  $E'$  associe  $R_{L^+}^{G^+}(E'_\chi)$ , dont on déduit encore un homomorphisme noté :

$$R_{\lambda, \mu, \chi} : \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{G}).$$

On utilisera des cas particuliers de cet homomorphisme, que l'on notera  $R_{d,j}^\epsilon$ , où  $j \in \{1, 2\}$  et  $\epsilon$  est un signe  $\pm$ , que l'on identifiera si besoin est à un élément de  $\{\pm 1\}$ . C'est l'homomorphisme  $R_{\lambda, \mu, \chi}$  pour :

- si  $\epsilon = +$ ,  $\lambda = (d)$ ,  $\mu = \emptyset$ ;
- si  $\epsilon = -$ ,  $\lambda = \emptyset$ ,  $\mu = (d)$ ;
- si  $j = 1$ ,  $\chi = 1$ ;
- si  $j = 2$ ,  $\chi$  est l'unique caractère d'ordre 2 de  $A^\times$  tel que  $\chi \circ \tau = \chi^{-1}$ .

#### 4. Le caractère déterminant

On définit une application **det** :  $G^+ \rightarrow \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ . Sur  $G$ , c'est le déterminant composé avec l'homomorphisme  $\mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ . Pour  $\sigma \in Isom(V, V^*)$ , **det**( $\sigma$ ) est l'image dans  $\mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$  du déterminant de la matrice exprimant  $\sigma$  dans deux bases de  $V$  et  $V^*$  sur  $\mathbb{F}_q$ , duales l'une de l'autre. On vérifie que **det** est un homomorphisme. En particulier, on peut multiplier toute fonction de  $\mathcal{C}(\tilde{G})$  par  $\eta \circ \mathbf{det}$ .

**Lemme.** *Pour tous  $d, n' \in \mathbb{N}$  tels que  $2d + n' = n$ , pour tous  $\epsilon = \pm$  et  $j \in \{1, 2\}$  et pour toute  $f' \in \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})$ , on a l'égalité :*

$$(\eta \circ \mathbf{det}) R_{d,j}^\epsilon(f') = \epsilon \eta (-1)^d R_{d,3-j}^\epsilon((\eta \circ \mathbf{det}_{n'}) f').$$

Preuve. Utilisons les notations du paragraphe 3. Grâce à la proposition 2.6 de [DM], il suffit de vérifier que, pour  $l = (a, g') \in L = A^\times \times G_{n'}$ , on a l'égalité :

$$\eta \circ \mathbf{det}(\theta_L l) = \epsilon \eta (-1)^d \chi(a) \eta \circ \mathbf{det}_{n'}(\theta_{n'} g').$$

Tous nos objets se scindent en deux, l'un relatif à  $A$ , l'autre à  $V_{n'}$ , on est ramené au cas  $n' = 0$ . Choisissons  $\xi \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$  tel que  $\xi$  soit un carré si  $\epsilon = +$  et n'en soit pas un si  $\epsilon = -$ . On peut identifier  $A$  à  $\mathbb{F}_{q^d}[\sqrt{\xi}]$ . Pour  $a \in A^\times$ , on a  $\chi(a) = \eta \circ \text{Norme}_{\mathbb{F}_{q^d}[\sqrt{\xi}]/\mathbb{F}_q}(a) = \eta \circ \det(a)$ . Il reste à voir que  $\eta \circ \mathbf{det}(\theta_L) = \epsilon\eta(-1)^d$ . Introduisons une base  $(v_i)_{i=1,\dots,d}$  de  $\mathbb{F}_{q^d}$  sur  $\mathbb{F}_q$ , puis la base  $(w_i)_{i=1,\dots,2d}$  de  $A$  définie par :

$$w_i = \begin{cases} v_i, & \text{si } i \leq d \\ \sqrt{\xi}v_{i-d}, & \text{si } i > d \end{cases}$$

Introduisons les matrices suivantes :

- $M_0$  exprimant  $j_L$  dans les bases  $(w_i)_{i=1,\dots,2d}$  et  $(w_i^*)_{i=1,\dots,2d}$ ;
  - $M_1$  exprimant  $j_L$  dans les bases  $(e_{\sigma_i})_{i=1,\dots,2d}$  et  $(e_{\sigma_i}^*)_{i=1,\dots,2d}$ ;
  - $M_2$  exprimant la base  $(w_i)_{i=1,\dots,2d}$  en termes de  $(e_{\sigma_i})_{i=1,\dots,2d}$ ;
  - $M_3 = (\text{trace}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(v_i v_j))_{i,j=1,\dots,d}$ ;
  - $M_4 = (\text{trace}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(\xi v_i v_j))_{i,j=1,\dots,d}$ ;
  - $M_5 = (\text{trace}_{\mathbb{F}_{q^d}[\sqrt{\xi}]/\mathbb{F}_q}(w_i w_j))_{i,j=1,\dots,2d}$ ;
  - $M_6 = (\text{trace}_{\mathbb{F}_{q^d}[\sqrt{\xi}] \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q/\mathbb{F}_q}(e_{\sigma_i} e_{\sigma_j}))_{i,j=1,\dots,2d}$ .
- On a les relations :

$$\eta \circ \mathbf{det}(\theta_L) = \eta \circ \det(M_0), \quad M_0 = {}^t M_2 M_1 M_2, \quad M_1 = J_{2d}, \quad \det(M_1) = (-1)^d, \quad M_5 = {}^t M_2 M_6 M_2,$$

$$M_6 = 1, \quad \det(M_5) = \det(M_3)\det(M_4), \quad \det(M_4) = \text{Norme}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(\xi)\det(M_3), \quad \det(M_3) \in \mathbb{F}_q^\times.$$

On en tire l'égalité  $\eta \circ \mathbf{det}(\theta_L) = \eta(-1)^d \eta \circ \text{Norme}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(\xi)$ . Mais  $\text{Norme}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(\xi)$  est un carré dans  $\mathbb{F}_q^\times$  si  $\epsilon = +$  et n'en est pas un si  $\epsilon = -$ . D'où l'égalité cherchée.  $\square$

## 5. Faisceaux-caractères

Notons  $\mathcal{F}_{cusp}$  l'ensemble des  $(h_1, h_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  tels que  $h_1(h_1 + 1) + h_2^2 = n$ . Pour un tel couple, on définit une fonction  $\phi(h_1, h_2)$  sur  $\tilde{G}$ . Son support est l'ensemble des éléments  $su$ , où  $s$  et  $u$  commutent,  $s$  est semi-simple et  $u$  unipotent, tels que :

- $s$  est paramétré par les données  $I = \emptyset$ ,  $d_+ = h_2^2$ ,  $q_+$ ,  $d_- = h_1(h_1 + 1)$ ,  $q_-$ , cf. paragraphe 2;

l'élément  $u$  se décompose en  $u_+ u_-$ , où  $u_+ \in O(q_+)$ ,  $u_- \in Sp(q_-)$ ; alors :

- $u_+$  est paramétré par la partition  $(2|h_2| - 1, 2|h_2| - 3, \dots, 3, 1)$  et  $u_-$  par  $(2h_1, 2h_1 - 2, \dots, 2)$ .

Posons :

$$s(h_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } h_2 \geq 0, \\ 1, & \text{si } h_2 < 0, \end{cases} \quad \delta(h_1, h_2) = \frac{|h_2^3 - h_2|}{3} + \frac{h_1(2h_1 + 1)(h_1 + 1)}{6}.$$

On note  $q^{1/2}$  la racine  $> 0$  de  $q$ , ce qui permet de définir  $q^{m/2}$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . Pour un élément  $su$  vérifiant les conditions ci-dessus, on a l'égalité :

$$\phi(h_1, h_2)(su) = q^{\delta(h_1, h_2)/2} \left( \prod_{i=1, \dots, h_1, i \text{ impair}} \eta_{u_-}(2i) \right) \left( \prod_{i=0, \dots, |h_2|-1, i \equiv h_1+h_2+s(h_2) \pmod{2\mathbb{Z}}} \eta_{u_+}(2i+1) \right).$$

La fonction  $\phi(h_1, h_2)$  appartient à  $\mathcal{C}(\tilde{G})$ .

Pour tout entier  $N \in \mathbb{N}$ , notons  $W_N$  le groupe de Weyl du système de racines de type  $C_N$ . Notons  $sgn$  son caractère usuel et  $sgn_{CD}$  le caractère dont le noyau est le sous-groupe du système de racines de type  $D_N$ . Les classes de conjugaison dans  $W_N$  comme les représentations irréductibles de ce groupe sont paramétrées par  $\mathcal{P}_2(N)$ .

On note  $\mathcal{F}$ , resp.  $\tilde{\mathcal{F}}$ , l'ensemble des sextuplets  $(h_1, h_2, N_1, N_2, w_1, w_2)$ , resp.  $(h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2)$ , où :

- $h_1, N_1, N_2 \in \mathbb{N}, h_2 \in \mathbb{Z}, h_1(h_1 + 1) + h_2^2 + 2N_1 + 2N_2 = n$ ;
- pour  $j = 1, 2, w_j \in W_{N_j}, \text{ resp. } \rho_j \in \hat{W}_{N_j}$ .

Soit  $\mathbf{w} = (h_1, h_2, N_1, N_2, w_1, w_2) \in \mathcal{F}$ . Pour  $j = 1, 2$ , notons  $(\alpha_j, \beta_j)$  le couple de partitions paramétrant la classe de conjugaison de  $w_j$ . Posons  $n' = h_1(h_1 + 1) + h_2^2$ . On définit l'homomorphisme  $R_{\mathbf{w}} : \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{G})$ , composé de tous les homomorphismes  $R_{\alpha_{j,k},j}^+$  et  $R_{\beta_{j,k},j}^-$  pour  $j = 1, 2$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha_{j,k} \neq 0$ , resp.  $\beta_{j,k} \neq 0$ . Ces homomorphismes commutent, leur ordre n'importe pas. On définit l'élément de  $\mathcal{C}(\tilde{G}) : \phi(\mathbf{w}) = R_{\mathbf{w}}(\phi(h_1, h_2))$ .

Soit maintenant  $\rho = (h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2) \in \hat{\mathcal{F}}$ . On définit l'élément de  $\mathcal{C}(\tilde{G}) :$

$$\phi(\rho) = |W_{N_1}|^{-1} |W_{N_2}|^{-1} \sum_{w_1 \in W_{N_1}, w_2 \in W_{N_2}} \text{trace } \rho_1(w_1) \text{trace } \rho_2(w_2) \phi(h_1, h_2, N_1, N_2, w_1, w_2).$$

On munit  $\mathcal{C}(\tilde{G})$  du produit hermitien usuel :

$$(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum_{g \in \tilde{G}} \bar{f}_1(g) f_2(g).$$

**Lemme.** *La famille des fonctions  $\phi(\rho)$ , pour  $\rho \in \hat{\mathcal{F}}$ , forme un système orthonormé dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})$ .*

Grâce à [L2], théorème 17.15, à [DM] proposition 2.6 et [L5] théorème 1.14, nos fonctions sont égales à celles construites par Lusztig dans [L2]. Alors le lemme résulte de [L4] proposition 24.16. L'hypothèse de forte cuspidalité imposée dans cette référence se ramène dans notre cas à l'hypothèse analogue pour les systèmes locaux cuspidaux portés par les centralisateurs connexes des éléments  $s$  du début du paragraphe. On sait que cette dernière hypothèse est vérifiée, cf. [L1]  $\square$

Pour un élément semi-simple  $s$  paramétré par  $I = \emptyset, d_+, q_+, d_-, q_-$ , on a  $\eta \circ \mathbf{det}(s) = \eta(-1)^{[d_+/2]} \eta(q_+)$ . On en déduit l'égalité :

$$(\eta \circ \mathbf{det}) \phi(h_1, h_2) = \eta(-1)^{\frac{h_2^2 - |h_2|}{2}} \phi(h_1, -h_2)$$

pour tous  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ . Grâce au lemme 4, cette égalité se généralise en :

$$(\eta \circ \mathbf{det}) \phi(\rho) = \eta(-1)^{N_1 + N_2 + \frac{h_2^2 - |h_2|}{2}} \phi(\rho'),$$

pour tout  $\rho = (h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2) \in \hat{\mathcal{F}}$ , où  $\rho' = (h_1, -h_2, N_2, N_1, \rho_2 \otimes \text{sgn}_{CD}, \rho_1 \otimes \text{sgn}_{CD})$ .

## 6. Valeurs de fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères

Soient  $\mathbf{w} = (h_1, h_2, N_1, N_2, w_1, w_2) \in \mathcal{F}$  et  $g \in \tilde{G}$ . On écrit  $g = su$  et on paramètre  $s$  comme au paragraphe 2 par des données  $I, I^*, (d_i)_{i \in I}, (a_i)_{i \in I}, d_+, q_+, d_-, q_-$ . On suppose vérifiées les hypothèses simplificatrices :  $N_2 = 0$  (donc  $w_2$  disparaît) et  $s$  est elliptique, c'est-à-dire  $I = I^*$ . On pose simplement  $N = N_1, w = w_1$ .

Considérons l'hypothèse :

$$(H) \quad d_+ \geq h_2^2, \quad d_- \geq h_1(h_1 + 1).$$

Si elle est vérifiée, on pose  $N_+ = (d_+ - h_2^2)/2, N_- = (d_- - h_1(h_1 + 1))/2$ . Ces nombres sont entiers et on a l'égalité :

$$N = N_+ + N_- + \sum_{i \in I} d_i f_i,$$

les  $f_i$  étant définis comme au paragraphe 2. On pose :

$$W(s) = W_{N_+} \times W_{N_-} \times \prod_{i \in I} \mathfrak{S}_{d_i},$$

où, pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathfrak{S}_d$  le groupe de permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, d\}$ .

On note  $W_N/\text{conj}$  l'ensemble des classes de conjugaison dans  $W_N$  et  $\mathcal{O}(w)$  la classe de  $w$ . On définit une application :

$$\iota_s : W(s) \rightarrow W_N/\text{conj}$$

de la façon suivante. Soit  $\mathbf{v} \in W(s)$ . Sa classe de conjugaison est paramétrée par :

- des couples de partitions  $(\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon) \in \mathcal{P}_2(N_\epsilon)$  pour  $\epsilon = \pm$  ;
- des partitions  $\mu_i \in \mathcal{P}(d_i)$  pour  $i \in I$ .

Pour tout  $i$ , écrivons  $\mu_i = \alpha'_i \cup \beta'_i$ , où les termes de  $\alpha'_i$ , resp.  $\beta'_i$ , sont pairs, resp. impairs. Multiplions les termes de ces partitions par  $f_i$ . On obtient des partitions  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Posons :

$$\alpha = \alpha_+ \cup \alpha_- \cup \bigcup_{i \in I} \alpha_i, \quad \beta = \beta_+ \cup \beta_- \cup \bigcup_{i \in I} \beta_i.$$

Alors  $\iota_s(\mathbf{v})$  est la classe dans  $W_N$  paramétrée par  $(\alpha, \beta)$ .

On sait définir des fonctions de Green sur les groupes  $SO(q_+)$ ,  $Sp(q_-)$  et  $U_{d_i}(k'_i)$  pour  $i \in I$ . Il n'y a pas vraiment de normalisation standard, nous utiliserons celles de [W2], chapitre VIII. Sur un groupe  $U_{d_i}(k'_i)$ , elles sont paramétrées par les éléments  $v \in \mathfrak{S}_{d_i}$  modulo conjugaison. On les note  $Q_v$ . Sur le groupe  $Sp(q_-)$ , elles sont paramétrées par les triplets  $(h, m, v)$  où  $h, m \in \mathbb{N}$ ,  $h(h+1) + 2m = d_-$  et  $v$  est un élément de  $W_m$  modulo conjugaison. On les note  $Q_{h,v}$ . Sur le groupe  $SO(q_+)$ , elles sont presque paramétrées par les triplets  $(h, m, v)$ , où  $h, m \in \mathbb{N}$ ,  $h^2 + 2m = d_+$  et  $v$  est un élément de  $W_m$  modulo conjugaison. On les note  $Q_{h,v}$ . On a dit "presque" parce qu'il y a des complications si  $d_+$  est pair et  $h = 0$ . D'une part, la fonction de Green n'est a priori définie que si  $\text{sgn}_{CD}(v) = \eta(q_+)$ . On ignore cette condition en posant  $Q_{0,v} = 0$  si elle n'est pas vérifiée. D'autre part, si  $\eta(q_+) = 1$ , il y a des  $v$  qui donnent naissance à deux fonctions  $Q'_{0,v}$ ,  $Q''_{0,v}$  qui sont conjuguées dans  $O(q_+)$  mais pas dans  $SO(q_+)$ . On pose dans ce cas  $Q_{0,v} = \frac{1}{2}(Q'_{0,v} + Q''_{0,v})$ .

A tout élément  $\mathbf{v} = (v_+, v_-, (v_i)_{i \in I}) \in W(s)$ , on associe une fonction  $Q_{h_1, |h_2|, \mathbf{v}}$  sur la composante neutre  $Z_G(s)^0$  du commutant de  $s$  dans  $G$ . On pose  $Q_{h_1, |h_2|, \mathbf{v}} = Q_{|h_2|, v_+} \otimes Q_{h_1, v_-} \otimes (\otimes_{i \in I} Q_{v_i})$  en identifiant  $Z_G(s)^0$  à  $SO(q_+) \times Sp(q_-) \times \prod_{i \in I} U_{d_i}(k'_i)$ .

On pose enfin :

$$z(h_2, d_+) = \begin{cases} 1, & \text{si } h_2 = 0 \text{ et } d_+ > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition.** (i) Si l'hypothèse (H) n'est pas vérifiée,  $\phi(\mathbf{w})(g) = 0$ .

(ii) Supposons (H) vérifiée. On a l'égalité :

$$\phi(\mathbf{w})(g) = 2^{z(h_2, d_+)} q^{\delta(h_1, h_2)/2} |W_N| |\mathcal{O}(w)|^{-1} |W(s)|^{-1} (\eta(q_+) \eta(-1))^{\lfloor h_2/2 \rfloor} h_1 + s(h_2) \sum_{\mathbf{v} \in W(s), \iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)} \text{sgn}_{CD}(v_+)^{h_1 + s(h_2)} Q_{h_1, |h_2|, \mathbf{v}}(u).$$

Preuve. Pour tout entier  $m$  et tout  $v \in W_m$ , notons  $\mathbf{T}_v$  le tore sur  $\mathbb{F}_q$  vérifiant la condition suivante. Notons  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(m)$  le couple de partitions paramétrant la classe de conjugaison de  $v$ . Alors :

$$T_v = \left( \prod_{i \geq 1} (\mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times) \right) \times \left( \prod_{i \geq 1} \mathbb{F}_q^\times \right).$$

On note  $\mathbf{T}_v^1$  le sous-tore tel que :

$$T_v^1 = \left( \prod_{i \geq 1} \{(x, x') \in \mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times; xx' = 1\} \right) \times \left( \prod_{i \geq 1} \mathbb{F}_q^{1, 2\beta_i} \right),$$

où, pour tout entier  $d \geq 1$ , on pose  $\mathbb{F}_{q^{2d}}^1 = \{x \in \mathbb{F}_{q^{2d}}^\times; \text{Norme}_{\mathbb{F}_{q^{2d}}/\mathbb{F}_{q^d}}(x) = 1\}$ .

La construction de la fonction  $\phi(\mathbf{w})$  se reformule ainsi. Posons  $n' = h_1(h_1 + 1) + h_2^2$  et  $\mathbf{L} = \mathbf{T}_w \times \mathbf{G}_{n'}$ . C'est un groupe de Lévi de  $\mathbf{G}$ . Appliquons-lui les constructions du paragraphe 3, qui fournissent les termes  $\mathbf{L}^+$ ,  $\tilde{\mathbf{L}}$ ,  $\theta_L$ . De la projection de  $\mathbf{L}$  sur  $\mathbf{G}_{n'}$  se déduit une application  $\pi : \tilde{\mathbf{L}} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}_{n'}$  qui envoie  $\theta_L$  sur  $\theta_{n'}$ . Alors :

$$\phi(\mathbf{w}) = R_{L^+}^{G^+}(\pi^*(\phi(h_1, h_2))).$$

Notons  $S' \subseteq \tilde{\mathbf{G}}_{n'}$  le support de  $\phi(h_1, h_2)$  et  $S = \pi^{-1}(S')$ . Notons  $S_{ss}$  l'ensemble des composantes semi-simples d'éléments de  $S$ . Avec les notations de [L2] théorème 17.15, on a une égalité :

$$(1) \quad \phi(\mathbf{w})(g) = \sum_{x \in G, x^{-1}sx \in S_{ss}} \frac{|L_x|}{|Z_G(s)^0||L|} Q_x(u),$$

dont on va identifier les termes.

Si  $(H)$  n'est pas vérifiée,  $s$  n'est conjugué à aucun élément de  $S_{ss}$ . La somme est vide et  $\phi(\mathbf{w})(g) = 0$ .

On suppose désormais  $(H)$  vérifiée. Rappelons que, dans un groupe symplectique  $\mathbf{Sp}(2r)$ , les classes de conjugaison de sous-tores maximaux définis sur  $\mathbb{F}_q$  sont paramétrées par les classes de conjugaison dans  $W_r$ . Plus généralement, les classes de conjugaison de groupes de Lévi  $\mathbf{M}$  définis sur  $\mathbb{F}_q$ , munis d'une décomposition  $\mathbf{M} = \mathbf{T} \times \mathbf{Sp}(2r')$ , où  $\mathbf{T}$  est un tore, sont paramétrées par les couples  $(m, v)$ , où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq r$ ,  $v \in W_m$  modulo conjugaison. Un paramétrage analogue vaut pour des groupes orthogonaux. Pour un groupe unitaire  $\mathbf{U}_r$ , on ne considère que les Lévi qui sont des tores maximaux. Le paramétrage se fait par  $W_r$  modulo conjugaison.

Posons  $X = \{x \in G; x^{-1}sx \in S_{ss}\}$ . Pour  $x \in X$ , notons  $\mathbf{L}_x$  la composante neutre de  $x\mathbf{L}x^{-1} \cap \mathbf{Z}_G(s)^0$ . Elle se décompose en  $\mathbf{L}_x = \mathbf{L}_{x,+} \times \mathbf{L}_{x,-} \times \prod_{i \in I} \mathbf{L}_{x,i}$  où, par exemple,  $\mathbf{L}_{x,+} = \mathbf{L}_x \cap \mathbf{SO}(q_+)$ . Chacun de ces termes est de la forme ci-dessus, par exemple  $\mathbf{L}_{x,+} = (x\mathbf{T}_w x^{-1} \cap \mathbf{SO}(q_+)) \times (x\mathbf{G}_{n'} x^{-1} \cap \mathbf{SO}(q_+))$ . Le dernier terme de ce produit est forcément le groupe spécial orthogonal d'un espace de dimension  $h_2^2$ . Donc  $\mathbf{L}_{x,+}$  est paramétré par un couple  $(N_+, v_+)$ . De même,  $\mathbf{L}_{x,-}$  est paramétré par un couple  $(N_-, v_-)$  et, pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{L}_{x,i}$  est paramétré par  $v_i \in \mathfrak{S}_{d_i}$ . On pose  $\mathbf{v} = (v_+, v_-, (v_i)_{i \in I})$ . On a  $\mathbf{v} \in W(s)$  et on vérifie que  $\iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)$ . On a ainsi défini une application :

$$(2) \quad X \rightarrow \{\mathbf{v} \in W(s); \iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)\} / \text{conj},$$

avec une notation évidente. Cette application est surjective. Le terme associé à  $x$  dans la somme (1) ne dépend que de l'image de  $x$  par cette application.

**Remarque.** Ce n'est pas tout-à-fait exact à cause des fonctions sur les groupes orthogonaux pairs qui sont invariantes par le groupe spécial orthogonal mais pas par le groupe orthogonal tout entier. Mais le terme  $\phi(\mathbf{w})(g)$  étant nécessairement, en tant que fonction de  $u$ , invariant par  $Z_G(s)$  tout entier, on peut remplacer dans (1) les  $Q_x$  par leurs symétrisées  $|Z_G(s)^0 \backslash Z_G(s)|^{-1} \sum_{y \in Z_G(s)^0 \backslash Z_G(s)} Q_x \circ \text{Ad}(y)$  et l'assertion ci-dessus devient vraie.

On obtient alors :

$$(3) \quad \phi(\mathbf{w})(g) = \sum_{\mathbf{v} \in W(s) / \text{conj}, \iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)} c(\mathbf{v}) \frac{|L_x|}{|Z_G(s)^0||L|} Q_x(u),$$

où ici  $x$  est un élément de la fibre de l'application (2) au-dessus de  $\mathbf{v}$  et  $c(\mathbf{v})$  est le nombre d'éléments de cette fibre. Avec ces notations, on a :

$$c(\mathbf{v}) = |Z_G(s)xN_G(\mathbf{T}_w)| = |Z_G(s)||N_G(\mathbf{T}_w)||N_{Z_G(s)}(x\mathbf{T}_w x^{-1} \cap \mathbf{Z}_G(s))|^{-1}.$$

On calcule :

$$|N_G(\mathbf{T}_w)| = |L||W_N||\mathcal{O}(w)|^{-1},$$

$$|N_{Z_G(s)}(x\mathbf{T}_w x^{-1} \cap \mathbf{Z}_G(s))| = |xLx^{-1} \cap Z_G(s)||W(s)||\mathcal{O}(\mathbf{v})|^{-1}.$$

Alors :

$$c(\mathbf{v}) \frac{|L_x|}{|Z_G(s)^0||L|} = \frac{|Z_G(s)|}{|Z_G(s)^0|} \frac{|L_x|}{|xLx^{-1} \cap Z_G(s)|} \frac{|W_N||\mathcal{O}(\mathbf{v})|}{|W(s)||\mathcal{O}(w)|}.$$

Le produit des deux premiers facteurs vaut  $2^{z(h_2, d_+)}$ . On se débarrasse du facteur  $|\mathcal{O}(\mathbf{v})|$  en remplaçant dans (3) la sommation sur  $W(s)/conj$  par une sommation sur  $W(s)$ . On obtient :

$$(4) \quad \phi(\mathbf{w})(g) = 2^{z(h_2, d_+)} |W_N||\mathcal{O}(w)|^{-1} |W(s)|^{-1} \sum_{\mathbf{v} \in W(s), \iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)} Q_x(u).$$

Fixons  $\mathbf{v}$ . Il résulte des définitions de [L2] et [W2] que l'on a une égalité  $Q_x = cQ_{h_1, |h_2|, \mathbf{v}}$ , où la constante  $c$  vient de la différence entre les normalisations des fonctions cuspidales. Ecrivons  $\mathbf{L}_{x,+} = \mathbf{T}_+ \times \mathbf{SO}(q'_+)$ ,  $\mathbf{L}_{x,-} = \mathbf{T}_- \times \mathbf{Sp}(q'_-)$ . Soit  $u_+ \in SO(q'_+)$  un élément unipotent paramétré par la partition  $(2|h_2| - 1, \dots, 3, 1)$  et soit  $u_- \in Sp(q'_-)$  un élément unipotent paramétré par la partition  $(2h_1, \dots, 2)$ . D'après nos définitions,  $Q_x$  est issu d'une fonction cuspidale sur  $SO(q'_+) \times Sp(q'_-)$  qui prend au point  $(u_+, u_-)$  la valeur :

$$q^{\delta(h_1, h_2)/2} \left( \prod_{i=1, \dots, h_1, i \text{ impair}} \eta_{u_-}(2i) \right) \left( \prod_{i=0, \dots, |h_2|-1, i \equiv h_1 + h_2 + s(h_2) \pmod{2\mathbb{Z}}} \eta_{u_+}(2i+1) \right).$$

Tandis que, d'après [W2],  $Q_{h_1, |h_2|, \mathbf{v}}$  est issu d'une fonction cuspidale qui prend au même point la valeur :

$$\left( \prod_{i=1, \dots, h_1, i \text{ impair}} \eta_{u_-}(2i) \right) \left( \prod_{i=0, \dots, |h_2|-1, i \equiv h_2 \pmod{2\mathbb{Z}}} \eta_{u_+}(2i+1) \right).$$

On a donc :

$$c = q^{\delta(h_1, h_2)/2} \left( \prod_{i=0, \dots, |h_2|-1} \eta_{u_+}(2i+1) \right)^{h_1 + s(h_2)}.$$

Mais :

$$\prod_{i=0, \dots, |h_2|-1} \eta_{u_+}(2i+1) = \eta(-1)^{\lfloor |h_2|/2 \rfloor} \eta(q'_+),$$

et  $\eta(q'_+) = \eta(q_+) \text{sgn}_{CD}(v_+)$ . D'où :

$$c = q^{\delta(h_1, h_2)/2} \left( \eta(q_+) \eta(-1)^{\lfloor |h_2|/2 \rfloor} \text{sgn}_{CD}(v_+) \right)^{h_1 + s(h_2)}.$$

En remplaçant dans l'expression (4) les fonctions  $Q_x$  par leurs valeurs, on obtient la formule de l'énoncé.  $\square$

## 7. Valeurs de fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères, suite

On conserve les mêmes hypothèses concernant  $g$  et on considère un élément  $\rho = (h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2) \in \hat{\mathcal{F}}$ . On fait l'hypothèse simplificatrice  $N_2 = 0$  et on pose simplement  $N = N_1, \rho = \rho_1$ .

Sur les groupes  $SO(q_+)$ ,  $Sp(q_-)$ ,  $U_{d_i}(k'_i)$ , on sait définir d'autres fonctions de Green. Elles sont paramétrées :

- dans le cas de  $SO(q_+)$ , par les triplets  $(h, m, \sigma)$  où  $h, m \in \mathbb{N}$ ,  $h^2 + 2m = d_+$  et  $\sigma \in \hat{W}_m$  ; on les note  $Q_{h, \sigma}$  ;

- dans le cas de  $Sp(q_-)$ , par les triplets  $(h, m, \sigma)$  où  $h, m \in \mathbb{N}$ ,  $h(h+1) + 2m = d_-$  et  $\sigma \in \hat{W}_m$  ; on les note  $Q_{h, \sigma}$  ;

- dans le cas de  $U_{d_i}(k'_i)$ , par les  $\sigma \in \hat{\mathcal{S}}_{d_i}$  ; on les note  $Q_\sigma$ .

Elles sont définies respectivement par :

$$Q_{h,\sigma} = 2^{z(h,d_+)} |W_m|^{-1} \sum_{v \in W_m} \text{trace } \sigma(v) Q_{h,v},$$

$$Q_{h,\sigma} = |W_m|^{-1} \sum_{v \in W_m} \text{sgn}_{CD}(v)^h \text{trace } \sigma(v) Q_{h,v},$$

$$Q_\sigma = |\mathfrak{S}_{d_i}|^{-1} \sum_{v \in \mathfrak{S}_{d_i}} \text{trace } \sigma(v) Q_v.$$

Supposons vérifiée l'hypothèse (H) du paragraphe précédent. Toute représentation irréductible  $\sigma$  de  $W(s)$  se décompose en  $\sigma = \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes (\otimes_{i \in I} \sigma_i)$ , où  $\sigma_+ \in \hat{W}_{N_+}$ ,  $\sigma_- \in \hat{W}_{N_-}$  et  $\sigma_i \in \hat{\mathfrak{S}}_{d_i}$  pour tout  $i \in I$ . On lui associe la fonction de Green  $Q_{h_1,|h_2|,\sigma} = Q_{|h_2|,\sigma_+} \otimes Q_{h_1,\sigma_-} \otimes (\otimes_{i \in I} Q_{\sigma_i})$  sur  $Z_G(s)^0$ . On pose :

$$[\sigma, \rho]_{h_1, h_2} = |W(s)|^{-1} \sum_{\mathbf{v} \in W(s)} (\text{trace } \rho) \circ \iota_s(\mathbf{v}) \text{trace } \sigma(\mathbf{v}) \text{sgn}_{CD}(v_+)^{h_1+s(h_2)} \text{sgn}_{CD}(v_-)^{h_1}.$$

**Corollaire.** (i) Si l'hypothèse (H) n'est pas vérifiée,  $\phi(\rho)(g) = 0$ .

(ii) Supposons (H) vérifiée. Alors on a l'égalité :

$$\phi(\rho)(g) = q^{\delta(h_1, h_2)/2} \left( (-1)^{\sum_{i \in I} d_i} \eta(q_+) \eta(-1)^{[h_2/2]} \right)^{h_1+s(h_2)} \sum_{\sigma \in \hat{W}(s)} [\sigma, \rho]_{h_1, h_2} Q_{h_1, |h_2|, \sigma}(u).$$

Cela résulte de la proposition précédente et de la torsion que l'on a introduite dans la définition des fonctions de Green sur les groupes symplectiques. On doit remarquer que, si  $\mathbf{v} \in W(s)$  et  $w \in W_N$  sont tels que  $\iota_s(\mathbf{v}) = \mathcal{O}(w)$ , on a l'égalité  $\text{sgn}_{CD}(w) = (-1)^{\sum_{i \in I} d_i} \text{sgn}_{CD}(v_+) \text{sgn}_{CD}(v_-)$ .  $\square$

## 8. Deux faisceaux-caractères particuliers

Explicitons un cas particulier du corollaire précédent. On ne considère que des  $g$  pour lesquels  $I = \emptyset$ . On note bien sûr  $u_+$  et  $u_-$  les composantes de  $u$  dans  $SO(q_+)$  et  $Sp(q_-)$ .

On fixe  $h_1$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $h_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $h_1(h_1 + 1) + h_2^2 + 2N = n$  et un élément  $w \in W_N$ . On définit les deux éléments :

$$\rho_1 = (h_1, h_2, N, 0, \text{sgn}_{CD}^{h_1+s(h_2)}, -) \quad \rho_2 = (h_1, h_2, N, 0, \text{sgn}_{CD}^{h_1}, -)$$

de  $\hat{\mathcal{F}}$  et l'élément  $\mathbf{w} = (h_1, h_2, N, 0, w, -)$  de  $\mathcal{F}$ .

**Corollaire** (i) Supposons  $d_+ = h_2^2 + 2N$ ,  $d_- = h_1(h_1 + 1)$ ,  $u_+$  paramétré par la partition  $(2|h_2| + 2N - 1, 2|h_2| - 3, \dots, 3, 1)$  et  $u_-$  paramétré par la partition  $(2h_1, 2h_1 - 2, \dots, 2)$ . Alors  $\phi(\rho_1)(g)$  et  $\phi(\mathbf{w})(g)$  valent tous deux  $\pm q^{\delta(h_1, h_2)/2}$ .

(ii) Supposons  $d_+ = h_2^2$ ,  $d_- = h_1(h_1 + 1) + 2N$ ,  $u_+$  paramétré par la partition  $(2|h_2| - 1, 2|h_2| - 3, \dots, 3, 1)$  et  $u_-$  paramétré par la partition  $(2h_1 + 2N, 2h_1 - 2, \dots, 2)$ . Alors la même conclusion vaut pour les termes  $\phi(\rho_2)(g)$  et  $\phi(\mathbf{w})(g)$ .

Preuve. Les hypothèses entraînent que (H) est vérifiée, que  $W(s) = W_N$  et que, pour deux représentations irréductibles  $\sigma$  et  $\rho$  de ce groupe, on a, sous les hypothèses de (i) :

$$[\sigma, \rho]_{h_1, h_2} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma = \rho \otimes \text{sgn}_{CD}^{h_1+s(h_2)} \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et, sous les hypothèses de (ii) :

$$[\sigma, \rho]_{h_1, h_2} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma = \rho \otimes \text{sgn}_{CD}^{h_1} \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

Par ailleurs, notons  $\mathbf{1}$  la représentation triviale de  $W_N$ . D'après [W2] VIII.11 (où on ne faisait bien sûr que reprendre des résultats de Lusztig),  $Q_{h_1, |h_2|, \sigma}(u)$  est nul si  $\sigma \neq \mathbf{1}$  et vaut  $\pm 1$  si  $\sigma = \mathbf{1}$ . Alors les assertions concernant  $\phi(\rho_1)(g)$  et  $\phi(\rho_2)(g)$  se déduisent du corollaire précédent. Pour  $\rho \in \hat{W}_N$ , notons  $\rho = (h_1, h_2, N, 0, \rho, -)$ . On voit aussi que  $\phi(\rho)(g) = 0$  si  $\rho \neq \text{sgn}_{CD}^{h_1+s(h_2)}$  dans le cas (i),  $\rho \neq \text{sgn}_{CD}^{h_1}$  dans le cas (ii). On a la formule d'inversion :

$$\phi(\mathbf{w}) = \sum_{\rho \in \hat{W}_N} \text{trace } \rho(w) \phi(\rho),$$

dont on déduit les assertions concernant  $\phi(\mathbf{w})(g)$ .  $\square$

### 9. Faisceaux-caractères et fonctionnelles de Whittaker

L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{cusp}} &\rightarrow \{(a, b) \in \mathbb{N}^2; \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} = n\} \\ (h_1, h_2) &\mapsto (a, b) = (\text{sup}(h_1 + h_2, -1 - h_1 - h_2), \text{sup}(h_1 - h_2, -1 - h_1 + h_2)) \end{aligned}$$

est une bijection. Soit  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{\text{cusp}}$ , notons  $(a, b)$  son image par cette application. On note  $\mu$  la réunion des deux partitions  $(a, a-1, \dots, 2, 1)$  et  $(b, b-1, \dots, 2, 1)$ . On note  $\nu$  la réunion des deux partitions  $(2h_1, 2h_1-2, \dots, 2)$  et  $(2|h_2|-1, 2|h_2|-3, \dots, 1)$ . On vérifie que  $\mu$  et  $\nu$  sont transposées l'une de l'autre.

Posons  $\mathcal{I} = \{(i, j); i \in \{1, \dots, \nu_1\}, j \in \{1, \dots, \mu_i\}\} = \{(i, j); j \in \{1, \dots, \mu_1\}, i \in \{1, \dots, \nu_j\}\}$ . Fixons une base  $(e_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{I}}$  de  $V$  sur  $\mathbb{F}_q$ . Notons  $\mathfrak{g} = \text{End}_{\mathbb{F}_q}(V)$  l'algèbre de Lie de  $G$ , définissons  $H, Y \in \mathfrak{g}$  par :

$$Y(e_{i,j}) = \begin{cases} e_{i-1,j}, & \text{si } i > 1 \\ 0, & \text{si } i = 1, \end{cases} \quad H(e_{i,j}) = (2i - \nu_j - 1)e_{i,j}.$$

Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , posons :

$$\mathfrak{u}_m = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = mX\}, \quad \mathfrak{u}_{\geq m} = \bigoplus_{m' \geq m} \mathfrak{u}_{m'}.$$

L'élément  $Y$  appartient à  $\mathfrak{u}_{-2}$ . Notons  $U_{\geq 2}$  le sous-groupe  $\{1 + X; X \in \mathfrak{u}_{\geq 2}\}$  de  $G$ . Fixons un caractère non trivial  $\psi$  de  $\mathbb{F}_q$ . On pose :

$$\gamma_\psi = q^{-1/2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \psi(x^2).$$

On définit le caractère  $\psi_Y$  de  $U_{\geq 2}$  par  $\psi_Y(1 + X) = \psi \circ \text{trace}(XY)$ . Soit  $\mathbf{t} = (t_j)_{j=1, \dots, \mu_1}$  une famille d'éléments de  $\mathbb{F}_q^\times$ . Définissons  $\sigma_{\mathbf{t}} \in \text{Isom}(V, V^*)$  par  $\sigma_{\mathbf{t}}(e_{i,j}) = t_j(-1)^{i+1+\lfloor \nu_j/2 \rfloor} e_{\nu_j+1-i, j}^*$ , posons  $s_{\mathbf{t}} = \tilde{\sigma}_{\mathbf{t}} \in \tilde{G}$ . On vérifie que  $H$  et  $Y$  appartiennent à l'algèbre de Lie du commutant de  $s_{\mathbf{t}}$ . Cela entraîne que  $s_{\mathbf{t}}$  normalise le groupe  $U_{\geq 2}$  en fixant son caractère  $\psi_Y$ .

Pour  $(k_1, k_2) \in \mathcal{F}_{\text{cusp}}$ , posons :

$$c_{\mathbf{t}}(k_1, k_2) = \sum_{x \in U_{\geq 2}} \phi(k_1, k_2)(s_{\mathbf{t}}x) \psi_Y(x)^{-1}.$$

**Lemme.** Soit  $(k_1, k_2) \in \mathcal{F}_{\text{cusp}}$ . Si  $(k_1, k_2) \neq (h_1, \pm h_2)$ ,  $c_{\mathbf{t}}(k_1, k_2) = 0$ . Si  $(k_1, k_2) = (h_1, \pm h_2)$ , on a l'égalité :

$$c_{\mathbf{t}}(k_1, k_2) = |\mathfrak{u}_{\geq 2}| \gamma_\psi^{h_1(h_1+1)/2} \prod_{j \in J(k_1, k_2)} \eta(t_j),$$

où  $J(k_1, k_2)$  est l'ensemble des  $j \in \{1, \dots, \mu_1\}$  tels que  $\nu_j \equiv 2$  ou  $\nu_j \equiv 2k_1 + 2s(k_2) - 1$  modulo  $4\mathbb{Z}$ .

Preuve. Décomposons  $\mathfrak{g}$  en somme d'espaces propres pour l'action de  $Ad(s_{\mathfrak{t}}) : \mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{g}_{\alpha}$ . En particulier,  $\mathfrak{g}_1$  est l'algèbre de Lie du commutant de  $s_{\mathfrak{t}}$ . Puisque  $Ad(s_{\mathfrak{t}})$  conserve  $\mathfrak{u}_{\geq 2}$ , on a l'égalité :

$$\mathfrak{u}_{\geq 2} = \bigoplus_{\alpha \in A} (\mathfrak{u}_{\geq 2} \cap \mathfrak{g}_{\alpha}).$$

Posons  $\mathfrak{v}_{\geq 2} = \mathfrak{u}_{\geq 2} \cap \mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{u}'_{\geq 2} = \bigoplus_{\alpha \neq 1} (\mathfrak{u}_{\geq 2} \cap \mathfrak{g}_{\alpha})$ . Un raisonnement standard montre que l'application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_{\geq 2} \oplus \mathfrak{u}'_{\geq 2} &\rightarrow \tilde{G} \\ (X, X') &\mapsto (1 + X')s_{\mathfrak{t}}(1 + X)(1 + X')^{-1} \end{aligned}$$

est injective et a pour image  $s_{\mathfrak{t}}U_{\geq 2}$ . Parce que  $Y$  appartient à  $\mathfrak{g}_1$ , on a  $trace(X'Y) = 0$  pour tout  $X' \in \mathfrak{u}'_{\geq 2}$ . Notons  $s_{\mathfrak{t}}x$  l'image ci-dessus de  $(X, X')$ . On a donc  $\psi_Y(x) = \psi \circ trace(XY)$ . Puisque  $\phi(k_1, k_2)$  est invariante par conjugaison, on en déduit :

$$(1) \quad c_{\mathfrak{t}}(k_1, k_2) = |\mathfrak{u}'_{\geq 2}| \sum_{X \in \mathfrak{v}_{\geq 2}} \phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 + X))\psi \circ trace(-XY).$$

Dans cette formule,  $s_{\mathfrak{t}}$  et  $1 + X$  commutent, donc  $s_{\mathfrak{t}}$  est la partie semi-simple de  $s_{\mathfrak{t}}(1 + X)$ . L'élément  $s_{\mathfrak{t}}$  est paramétré par  $I = \emptyset, d_+, q_+, d_-, q_-$ , où  $d_+$ , resp.  $d_-$ , est la somme des termes impairs, resp. pairs, de  $\nu$ . D'où  $d_+ = h_2^2$ ,  $d_- = h_1(h_1 + 1)$ . Si  $(k_1, k_2) \neq (h_1, \pm h_2)$ ,  $s_{\mathfrak{t}}(1 + X)$  n'appartient au support de  $\phi(k_1, k_2)$  pour aucun  $X \in \mathfrak{v}_{\geq 2}$ . D'où la première assertion de l'énoncé. Supposons maintenant  $(k_1, k_2) = (h_1, \pm h_2)$ . Posons  $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{g}_1$ , notons  $\pi : \mathfrak{v}_{\geq 2} \rightarrow \mathfrak{v}_2$  la projection évidente. Pour tout  $X \in \mathfrak{v}_{\geq 2}$ , on a les égalités  $\phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 + X)) = \phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 + \pi(X)))$ ,  $trace(-XY) = trace(-\pi(X)Y)$ . La formule (1) se simplifie en :

$$c_{\mathfrak{t}}(k_1, k_2) = |\mathfrak{u}_{\geq 2}| |\mathfrak{v}_2|^{-1} \sum_{X \in \mathfrak{v}_2} \phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 + X))\psi \circ trace(-XY).$$

On a  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}(q_+) \oplus \mathfrak{sp}(q_-)$ , avec des notations évidentes. L'espace  $\mathfrak{v}_2$  et l'élément  $Y$  se décomposent conformément en  $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_{2,+} \oplus \mathfrak{v}_{2,-}$ ,  $Y = Y_+ + Y_-$ . On a une égalité  $\phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 + X_+ + X_-)) = cf_+(X_+)f_-(X_-)$  pour tous éléments nilpotents  $X_+ \in \mathfrak{so}(q_+)$ ,  $X_- \in \mathfrak{sp}(q_-)$ . Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont celles définies en [W2] II.4,5 et  $c$  est une constante non nulle que l'on n'aura pas besoin de calculer. En loc.cit. V.5,6, on a calculé les expressions :

$$\sum_{X_{\epsilon} \in \mathfrak{v}_{2,\epsilon}} f_{\epsilon}(X_{\epsilon})\psi \circ trace(-X_{\epsilon}Y_{\epsilon}),$$

pour  $\epsilon = \pm$ . Elles valent :

$$|\mathfrak{v}_{2,\epsilon}|^{1/2} f_{\epsilon}(-Y_{\epsilon}) \begin{cases} 1, & \text{si } \epsilon = + \text{ et } h_2 \text{ est impair;} \\ \eta(-1)^{h_2/2} \eta(q_+), & \text{si } \epsilon = + \text{ et } h_2 \text{ est pair;} \\ (\eta(-1)\gamma_{\psi})^{h_1(h_1+1)/2}, & \text{si } \epsilon = -. \end{cases}$$

On calcule d'autre part  $|\mathfrak{v}_2| = |\mathfrak{v}_{2,+}| |\mathfrak{v}_{2,-}| = q^{\delta(h_1, h_2)}$ . On obtient :

$$c_{\mathfrak{t}}(k_1, k_2) = |\mathfrak{u}_{\geq 2}| q^{-\delta(h_1, h_2)/2} (\eta(-1)\gamma_{\psi})^{h_1(h_1+1)/2} (\eta(-1)^{[h_2/2]} \eta(q_+))^{h_2+1} \phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 - Y)).$$

Posons  $u_{\epsilon} = 1 - Y_{\epsilon}$  pour  $\epsilon = \pm$ . On calcule les paramètres de ces éléments :

- pour  $i = 1, 3, \dots, 2|k_2| - 1$ ,  $\eta_{u_+}(i) = \eta(t_j)$ ,
- pour  $i = 2, 4, \dots, 2k_1$ ,  $\eta_{u_-}(i) = \eta(-t_j)$ ,

où  $j$  est tel que  $i = \nu_j$ . Alors :

$$(\eta(-1)^{[h_2/2]} \eta(q_+))^{h_2+1} \phi(k_1, k_2)(s_{\mathfrak{t}}(1 - Y)) = q^{\delta(h_1, h_2)/2} \eta(-1)^{h_1(h_1+1)/2} \prod_{j \in J(k_1, k_2)} \eta(t_j).$$

D'où la formule de l'énoncé.  $\square$

## 10. Représentations quadratiques-unipotentes

Pour toute représentation  $(\pi, E)$  de  $G$ , on note  $(\theta(\pi), \theta(E))$  la représentation telle que  $\theta(E) = E$ ,  $\theta(\pi)(g) = \pi(\theta^{-1}(g))$ . Si ces deux représentations sont équivalentes, on peut prolonger  $\pi$  en une représentation  $\pi^+$  de  $G^+$ . Pour toute représentation  $\pi^+$  de  $G^+$ , on note  $trace_{\tilde{G}}\pi^+$  la restriction à  $\tilde{G}$  de son caractère.

On note  $\mathbf{B}$  le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de  $\mathbf{G}$ . Soient  $\mathbf{P}$  un sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}$ , c'est-à-dire contenant  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{M}$  son sous-groupe de Lévi standard, que l'on écrit  $\mathbf{M} = \mathbf{G}_{n_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{n_a}$ . Pour tout  $i = 1, \dots, a$ , soit  $(\pi_i, E_i)$  une représentation de  $G_{n_i}$ . On définit de façon usuelle le module induit  $Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a)$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_a$ , posons  ${}^\sigma\mathbf{M} = \mathbf{G}_{n_{\sigma^{-1}(1)}} \times \dots \times \mathbf{G}_{n_{\sigma^{-1}(a)}}$ , notons  ${}^\sigma\mathbf{P}$  le sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}$  de sous-groupe de Lévi  ${}^\sigma\mathbf{M}$ . Notons  $w$ , ou plus précisément  $w[\sigma, M]$ , la matrice de permutation appartenant à  $G$  telle que, pour  $m = (m_1, \dots, m_a) \in M$ , on ait  $wmw^{-1} = (m_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, m_{\sigma^{-1}(a)}) \in {}^\sigma M$ . On définit l'opérateur d'entrelacement :

$$I(w) : Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a) \rightarrow Ind_{{}^\sigma\mathbf{P}}^G(E_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes E_{\sigma^{-1}(a)})$$

par la formule usuelle :

$$(I(w)\varphi)(g) = \sum_{u \in {}^\sigma U \cap w P w^{-1} \backslash {}^\sigma U} A_\sigma \circ \varphi(w^{-1}ug),$$

où  ${}^\sigma U$  est le radical unipotent de  ${}^\sigma\mathbf{P}$  et :

$$A_\sigma(e_1 \otimes \dots \otimes e_a) = e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma^{-1}(a)}.$$

Dans le cas particulier où  $n = 2$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $\pi_1$  est la représentation triviale,  $\pi_2$  est le caractère  $\eta$  et  $\sigma$  est l'élément non trivial de  $\mathfrak{S}_2$ , on vérifie que  $I(w)^2$  est l'homothétie de rapport  $q$ . Plus généralement, si  $a = 2$  et si  $\pi_1$  et  $(\eta \circ \det) \otimes \pi_2$  sont sommes de représentations irréductibles unipotentes, alors  $I(w^{-1}) \circ I(w)$  est une homothétie de rapport une puissance entière de  $q$ .

Supposons que chaque  $\pi_i$  se prolonge en une représentation  $\pi_i^+$  de  $G_{n_i}^+$ . On définit un homomorphisme :

$$\Theta : Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a) \rightarrow Ind_{\theta(\mathbf{P})}^G(E_a \otimes \dots \otimes E_1)$$

par  $\Theta(\varphi)(g) = A \circ \varphi \circ \theta^{-1}(g)$ , où  $A(e_1 \otimes \dots \otimes e_a) = \pi_a^+(e_{n_a})(e_a) \otimes \dots \otimes \pi_1^+(e_{n_1})(e_1)$ . Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $w_{m, \max}$  l'élément de  $\mathfrak{S}_m$  de longueur maximale. En remplaçant  $\mathbf{P}$  par  $\theta(\mathbf{P})$  dans les constructions ci-dessus, on définit l'opérateur :

$$I(w) : Ind_{\theta(\mathbf{P})}^G(E_a \otimes \dots \otimes E_1) \rightarrow Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a),$$

où  $w = w[w_{a, \max}, \theta(M)]$  (remarquons que  $w_{a, \max} \theta(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ ). Notons  $\pi$  la représentation de  $G$  dans  $Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a)$ . L'endomorphisme  $I(w) \circ \Theta$  de  $Ind_{\mathbf{P}}^G(E_1 \otimes \dots \otimes E_a)$  vérifie  $I(w) \circ \Theta \circ \pi(g) = \pi(\theta(g)) \circ I(w) \circ \Theta$  pour tout  $g \in G$ .

Pour  $\mu \in \mathcal{P}(n)$ , notons  $(\pi(\mu), E(\mu))$  la représentation irréductible unipotente de  $G$  paramétrée par  $\mu$  (si  $\mu = (n)$ ,  $\pi((n))$  est la représentation triviale). Sa classe est fixée par l'automorphisme  $\theta$ . On va choisir un prolongement à  $G^+$ . Notons  $\mathcal{H}$  l'algèbre des fonctions sur  $G$  biinvariantes par  $B$ . Pour  $w \in \mathfrak{S}_n$ , notons  $T_w$  l'élément usuel de  $\mathcal{H}$ . L'automorphisme  $\theta$  définit un automorphisme de  $\mathcal{H}$ . On vérifie que  $\theta(T_w) = T_{w_{n, \max} w w_{n, \max}} = T_{w_{n, \max}} T_w T_{w_{n, \max}}^{-1}$  pour tout  $w \in \mathfrak{S}_n$ . On sait que  $\mathcal{H}$  agit de façon irréductible dans le sous-espace des invariants  $E(\mu)^B$ . On note encore  $\pi(\mu)$  cette action. Pour tout prolongement  $\pi^+$  de  $\pi(\mu)$  à  $G^+$ ,  $\pi^+(\theta)$  conserve  $E(\mu)^B$  et la formule ci-dessus entraîne que  $\pi^+(\theta)$  y agit comme un multiple  $c\pi(\mu)(T_{w_{n, \max}})$ . On sait d'autre part que  $\pi(\mu)(T_{w_{n, \max}}^2)$  est une homothétie de rapport une puissance entière de

$q$ . Donc  $c$  est réel. Pour un seul prolongement, ce réel est positif. Plus précisément, c'est une puissance entière de  $q^{-1/2}$ . C'est ce prolongement que nous noterons désormais  $\pi^+(\boldsymbol{\mu})$ .

Pour  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ , on note  $(\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2), E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$  la représentation de  $G$  induite de la représentation  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes ((\eta \circ \det) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_2))$  de  $G_{n_1} \times G_{n_2}$ , où  $n_j = S(\boldsymbol{\mu}_j)$  pour  $j = 1, 2$ . Sa classe est encore fixée par  $\boldsymbol{\theta}$ . On vient de définir les prolongements  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_j)$  de  $\pi(\boldsymbol{\mu}_j)$  à  $G_{n_j}^+$ . On prolonge  $(\eta \circ \det) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_2)$  en la représentation  $(\eta \circ \mathbf{det}) \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2)$ . On construit comme ci-dessus un endomorphisme  $I(w) \circ \Theta$  de  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Son carré est une puissance entière de  $q$ . Il y a donc un seul réel  $c > 0$ , en fait une puissance entière de  $q^{-1/2}$ , tel que  $cI(w) \circ \Theta$  ait pour carré l'identité. On définit le prolongement  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  de  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  à  $G^+$  par  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta}) = cI(w) \circ \Theta$ .

Il nous sera utile de réaliser cette représentation de la façon suivante. Ecrivons  $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{1,1} \geq \dots \geq \mu_{1,a} > 0)$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2 = (\mu_{2,1} \geq \dots \geq \mu_{2,b} > 0)$ , fixons une permutation  $\delta \in \mathfrak{S}_{a+b}$ , notons  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{a+b})$  la suite d'entiers (non nécessairement décroissante) définie par :

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_{1,\delta(i)}, & \text{si } \delta(i) \leq a, \\ \mu_{2,\delta(i)-a}, & \text{si } \delta(i) > a. \end{cases}$$

Introduisons le sous-groupe parabolique standard  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$  dont le Lévi standard est :

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}_{\mu_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{a+b}}.$$

Notons  $(\eta_M, \mathbb{C}(\eta_M))$  la représentation de dimension 1 de  $M$  telle que  $\eta_M$ , restreint au facteur  $G_{\mu_i}$ , soit trivial si  $\delta(i) \leq a$  et égal à  $\eta \circ \det$  si  $\delta(i) > a$ . Introduisons la représentation  $(\pi, \text{Ind}_{\mathbf{P}}^G(\mathbb{C}(\eta_M)))$  de  $G$ . On définit l'homomorphisme  $\Theta : \text{Ind}_{\mathbf{P}}^G(\mathbb{C}(\eta_M)) \rightarrow \text{Ind}_{\Theta(\mathbf{P})}^G(\mathbb{C}(\eta_M \circ \boldsymbol{\theta}))$  qui à  $\varphi$  associe la fonction  $g \mapsto \varphi \circ \boldsymbol{\theta}^{-1}(g)$ . On construit comme ci-dessus un homomorphisme  $I(w) : \text{Ind}_{\Theta(\mathbf{P})}^G(\mathbb{C}(\eta_M \circ \boldsymbol{\theta})) \rightarrow \text{Ind}_{\mathbf{P}}^G(\mathbb{C}(\eta_M))$ . Il est bien connu que  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  intervient avec multiplicité 1 dans  $\pi$ . On peut donc identifier  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  à un sous-module de  $\text{Ind}_{\mathbf{P}}^G(\mathbb{C}(\eta_M))$ . L'opérateur  $I(w) \circ \Theta$  conserve ce sous-module et y agit comme un multiple de  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta})$ . Posons  $N = \sum_{i=1, \dots, b} \frac{\mu_{2,i}^2 - \mu_{2,i}}{2}$ .

**Lemme.** *Il existe un nombre  $c = q^{m/2}$ , où  $m \in \mathbb{Z}$ , tel que  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta})$  soit égal à la restriction à  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  de  $c\eta(-1)^N I(w) \circ \Theta$ .*

Preuve. Posons  $E = \text{Ind}_{\mathbf{P}}^G(\mathbb{C}(\eta_M))$ . Supposons d'abord  $\boldsymbol{\mu}_2 = \emptyset$  donc  $\eta_M = 1$ . Il suffit de voir que  $I(w) \circ \Theta$  agit sur  $E^B$  comme  $q^m \pi(T_{w_{n, \max}})$  pour un entier  $m \in \mathbb{Z}$ . Notons  $\mathfrak{S}^M$  le groupe de Weyl de  $\mathbf{M}$ , identifié à un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ . Les éléments de  $E^B$  sont les combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_y = \sum_{x \in \mathfrak{S}^M} T_x T_y$  pour  $y \in \mathfrak{S}_n$ . On a  $\Theta(\varphi_y) = T_{w_{n, \max}}^{-1} \varphi_y T_{w_{n, \max}}$ , puis  $I(w) \circ \Theta(\varphi_y) = T_w T_{w_{n, \max}}^{-1} \varphi_y T_{w_{n, \max}}$ . Notons  $w_{\max}^M$  l'élément maximal de  $\mathfrak{S}^M$ . On a les égalités  $T_w T_{w_{n, \max}}^{-1} = T_{w_{\max}^M}^{-1}$  et  $T_{w_{\max}^M}^{-1} \sum_{x \in \mathfrak{S}^M} T_x = q^{-\ell} \sum_{x \in \mathfrak{S}^M} T_x$ , où  $\ell$  est la longueur de  $w_{\max}^M$ . Alors  $I(w) \circ \Theta(\varphi_y) = q^{-\ell} \varphi_y T_{w_{n, \max}} = q^{-\ell} \pi(T_{w_{n, \max}})(\varphi_y)$ , ce qui démontre l'assertion.

Supposons maintenant  $\boldsymbol{\mu}_1 = \emptyset$ . On définit comme ci-dessus l'espace  $E$  et les opérateurs  $\Theta$  et  $I(w)$ . Pour la représentation  $\pi(\boldsymbol{\mu}_2, \emptyset)$ , on définit de même un espace  $E'$  et des opérateurs  $\Theta'$  et  $I'(w)$ . Définissons l'isomorphisme  $\kappa : E \rightarrow E'$  par  $\kappa(\varphi)(g) = \eta \circ \det(g) \varphi(g)$ . Il envoie  $E(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)$  sur  $E(\boldsymbol{\mu}_2, \emptyset)$  et entrelace  $\pi(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)$  avec  $(\eta \circ \det) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_2, \emptyset)$ . Par définition de  $\pi^+(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)$ ,  $\kappa$  entrelace  $\pi^+(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta})$  avec  $\eta \circ \mathbf{det}(\boldsymbol{\theta}) \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2, \emptyset)(\boldsymbol{\theta})$ . D'après ce que l'on vient de prouver et parce que  $\mathbf{det}(\boldsymbol{\theta}) = (-1)^{n(n-1)/2}$ , on a donc une égalité  $\kappa \circ \pi^+(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta}) = \eta(-1)^{n(n-1)/2} q^{m/2} I'(w) \circ \Theta' \circ \kappa$ , où  $m \in \mathbb{Z}$ . On vérifie que  $I'(w) \circ \Theta' \circ \kappa = (\eta \circ \det(w)) \kappa \circ I(w) \circ \Theta$ . On calcule  $\det(w) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2 - \sum_i \mu_{2,i}^2)}$ , d'où l'égalité  $\kappa \circ \pi^+(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta}) = \eta(-1)^N q^{m/2} \kappa \circ I(w) \circ \Theta$  et l'assertion.

Passons au cas où  $\boldsymbol{\mu}_1$  et  $\boldsymbol{\mu}_2$  sont quelconques mais où  $\delta$  conserve les sous-ensembles  $\{1, \dots, a\}$  et  $\{a+1, \dots, a+b\}$  de  $\{1, \dots, a+b\}$ . Posons  $n_j = S(\boldsymbol{\mu}_j)$  pour  $j = 1, 2$ , introduisons le sous-groupe parabolique standard  $\mathbf{Q}$  de  $\mathbf{G}$  de Lévi  $\mathbf{L} = \mathbf{G}_{n_1} \times \mathbf{G}_{n_2}$ . On effectue dans  $G_{n_1}$ , resp.  $G_{n_2}$ , les constructions précédentes relatives aux représentations  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset)$ , resp.  $\pi(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)$ , d'où des espaces  $E_1$ , resp.  $E_2$ , et des opérateurs  $\Theta_1, I(w_1)$ , resp.  $\Theta_2, I(w_2)$ . Introduisons les objets suivants :

- $J : \text{Ind}_P^G(\mathbb{C}(\eta_M)) \rightarrow \text{Ind}_Q^G(E_1 \otimes E_2)$  l'isomorphisme habituel ;
  - $w_0 = w[w_{2,max}, \boldsymbol{\theta}(L)]$  et  $I(w_0) : \text{Ind}_{\boldsymbol{\theta}(Q)}^G(E_2 \otimes E_1) \rightarrow \text{Ind}_Q^G(E_1 \otimes E_2)$  l'opérateur associé ;
  - $A : E_1 \otimes E_2 \rightarrow E_2 \otimes E_1$   
 $e_1 \otimes e_2 \mapsto I(w_2) \circ \Theta_2(e_2) \otimes I(w_1) \circ \Theta_1(e_1)$  ;
  - $\Theta_0 : \text{Ind}_Q^G(E_1 \otimes E_2) \rightarrow \text{Ind}_{\boldsymbol{\theta}(Q)}^G(E_2 \otimes E_1)$  par  $\Theta_0(\varphi)(g) = A \circ \varphi \circ \boldsymbol{\theta}(g)$  ;
  - $\Theta'_0 : \text{Ind}_Q^G(E(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset) \otimes E(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2)) \rightarrow \text{Ind}_{\boldsymbol{\theta}(Q)}^G(E(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2) \otimes E(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset))$  défini de la même façon que  $\Theta_0$ , en remplaçant les opérateurs  $I(w_1) \circ \Theta_1$  et  $I(w_2) \circ \Theta_2$  par  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset)(\theta_{n_1})$  et  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_2, \emptyset)(\theta_{n_2})$ .
- On vérifie l'égalité :

$$J \circ I(w) \circ \Theta = I(w_0) \circ \Theta_0 \circ J.$$

Il est clair que  $J(E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \text{Ind}_Q^G(E(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset) \otimes E(\emptyset, \boldsymbol{\mu}_2))$ . Par définition de  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ , l'opérateur  $J \circ \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\theta) \circ J^{-1}$  agit sur ce sous-espace par  $q^{m'/2} I(w_0) \circ \Theta'_0$ , pour un certain entier  $m'$ . D'après ce que l'on a déjà prouvé,  $\Theta'_0 = q^{m''/2} \eta(-1)^N \Theta_0$ , pour un certain entier  $m''$ . On en déduit l'égalité  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\theta) = q^{(m'+m'')/2} \eta(-1)^N I(w) \circ \Theta$  sur  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ .

Passons enfin au cas général. On doit montrer que le résultat est indépendant de  $\delta$ . Soit  $s$  une symétrie élémentaire de  $\mathfrak{S}_{a+b}$ . Posons  $\delta' = \delta s$ . On associe à  $\delta'$  des objets  $M', \Theta', I(w')$  etc... On dispose de l'opérateur d'entrelacement :

$$I(w_s) : \text{Ind}_P^G(\mathbb{C}(\eta_M)) \rightarrow \text{Ind}_{P'}^G(\mathbb{C}(\eta_{M'})),$$

où  $w_s = w[s, M]$ . On vérifie l'égalité  $I(w') \circ \Theta' \circ I(w_s) = I(w_s) \circ I(w) \circ \Theta$ . Si l'égalité de l'énoncé est vraie pour  $\delta$ , elle l'est donc aussi pour  $\delta'$ .  $\square$

On vérifie, par exemple grâce au lemme, que  $(\eta \circ \mathbf{det}) \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_1)$  pour tous  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ . D'autre part, la famille de fonctions  $(\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))_{(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)}$  est orthonormée.

## 11. Modèles de Whittaker dégénérés

Soit  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ . Effectuons les constructions du paragraphe 9 relatives à ce couple. Munissons  $\mathfrak{u}_1$  de la forme bilinéaire  $\langle X, X' \rangle = \text{trace}(Y[X, X'])$ . Elle est symplectique, non dégénérée. Posons  $U_{\geq 1} = \{1 + X; X \in \mathfrak{u}_1\}$ . On sait qu'il existe une unique représentation irréductible de  $U_{\geq 1}$  dans laquelle  $U_{\geq 2}$  agit par le caractère  $\psi_Y$ . Construisons un modèle de cette représentation. Pour  $(i, j), (k, \ell) \in \mathcal{I}$ , notons  $E_{i,j;k,\ell}$  l'élément de la base standard de  $\mathfrak{g}$  qui envoie  $e_{k,\ell}$  sur  $e_{i,j}$ . Posons :

$$\mathcal{J} = \{(j, \ell); 1 \leq j < \ell \leq \mu_1, \nu_j \equiv \nu_\ell + 1 \text{ mod } 2\mathbb{Z}\}.$$

Pour  $(j, \ell) \in \mathcal{J}$  et  $i \in \{1, \dots, \nu_\ell\}$ , posons :

$$E'_{i;j,\ell} = E_{i+\frac{\nu_j-\nu_\ell+1}{2};j,i,\ell}, \quad E''_{i;\ell,j} = E_{i,\ell;i+\frac{\nu_j-\nu_\ell-1}{2};j}.$$

Notons  $\mathfrak{u}'_1$ , resp.  $\mathfrak{u}''_1$  l'espace de base les  $E'_{i;j,\ell}$ , resp.  $E''_{i;\ell,j}$ , pour  $(j, \ell) \in \mathcal{J}$  et  $i \in \{1, \dots, \nu_\ell\}$ . On vérifie que  $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}'_1 \oplus \mathfrak{u}''_1$  et que  $\mathfrak{u}'_1$  et  $\mathfrak{u}''_1$  sont deux sous-espaces lagrangiens de  $\mathfrak{u}_1$  en dualité. Plus précisément, pour  $(j, \ell), (j', \ell') \in \mathcal{J}$ ,  $i \in \{1, \dots, \nu_\ell\}$ ,  $i' \in \{1, \dots, \nu_{\ell'}\}$ , on a l'égalité :

$$(1) \quad \langle E'_{i;j,\ell}, E''_{i';\ell',j'} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } (i', j', \ell') = (i, j, \ell), \\ -1, & \text{si } (i', j', \ell') = (i+1, j, \ell), \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On note  $\mathcal{S}$  l'espace des fonctions sur  $\mathfrak{u}'_1$ . Le groupe  $U_{\geq 1}$  agit dans  $\mathcal{S}$  par une représentation  $\omega$  telle que, pour  $f \in \mathcal{S}$ ,  $X, X' \in \mathfrak{u}'_1$ ,  $X'' \in \mathfrak{u}''_1$ ,  $Z \in \mathfrak{u}_{\geq 2}$ , on ait l'égalité :

$$(\omega(1+Z)\omega(1+X'')\omega(1+X')f)(X) = \psi_Y(Z)\psi(\langle X, X'' \rangle)f(X+X').$$

C'est le modèle cherché.

Pour toute représentation  $(\pi, E)$  de  $G$ , posons :

$$E_{\psi_Y} = \{v \in E; \forall x \in U_{\geq 2}, \pi(x)v = \psi_Y(x)v\}.$$

Le groupe  $U_{\geq 1}$  agit dans cet espace. Supposons  $\pi = \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ , avec  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ . La théorie des modèles de Whittaker dégénérés nous dit que  $E_{\psi_Y} \neq \{0\}$  seulement si  $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 \leq \boldsymbol{\mu}$ . Quand  $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$ ,  $E_{\psi_Y}$  est non nul et  $U_{\geq 1}$  y agit par une représentation irréductible nécessairement isomorphe à  $\omega$ .

On a fixé au paragraphe 1 une base  $(e_k)_{k=1, \dots, n}$  de  $V$  et, au paragraphe 9, une autre base  $(e_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{I}}$ . Munissons  $\mathcal{I}$  de l'ordre lexicographique, notons  $\xi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{I}$  l'unique bijection croissante. Nous supposons désormais que  $e_{\xi(k)} = e_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Notons  $\mathbf{P}$  le sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}$  de Lévi  $\mathbf{M} = \mathbf{G}_{\mu_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{a+b}}$ . On pose  $\boldsymbol{\mu}_1 = (a, a-1, \dots, 1)$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2 = (b, b-1, \dots, 1)$ . On fixe une permutation  $\delta \in \mathfrak{S}_{a+b}$  telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, a+b\}$ , on ait l'égalité :

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_{1, \delta(i)} = a+1 - \delta(i), & \text{si } \delta(i) \leq a, \\ \mu_{2, \delta(i)-a} = a+b+1 - \delta(i), & \text{si } \delta(i) > a. \end{cases}$$

On construit comme au paragraphe 10 un caractère  $\eta_M$  de  $M$ . On pose  $E = \text{Ind}_P^G(\mathbb{C}(\eta_M))$ , on note  $\pi$  la représentation de  $G$  dans  $E$ . Cette représentation contient  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  avec multiplicité 1 et des représentations  $\pi(\boldsymbol{\mu}'_1, \boldsymbol{\mu}'_2)$ , avec  $\boldsymbol{\mu}'_1 \cup \boldsymbol{\mu}'_2 > \boldsymbol{\mu}$ . D'après les rappels ci-dessus,  $E_{\psi_Y} = E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)_{\psi_Y}$  et  $U_{\geq 1}$  y agit de façon irréductible. On définit une application linéaire :

$$\Omega : E_{\psi_Y} \rightarrow \mathcal{S}$$

par  $\Omega(\varphi)(X) = \varphi(1+X)$  pour tout  $X \in \mathfrak{u}'_1$ . En remarquant que  $\{1+X''; X'' \in \mathfrak{u}''_1\} \subseteq P$ , on vérifie que  $\Omega$  entrelace les actions de  $U_{\geq 1}$ . On vérifie aussi qu'elle est non nulle (on le prouvera d'ailleurs dans la démonstration ci-dessous). C'est donc un isomorphisme.

On note  $\pi^+(\theta)$  l'opérateur  $c\eta(-1)^N I(w) \circ \Theta$  du lemme 10. Pour  $g \in \tilde{G}$ , on pose  $\pi^+(g) = \pi^+(\theta)\pi(\theta^{-1}g) = \pi(g\theta^{-1})\pi^+(\theta)$ . Cela définit un "prolongement" de  $\pi$  à  $G^+$ . Mais on prendra garde qu'il ne s'agit pas en général d'une représentation car  $\pi^+(\theta)^2$  n'a pas de raison d'être égal à l'identité, ni même d'être une homothétie. Toutefois, d'après le lemme 10, la restriction de  $\pi^+$  au sous-espace  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  est une représentation : c'est  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Parce que  $s_{\mathbf{t}}$  commute à  $H$  et  $Y$ ,  $\pi^+(s_{\mathbf{t}})$  conserve le sous-espace  $E_{\psi_Y}$ . Posons  $S_{\mathbf{t}} = \Omega \circ \pi^+(s_{\mathbf{t}}) \circ \Omega^{-1}$ . C'est un automorphisme de  $\mathcal{S}$  qui vérifie la relation  $S_{\mathbf{t}} \circ \omega(x) = \omega(s_{\mathbf{t}} x s_{\mathbf{t}}^{-1}) \circ S_{\mathbf{t}}$  pour tout  $x \in U_{\geq 1}$ . Il est d'ordre fini car  $\pi(s_{\mathbf{t}})$  l'est dans  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ , a fortiori dans  $E_{\psi_Y}$ . On vérifie les égalités suivantes, pour tous  $(j, \ell) \in \mathcal{J}$  et  $i \in \{1, \dots, \mu_\ell\}$  :

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Ad}(s_{\mathbf{t}})E'_{i;j,\ell} &= (-1)^{\nu_\ell} t_j t_\ell^{-1} E''_{\mu_\ell+1-i;\ell,j}, \\ \text{Ad}(s_{\mathbf{t}})E''_{i;\ell,j} &= (-1)^{\nu_j} t_\ell t_j^{-1} E'_{\mu_\ell+1-i;j,\ell}. \end{aligned}$$

En particulier,  $\text{Ad}(s_{\mathbf{t}})$  échange les espaces  $\mathfrak{u}'_1$  et  $\mathfrak{u}''_1$ . Alors  $S_{\mathbf{t}}$  s'exprime nécessairement par une formule :

$$(3) \quad (S_{\mathbf{t}} f)(X) = c_{\mathbf{t}} |\mathfrak{u}'_1|^{-1/2} \sum_{X'' \in \mathfrak{u}''_1} \psi(\langle X'', X \rangle) f(\text{Ad}(s_{\mathbf{t}})^{-1}(X''))$$

pour tous  $f \in \mathcal{S}$  et  $X \in \mathfrak{u}'_1$ , où  $c_{\mathbf{t}}$  est une certaine constante. Parce que  $S_{\mathbf{t}}$  est d'ordre fini, cette constante est de module 1.

Pour tout entier  $m \in \mathbb{Z}$ , posons :

$$\alpha(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \equiv 2 \pmod{4\mathbb{Z}} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons aussi :

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{6}(h_1 - |h_2|)(h_1 - |h_2| + 1)(4h_1 + 2|h_2| + 2), & \text{si } |h_2| > h_1, \\ \frac{1}{6}(h_1 - |h_2|)(h_1 - |h_2| + 1)(2h_1 + 4|h_2| + 1), & \text{si } |h_2| \leq h_1. \end{cases}$$

**Lemme.** *On a l'égalité :*

$$c_{\mathbf{t}} = (-1)^{\alpha(a)+\alpha(b)} \gamma_{\psi}^{\beta} \left( \prod_{j=1, \dots, b} \eta((-1)^{[\nu_j/2]} t_j)^{b+1-j} \right).$$

Preuve. Posons  $U'_{\geq 1} = \{1 + X; X \in \mathfrak{u}'_1 \oplus \mathfrak{u}_{\geq 2}\}$ ,  $U''_{\geq 1} = \{1 + X; X \in \mathfrak{u}''_1 \oplus \mathfrak{u}_{\geq 2}\}$ . Prolongeons le caractère  $\psi_Y$  à chacun de ces groupes par la formule évidente  $\psi_Y(1 + X) = \psi \circ \text{trace}(XY)$ . Définissons des formes linéaires sur  $E$  par :

$$\mathcal{L}'(\varphi) = \sum_{x \in U'_{\geq 1}} \varphi(x) \psi_Y(x)^{-1}, \quad \mathcal{L}''(\varphi) = \sum_{x \in U''_{\geq 1}} \varphi(x) \psi_Y(x)^{-1}.$$

La forme linéaire  $\mathcal{L}'$  vérifie  $\mathcal{L}' \circ \pi(x) = \psi_Y(x) \circ \mathcal{L}'$  pour tout  $x \in U'_{\geq 1}$ . Toute forme linéaire vérifiant cette relation est proportionnelle à  $\mathcal{L}'$ . En effet, une telle forme se factorise par la projection  $U'_{\geq 1}$ -équivariante sur  $E_{\psi_Y}$ . Sur ce sous-espace, elle est forcément proportionnelle à  $\varphi \mapsto \sum_{X \in \mathfrak{u}'_1} \Omega(\varphi)(X)$ . Une propriété analogue vaut pour  $\mathcal{L}''$ . Or  $Ad(s_{\mathbf{t}})$  échange  $U'_{\geq 1}$  et  $U''_{\geq 1}$  en échangeant les caractères  $\psi_Y$ . Les deux formes linéaires  $\mathcal{L}'' \circ \pi(s_{\mathbf{t}})$  et  $\mathcal{L}'$  sont donc proportionnelles. Pour  $\varphi \in E_{\psi_Y}$ , on a les égalités :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' \circ \pi(s_{\mathbf{t}})(\varphi) &= |U_{\geq 2}| \sum_{X' \in \mathfrak{u}'_1} \Omega \circ \pi(s_{\mathbf{t}})(\varphi)(X') = |U_{\geq 2}| \sum_{X' \in \mathfrak{u}'_1} S_{\mathbf{t}} \circ \Omega(\varphi)(X') \\ &= c_{\mathbf{t}} |U_{\geq 2}| |\mathfrak{u}'_1|^{-1/2} \sum_{X' \in \mathfrak{u}'_1, X'' \in \mathfrak{u}''_1} \psi(\langle X'', X' \rangle) \Omega(\varphi)(Ad(s_{\mathbf{t}})^{-1}(X'')) \\ &= c_{\mathbf{t}} |U_{\geq 2}| |\mathfrak{u}'_1|^{1/2} \Omega(\varphi)(0) = c_{\mathbf{t}} |\mathfrak{u}'_1|^{-1/2} \mathcal{L}''(\varphi). \end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$(4) \quad \mathcal{L}' \circ \pi(s_{\mathbf{t}}) = c_{\mathbf{t}} |\mathfrak{u}'_1|^{-1/2} \mathcal{L}''.$$

Pour  $\ell, m \in \{1, \dots, a + b + 1\}$  tels que  $\ell < m$ , notons  $\mathbf{P}_{m,\ell}$  le sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}$  de Lévi :

$$\mathbf{M}_{m,\ell} = \mathbf{G}_{\mu_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{\ell-1}} \times \mathbf{G}_{\mu_{a+b}} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_m} \times \mathbf{G}_{\mu_{\ell}} \times \mathbf{G}_{\mu_{m-1}} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{\ell+1}}.$$

Notons  $\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{a+b}$  le découpage en intervalles associé à ce parabolique, c'est-à-dire que  $\mathbf{P}_{m,\ell}$  stabilise les sous-espaces engendrés par les vecteurs  $e_k$  pour  $k \in I_1$ , resp.  $k \in I_1 \cup I_2$  etc... Pour  $d = 1, \dots, a + b$ , écrivons  $I_d = \{k_d + 1, \dots, k_d + j_d\}$ . Pour tout  $j = 1, \dots, \mu_1$ , il y a  $\nu_j$  entiers  $d$  pour lesquels  $j_d \geq j$ . Écrivons cet ensemble d'entiers sous forme croissante  $d_{1,j} < \dots < d_{\nu_j,j}$ . On définit une bijection  $\xi_{m,\ell} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{I}$  de la façon suivante. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $d$  l'unique entier tel que  $k \in I_d$ . Écrivons  $k = k_d + j$ . Il existe un unique  $i \in \{1, \dots, \nu_j\}$  tel que  $d = d_{i,j}$ . Alors  $\xi_{m,\ell}(k) = (i, j)$ . On définit une matrice de permutation  $v_{m,\ell} \in G$  par la formule  $v_{m,\ell}(e_k) = e_{\xi_{m,\ell}^{-1} \circ \xi(k)}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Notons  $\eta_{m,\ell}$  le caractère de  $M_{m,\ell}$  qui, sur un facteur  $G_{\mu_i}$ , est trivial si  $\delta(i) \leq a$  et égal à  $\eta \circ \det$  si  $\delta(i) > a$ . On pose  $E_{m,\ell} = \text{Ind}_{P_{m,\ell}}^G(\mathbb{C}(\eta_{m,\ell}))$ , on note  $\pi_{m,\ell}$  la représentation de  $G$  dans ce module. Bien sûr,  $\pi_{m,\ell}$  est isomorphe à  $\pi$ . Définissons une forme linéaire  $\mathcal{L}'_{m,\ell}$  sur  $E_{m,\ell}$  par :

$$\mathcal{L}'_{m,\ell}(\varphi) = \sum_{x \in U'_{\geq 1}} \varphi(v_{m,\ell}x) \psi_Y(x)^{-1}.$$

Elle vérifie la relation  $\mathcal{L}'_{m,\ell} \circ \pi_{m,\ell}(x) = \psi_Y(x) \mathcal{L}'_{m,\ell}$  pour tout  $x \in U'_{\geq 1}$ . Montrons qu'elle est non nulle. Il en résultera que toute forme linéaire sur  $E_{m,\ell}$  vérifiant cette relation lui est proportionnelle. Soit  $\varphi_{m,\ell}$  l'élément de  $E_{m,\ell}$ , à support dans  $P_{m,\ell}v_{m,\ell}$ , tel que  $\varphi_{m,\ell}(v_{m,\ell}) = 1$ .

Pour  $x \in U'_{\geq 1} \cap v_{m,\ell}^{-1}P_{m,\ell}v_{m,\ell}$ , on a  $\varphi_{m,\ell}(v_{m,\ell}x) = 1$ . Montrons que  $\psi_Y$  est trivial sur cette intersection. Il suffit pour cela que  $Ad(v_{m,\ell})(Y)$  appartienne au radical nilpotent de l'algèbre de Lie de  $P_{m,\ell}$ . Ou encore que, pour tout  $d = 1, \dots, a+b$  et tout  $k \in I_d$ ,  $Ad(v_{m,\ell})(Y)(e_k)$  appartienne au sous-espace engendré par les  $e_{k'}$  pour  $k' \in I_1 \cup \dots \cup I_{d-1}$ . Pour de tels  $d$  et  $k$ , posons  $(i, j) = \xi_{m,\ell}(k)$ . Si  $i = 1$ ,  $Ad(v_{m,\ell})(Y)(e_k) = 0$ . Si  $i > 1$ ,  $Ad(v_{m,\ell})(Y)(e_k) = e_{k'}$  où  $\xi_{m,\ell}(k') = (i-1, j)$ . On a  $k' \in I_{d_{i-1,j}}$  et  $d_{i-1,j} < d_{i,j} = d$ . Cela démontre l'assertion. On en déduit :

$$(5) \quad \mathcal{L}'_{m,\ell}(\varphi_{m,\ell}) = |U'_{\geq 1} \cap v_{m,\ell}^{-1}P_{m,\ell}v_{m,\ell}|.$$

A fortiori,  $\mathcal{L}'_{m,\ell} \neq 0$ .

Remarquons que, pour  $(m, \ell) = (a+b+1, a+b-1)$ ,  $\mathbf{P}_{a+b+1, a+b-1} = \mathbf{P}$ ,  $v_{a+b+1, a+b-1} = 1$ ,  $E_{a+b+1, a+b-1} = E$  et  $\mathcal{L}'_{a+b+1, a+b-1} = \mathcal{L}'$ . Pour  $(m, \ell) = (2, 1)$ ,  $\mathbf{P}_{2,1} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})$ .

Posons  $\gamma = \theta s_{\mathbf{t}}$ . C'est un élément de  $G$  et on a  $\pi^+(s_{\mathbf{t}}) = \pi^+(\boldsymbol{\theta})\pi(\gamma)$ . Les définitions entraînent :

$$(6) \quad \pi^+(s_{\mathbf{t}}) = c\eta(-1)^N I(w) \circ \Theta \circ \pi(\gamma),$$

avec les notations du lemme 10. En particulier  $c > 0$  et  $N = \sum_{i=1, \dots, b} \frac{i^2-i}{2}$ . Posons :

$$c_1 = \eta(-1)^N \left( \prod_{i=1, \dots, a+b} \eta(-1)^{i\mu_i} \right) \left( \prod_{j=1, \dots, b} \eta(-1)^{(1+[\nu_j/2])(b+1-j)} \eta(t_j)^{b+1-j} \right).$$

On va prouver l'égalité :

$$(7) \quad \mathcal{L}'_{2,1} \circ \Theta \circ \pi(\gamma) = c_1 \mathcal{L}''.$$

Pour  $\varphi \in E$ , on a par définition :

$$\mathcal{L}'_{2,1} \circ \Theta \circ \pi(\gamma) = \sum_{x \in U'_{\geq 1}} \varphi(\boldsymbol{\theta}(v_{2,1}x)\gamma)\psi_Y(x)^{-1} = \sum_{x \in U'_{\geq 1}} \varphi(\theta v_{2,1}x s_{\mathbf{t}})\psi_Y(x)^{-1}.$$

Puisque  $Ad(s_{\mathbf{t}})$  échange  $U'_{\geq 1}$  et  $U''_{\geq 1}$  en échangeant les caractères  $\psi_Y$ , l'expression précédente est égale à :

$$\sum_{x \in U''_{\geq 1}} \varphi(\theta v_{2,1}x s_{\mathbf{t}})\psi_Y(x)^{-1}.$$

On va montrer que  $\theta v_{2,1} s_{\mathbf{t}}$  appartient à  $M$  et  $\eta_M(\theta v_{2,1} s_{\mathbf{t}}) = c_1$ . Le terme ci-dessus sera alors égal à  $c_1 \mathcal{L}''(\varphi)$ , d'où (7). Remarquons que  $\theta v_{2,1} s_{\mathbf{t}} = J^t v_{2,1}^{-1} \sigma_{\mathbf{t}}$ , en interprétant  $J$  comme un élément de  $Isom(V^*, V)$ . Introduisons les deux découpages  $\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{a+b}$  et  $\{1, \dots, n\} = I'_1 \sqcup \dots \sqcup I'_{a+b}$  associés respectivement à  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}_{2,1}$ . On a  $|I_d| = |I'_{a+b+1-d}|$  pour tout  $d = 1, \dots, a+b$ . Pour  $j = 1, \dots, \mu_1$ , introduisons les numérotations  $d_{1,j} < \dots < d_{\nu_j, j}$  et  $d'_{1,j} < \dots < d'_{\nu_j, j}$  associées à ces deux découpages. On a  $d_{i,j} = i$  tandis que  $d'_{i,j} = a+b+i-\nu_j$ . Soit  $(i, j) \in \mathcal{I}$ . On a  $\sigma_{\mathbf{t}}(e_{i,j}) = t_j(-1)^{1+i+[\nu_j/2]} e_{\nu_j+1-i, j}^*$ . Posons  $k' = \xi_{2,1}^{-1}(\nu_j+1-i, j)$ . Alors  $k' \in I'_{d'}$ , où  $d' = a+b+1-i$ . Plus précisément, si  $k'_d + 1$  est le premier terme de  $I'_{d'}$ , on a  $k' = k'_d + j$ . Et on a  ${}^t v_{2,1}^{-1}(e_{\nu_j+1-i, j}^*) = e_{k'}^*$ ,  $J(e_{k'}^*) = e_{n+1-k'}$ . On calcule  $n+1-k' = \xi^{-1}(i, \mu_i+1-j)$ . Finalement :

$$\theta v_{2,1} s_{\mathbf{t}}(e_{i,j}) = t_j(-1)^{1+i+[\nu_j/2]} e_{i, \mu_i+1-j}.$$

Conserver les indices  $i$  signifie appartenir à  $M$ . Le calcul de  $\eta_M(\theta v_{2,1} s_{\mathbf{t}})$  résulte de la formule ci-dessus, on le laisse au lecteur. Cela démontre (7).

Pour  $\ell, m \in \{1, \dots, a+b\}$  tels que  $\ell < m$ , notons  $w_{m,\ell}$  la matrice de permutation élémentaire telle que  $w_{m,\ell} \mathbf{M}_{m,\ell} w_{m,\ell}^{-1} = \mathbf{M}_{m+1,\ell} : w_{m,\ell}$  permute les blocs  $\mathbf{G}_{\mu_m}$  et  $\mathbf{G}_{\mu_\ell}$ . On définit l'opérateur d'entrelacement  $I(w_{m,\ell}) : E_{m,\ell} \rightarrow E_{m+1,\ell}$ . On a l'égalité :

$$w = w_{a+b, a+b-1} (w_{a+b, a+b-2} w_{a+b-1, a+b-2}) \dots (w_{a+b, 1} w_{a+b-1, 1} \dots w_{2, 1}),$$

dont on déduit :

$$(8) \quad I(w) = I(w_{a+b, a+b-1}) \dots I(w_{2,1}).$$

Fixons un couple  $(\ell, m)$ , notons  $\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{a+b}$  et  $\{1, \dots, n\} = \bar{I}_1 \sqcup \dots \sqcup \bar{I}_{a+b}$  les découpages associés respectivement à  $\mathbf{P}_{m+1, \ell}$  et  $\mathbf{P}_{m, \ell}$ . Ils ne diffèrent que par permutation de deux blocs. Plus précisément, posons  $d = a + b + \ell - m$ . Alors  $I_h = \bar{I}_h$  pour  $h \neq d, d+1$ . On a des égalités :

$$I_d = \{k_d + 1, \dots, k_d + \mu_\ell\}, \quad I_{d+1} = \{k_d + \mu_\ell + 1, \dots, k_d + \mu_\ell + \mu_m\},$$

$$\bar{I}_d = \{k_d + 1, \dots, k_d + \mu_m\}, \quad \bar{I}_{d+1} = \{k_d + \mu_m + 1, \dots, k_d + \mu_\ell + \mu_m\}.$$

On vérifie que  $\xi_{m, \ell} = \xi_{m+1, \ell}$  sur les blocs  $I_h = \bar{I}_h$  pour  $h \neq d, d+1$ . On calcule :

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi_{m+1, \ell}(k_d + j) &= \begin{cases} (\nu_j + m - \ell, j), & \text{si } j \in \{1, \dots, \mu_m\}, \\ (\ell, j), & \text{si } j \in \{\mu_m + 1, \dots, \mu_\ell\} \end{cases} \\ \xi_{m+1, \ell}(k_d + \mu_\ell + j) &= (\nu_j + m + 1 - \ell, j), & \text{si } j \in \{1, \dots, \mu_m\}, \\ \xi_{m, \ell}(k_d + j) &= (\nu_j + m - \ell, j), & \text{si } j \in \{1, \dots, \mu_m\}, \\ \xi_{m, \ell}(k_d + \mu_m + j) &= \begin{cases} (\nu_j + m + 1 - \ell, j), & \text{si } j \in \{1, \dots, \mu_m\}, \\ (\ell, j), & \text{si } j \in \{\mu_m + 1, \dots, \mu_\ell\} \end{cases} \end{aligned}.$$

Notons  $v$  la matrice de permutation telle que :

$$\begin{aligned} v(e_{k_d + \mu_m + j}) &= \begin{cases} e_{k_d + 2\mu_m + j}, & \text{si } j \in \{1, \dots, \mu_\ell - \mu_m\}, \\ e_{k_d + 2\mu_m - \mu_\ell + j}, & \text{si } j \in \{\mu_\ell - \mu_m + 1, \dots, \mu_\ell\}, \end{cases} \\ v(e_k) &= e_k \text{ pour } k \in \bar{I}_h, \quad h \neq d+1. \end{aligned}$$

On vérifie que  $v_{m, \ell} = vv_{m+1, \ell}$ . Remarquons que  $v \in M_{m, \ell}$ . Posons :

$$c_2(m, \ell) = \begin{cases} 1, & \text{si } \delta(\ell) \leq a, \\ \eta(-1)^{\mu_m(\mu_\ell - \mu_m)}, & \text{si } \delta(\ell) > a. \end{cases}$$

On vérifie que  $\eta_{m, \ell}(v) = c_2(m, \ell)$ .

Notons  $\mathbf{Q}$  le sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}$  de Lévi :

$$\mathbf{L} = \mathbf{G}_{\mu_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{\ell-1}} \times \mathbf{G}_{\mu_{a+b}} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{m+1}} \times \mathbf{G}_{\mu_m + \mu_\ell} \times \mathbf{G}_{\mu_{m-1}} \times \dots \times \mathbf{G}_{\mu_{\ell+1}}.$$

Les deux groupes  $\mathbf{P}_{m, \ell}$  et  $\mathbf{P}_{m+1, \ell}$  sont inclus dans  $\mathbf{Q}$  et  $w_{m, \ell}$  appartient au groupe de Weyl de  $\mathbf{L}$ . Plus précisément, notons  $\mathbf{R}$ , resp.  $\bar{\mathbf{R}}$ , le sous-groupe parabolique standard de  $\mathbf{G}_{\mu_m + \mu_\ell}$  de Lévi  $\mathbf{K} = \mathbf{G}_{\mu_\ell} \times \mathbf{G}_{\mu_m}$ , resp.  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{G}_{\mu_m} \times \mathbf{G}_{\mu_\ell}$ . Notons  $\eta_K$ , resp.  $\eta_{\bar{K}}$ , la restriction, en un sens évident, de  $\eta_{m+1, \ell}$  à  $K$ , resp. de  $\eta_{m, \ell}$  à  $\bar{K}$ . Posons  $\mathcal{E} = \text{Ind}_R^{G_{\mu_m + \mu_\ell}}(\mathbb{C}(\eta_K))$ ,  $\bar{\mathcal{E}} = \text{Ind}_{\bar{K}}^{G_{\mu_m + \mu_\ell}}(\mathbb{C}(\eta_{\bar{K}}))$ . L'espace  $\mathcal{E}$ , par exemple, s'identifie à  $\text{Ind}_{P_{m+1, \ell} \cap L}^L(\mathbb{C}(\eta_{m+1, \ell}))$ . On en déduit des identifications :

$$E_{m+1, \ell} = \text{Ind}_Q^G(\mathcal{E}), \quad E_{m, \ell} = \text{Ind}_Q^G(\bar{\mathcal{E}})$$

et  $I(w_{m, \ell})$  se déduit par functorialité de l'opérateur d'entrelacement, notons-le  $I^\sharp(w_{m, \ell})$ , de  $\bar{\mathcal{E}}$  dans  $\mathcal{E}$ .

Notons  $\mathfrak{g}^\sharp$  l'algèbre de Lie du bloc  $G_{\mu_m + \mu_\ell}$  de  $L$ , notons  $\mathfrak{g}^\flat$  son orthogonal dans  $\mathfrak{g}$  pour la forme  $(X, X') \mapsto \text{trace}(XX')$ . On a la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \text{Ad}(v_{m+1, \ell}^{-1})(\mathfrak{u}^\sharp) \oplus \text{Ad}(v_{m+1, \ell}^{-1})(\mathfrak{g}^\flat).$$

Conformément à cette décomposition, écrivons :

$$\mathfrak{u}_1^\sharp \oplus \mathfrak{u}_{\geq 2}^\sharp = \text{Ad}(v_{m+1, \ell}^{-1})(\mathfrak{u}^\sharp) \oplus \mathfrak{u}^\flat, \quad Y = \text{Ad}(v_{m+1, \ell}^{-1})(Y^\sharp) + Y^\flat,$$

posons :

$$U^\# = \{1 + X; X \in \mathfrak{u}^\#\}, \quad U^b = \{1 + X; X \in \mathfrak{u}^b\}.$$

Définissons le caractère  $\psi_{Y^\#}$  de  $U^\#$  par  $\psi_{Y^\#}(1 + X) = \psi \circ \text{trace}(XY^\#)$ . Pour  $\varphi \in E_{m+1,\ell}$ , on a l'égalité :

$$\mathcal{L}'_{m+1,\ell}(\varphi) = \sum_{x^\# \in U^\#, x^b \in U^b} \varphi(x^\# v_{m+1,\ell} x^b) \psi_{Y^\#}(x^\#)^{-1} \psi_Y(x^b)^{-1}.$$

Définissons la forme linéaire  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{E}$  par :

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum_{x^\# \in U^\#} \varphi(x^\#) \psi_{Y^\#}(x^\#)^{-1}.$$

En identifiant  $E_{m+1,\ell}$  à  $\text{Ind}_Q^G(\mathcal{E})$ , on a l'égalité :

$$(10) \quad \mathcal{L}'_{m+1,\ell}(\varphi) = \sum_{x^b \in U^b} \mathcal{L}(\varphi(v_{m+1,\ell} x^b)) \psi_Y(x^b)^{-1},$$

où maintenant  $\varphi$  appartient à  $\text{Ind}_Q^G(\mathcal{E})$ . Posons :

$$c_3(m, \ell) = \begin{cases} (-1)^{\mu_m}, & \text{si } \delta(\ell), \delta(m) \leq a, \\ \eta(-1)^{\mu_\ell \mu_m} (-1)^{\mu_m}, & \text{si } a < \delta(\ell), \delta(m), \\ \eta(-1)^{(\mu_\ell + 1)\mu_m} \gamma_\psi^{\mu_m}, & \text{si } \delta(m) \leq a < \delta(\ell), \\ \eta(-1)^{\mu_m} \gamma_\psi^{\mu_m}, & \text{si } \delta(\ell) \leq a < \delta(m). \end{cases}$$

On va prouver qu'il existe un réel  $c_4(m, \ell) > 0$  tel que :

$$(11) \quad \mathcal{L}'_{m+1,\ell} \circ I(w_{m,\ell}) = c_2(m, \ell) c_3(m, \ell) c_4(m, \ell) \mathcal{L}'_{m,\ell}.$$

Les formes linéaires  $\mathcal{L}'_{m+1,\ell} \circ I(w_{m,\ell})$  et  $\mathcal{L}'_{m,\ell}$  sur  $E_{m,\ell}$  vérifient la même relation de transformation par  $U'_{\geq 1}$ . Elles sont donc proportionnelles et il suffit de les comparer sur un élément particulier de  $\bar{E}_{m,\ell}$ . On choisit l'élément  $\varphi_{m,\ell}$ . Grâce à (5),  $\mathcal{L}'_{m,\ell}(\varphi_{m,\ell})$  est un réel  $> 0$ . Identifions  $E_{m,\ell}$  à  $\text{Ind}_Q^G(\bar{\mathcal{E}})$ . Notons  $\bar{\varphi}$  l'élément de  $\bar{\mathcal{E}}$  à support dans  $\bar{R}$  tel que  $\bar{\varphi}(1) = 1$ . Alors  $\varphi_{m,\ell}$  s'identifie à l'élément  $\bar{\varphi}$  de  $\text{Ind}_Q^G(\bar{\mathcal{E}})$  à support dans  $Qv_{m,\ell}$  et tel que  $\bar{\varphi}(v_{m,\ell}) = \bar{\varphi}$ . En se rappelant que  $v_{m,\ell} = vv_{m+1,\ell}$  avec  $v \in M_{m,\ell}$  et  $\eta_{m,\ell}(v) = c_2(m, \ell)$ , on peut aussi dire que  $\bar{\varphi}$  est à support dans  $Qv_{m+1,\ell}$  et vérifie  $\bar{\varphi}(v_{m+1,\ell}) = c_2(m, \ell) \bar{\varphi}$ . Identifions  $I(w_{m,\ell})(\varphi_{m,\ell})$  à un élément  $\varphi \in \text{Ind}_Q^G(\mathcal{E})$ . Alors  $\varphi$  est à support dans  $Qv_{m+1,\ell}$  et vérifie  $\varphi(v_{m+1,\ell}) = c_2(m, \ell) I^\#(w_{m,\ell})(\bar{\varphi})$ . Grâce à la formule (10), le même calcul qu'en (5) conduit à l'égalité :

$$\mathcal{L}'_{m+1,\ell} \circ I(w_{m,\ell})(\varphi_{m,\ell}) = |U^b \cap v_{m+1,\ell} Q v_{m+1,\ell}^{-1}| c_2(m, \ell) \mathcal{L} \circ I^\#(w_{m,\ell})(\bar{\varphi}),$$

et tout revient à calculer ce dernier terme.

Tout se passe maintenant dans  $G_{\mu_m + \mu_\ell}$ . Explicitons les différents objets. Soit  $k \in I_d \cup I_{d+1}$ , posons  $\xi_{m+1,\ell}(k) = (i, j)$ . Si  $i \neq 1$  et  $(i-1, j) \in \xi_{m+1,\ell}(I_d \cup I_{d+1})$ , on a  $Y^\#(e_k) = e_{\xi_{m+1,\ell}^{-1}(i-1,j)}$ . Sinon,  $Y^\#(e_k) = 0$ . Pour calculer  $\mathfrak{u}^\#$ , on calcule d'abord l'élément  $H^\#$  déduit de  $H$  comme  $Y^\#$  l'a été de  $Y$ . Avec les notations ci-dessus,  $H^\#(e_k) = (2i - \nu_j - 1)e_k$ . Soit de plus  $k' \in I_d \cup I_{d+1}$ , posons  $\xi_{m+1,\ell}(k') = (i', j')$ . La matrice élémentaire envoyant  $e_k$  sur  $e_{k'}$  appartient à  $\mathfrak{u}^\#$  si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $2i' - \nu_{j'} \geq 2i - \nu_j + 2$ ,
- $2i' - \nu_{j'} = 2i - \nu_j + 1$  et  $j' < j$ .

Grâce à (9), on en déduit les formules suivantes, où les décompositions des matrices sont relatives à la décomposition de  $I_d \cup I_{d+1}$  en  $\bar{I}_d \cup (I_d \cap \bar{I}_{d+1}) \cup I_{d+1}$  :

$$\bar{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \right\}, \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \right\},$$

$$w_{m,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^\sharp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$u^\sharp = \left\{ \begin{pmatrix} & ? & ? & ? \\ & ? & ? & ? \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ 0 & \ddots & \bullet & ? & ? \\ 0 & 0 & \bullet & & \end{pmatrix} \right\}.$$

Les ? sont des blocs non précisés. Soit  $X \in u^\sharp$ , notons  $Z = (z_{r,s})_{r,s=1,\dots,\mu_m}$  son bloc sud-ouest. Il est triangulaire supérieur. Posons  $x = 1 + X$ . On a  $\psi_{Y^\sharp}(x) = \psi(\sum_{r=1,\dots,\mu_m} z_{r,r})$ . La fonction  $I^\sharp(w_{m,\ell})(\bar{\phi})$  est à support dans  $Rw_{m,\ell}\bar{R}$ . Pour que  $x$  appartienne à ce support, il est nécessaire et suffisant que  $Z$  soit inversible, autrement dit que  $z_{r,r} \neq 0$  pour tout  $r$ . Dans ce cas, on peut écrire  $x = yw_{m,\ell}\bar{y}$ , où  $y$  appartient au radical unipotent de  $R$  et  $\bar{y} \in \bar{R}$  a pour premier bloc diagonal  $Z$  et vérifie bien sûr  $\det(\bar{y}) = \det(w_{m,\ell})^{-1} = (-1)^{\mu_\ell\mu_m}$ . On a alors  $I^\sharp(w_{m,\ell})(\bar{\phi})(x) = \eta_{\bar{K}}(\bar{y})$ . On calcule :

$$\eta_{\bar{K}}(\bar{y}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \delta(\ell), \delta(m) \leq a, \\ \eta(-1)^{\mu_\ell\mu_m}, & \text{si } a < \delta(\ell), \delta(m), \\ \eta(-1)^{\mu_\ell\mu_m} \eta(\prod_r z_{r,r}), & \text{si } \delta(m) \leq a < \delta(\ell), \\ \eta(\prod_r z_{r,r}), & \text{si } \delta(\ell) \leq a < \delta(m). \end{cases}$$

Notons  $\chi(z_{1,1}, \dots, z_{\mu_m, \mu_m})$  cette expression. On obtient que  $\mathcal{L} \circ I^\sharp(w_{m,\ell})(\bar{\phi})$  est un multiple  $> 0$  de :

$$\sum_{z_{1,1} \neq 0, \dots, z_{\mu_m, \mu_m} \neq 0} \chi(z_{1,1}, \dots, z_{\mu_m, \mu_m}) \psi(-\sum_r z_{r,r}).$$

On sait que :

$$\sum_{z \neq 0} \psi(-z) = -1, \quad \sum_{z \neq 0} \eta(z) \psi(-z) = q^{1/2} \eta(-1) \gamma_\psi.$$

Alors l'expression ci-dessus est un multiple  $> 0$  de  $c_3(m, \ell)$ . Cela prouve (11).

En utilisant (8) et (11), on obtient :

$$\mathcal{L}' \circ I(w) = c_5 c_6 \mathcal{L}'_{2,1},$$

où  $c_5 > 0$  et  $c_6$  est le produit des  $c_2(m, \ell) c_3(m, \ell)$  sur tous les couples  $(m, \ell)$  intervenant dans la décomposition (8). En utilisant ensuite (4), (6) et (7) et en se rappelant que  $c_t$  est de module 1, on obtient  $c_t = \eta(-1)^N c_1 c_6$ . Un calcul pénible mais élémentaire montre que ce terme est égal à celui de l'énoncé.  $\square$

## 12. Valeur d'une fonctionnelle de Whittaker

On conserve les mêmes hypothèses et notations. Posons :

$$d_t(\mu_1, \mu_2) = \sum_{x \in U_{\geq 2}} \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)(s_t x) \psi_Y(x)^{-1}.$$

Posons :

$$\gamma(h_1, h_2) = (-1)^{\alpha(a) + \alpha(b)} \eta(-1)^{\frac{(h_1^2 - h_2^2)(h_1 - |h_2| + 1)}{2} + s(h_2) \frac{h_2^2 + h_2}{2}}.$$

**Lemme.** *On a l'égalité :*

$$d_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \gamma(h_1, h_2) |U_{\geq 2}| \gamma_{\psi}^{h_1(h_1+1)/2} \prod_{j \in J(h_1, h_2)} \eta(t_j).$$

Preuve. Introduisons l'opérateur :

$$\Delta = \sum_{x \in U_{\geq 2}} \pi^+(s_{\mathbf{t}}x) \psi_Y(x)^{-1}$$

de  $E$ . Par définition,  $d_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  est la trace de la restriction de  $\Delta$  à  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Mais l'image de  $\Delta$  est contenue dans  $E_{\psi_Y} = E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)_{\psi_Y}$ . Donc  $d_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  est la trace de la restriction de  $\Delta$  à ce sous-espace. Sur celui-ci,  $\Delta$  agit comme  $|U_{\geq 2}| \pi^+(s_{\mathbf{t}})$ . D'où les égalités :

$$d_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = |U_{\geq 2}| \text{trace} \pi^+(s_{\mathbf{t}})|_{E_{\psi_Y}} = |U_{\geq 2}| \text{trace}(S_{\mathbf{t}}).$$

Grâce à 11(3),

$$\text{trace}(S_{\mathbf{t}}) = c_{\mathbf{t}} |u'_1|^{-1/2} \sum_{X \in u'_1} \psi(\langle Ad(s_{\mathbf{t}})(X), X \rangle).$$

Pour  $(j, \ell) \in \mathcal{J}$ , notons  $u'_1(j, \ell)$  le sous-espace de  $u'_1$  engendré par les éléments  $E'_{i;j,\ell}$  pour  $i = 1, \dots, \nu_{\ell}$ . Grâce aux égalités (1) et (2) du paragraphe précédent, on vérifie que les différents sous-espaces  $u'_1(j, \ell)$  sont orthogonaux pour la forme quadratique  $X \mapsto \langle Ad(s_{\mathbf{t}})(X), X \rangle$ . Restreinte à chacun de ces sous-espaces, cette forme est non dégénérée. Elle est déployée si  $\nu_{\ell}$  est pair. Si  $\nu_{\ell}$  est impair, son noyau anisotrope est la forme de rang 1 :  $x \mapsto t_j t_{\ell}^{-1} x^2$ . Le calcul usuel des constantes de Weil conduit à l'égalité :

$$|u'_1|^{-1/2} \sum_{X \in u'_1} \psi(\langle Ad(s_{\mathbf{t}})(X), X \rangle) = \gamma_{\psi}^{|\mathcal{J}'|} \prod_{(j,\ell) \in \mathcal{J}'} \eta(t_j t_{\ell}),$$

où  $\mathcal{J}' = \{(j, \ell) \in \mathcal{J}; \nu_{\ell} \text{ impair}\} = \{(j, \ell); j, \ell = 1, \dots, \mu_1, j < \ell, \nu_j \text{ pair}, \nu_{\ell} \text{ impair}\}$ . D'où l'égalité :

$$d_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = |U_{\geq 2}| c_{\mathbf{t}} \gamma_{\psi}^{|\mathcal{J}'|} \prod_{(j,\ell) \in \mathcal{J}'} \eta(t_j t_{\ell}).$$

En utilisant le lemme 11 et l'égalité  $\gamma_{\psi}^2 = \eta(-1)$ , le calcul conduit à l'égalité de l'énoncé.  $\square$

### 13. Fonctions quadratiques-unipotentes

Notons  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$  le sous-espace de  $\mathcal{C}(\tilde{G})$  engendré par les fonctions  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  pour  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$  (l'indice *qu* signifiant quadratique-unipotent).

**Lemme.** *Pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ , la fonction  $\phi(h_1, h_2)$  appartient à  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$ .*

Preuve. Notons  $\Pi^{\boldsymbol{\theta}}$  l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $G$  fixes par  $\boldsymbol{\theta}$ , ou plus exactement un ensemble de représentants de ces classes. Pour tout  $\pi \in \Pi^{\boldsymbol{\theta}}$ , fixons une extension  $\pi^+$  de  $\pi$  à  $G^+$  et notons  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+$  la restriction à  $\tilde{G}$  de son caractère. La famille  $(\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+)_{\pi \in \Pi^{\boldsymbol{\theta}}}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{C}(\tilde{G})$ . Notons  $\Pi_{qu}^{\boldsymbol{\theta}}$  le sous-ensemble  $\{\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2), (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)\}$  de  $\Pi^{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\Pi_{non\text{qu}}^{\boldsymbol{\theta}}$  son complémentaire. Il suffit de prouver que, pour  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$  et  $\pi \in \Pi_{non\text{qu}}^{\boldsymbol{\theta}}$ , les fonctions  $\phi(h_1, h_2)$  et  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+$  sont orthogonales.

A toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ , on sait associer une classe de conjugaison semi-simple dans le groupe dual de  $G$ , lequel n'est autre que  $G$  lui-même. Soit  $s$  un élément de cette classe, notons  $\mathbf{L}_s$  son centralisateur. C'est un sous-groupe de Lévi défini sur  $\mathbb{F}_q$  d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  qui, lui, n'est pas en général défini sur  $\mathbb{F}_q$ . On sait qu'il existe une unique représentation irréductible  $\pi'$  de  $L_s$ , dont la classe de conjugaison associée est la classe de conjugaison par  $L_s$  de  $s$ , telle que  $\pi = \pm R_{L_s}^G(\pi')$ . Plus précisément, si l'on introduit

la variété  $\mathbf{X}$  qui intervient dans la construction du foncteur  $R_{L_s}^G$  (et qui est une composante connexe de la variété  $\mathbf{X}^+$  définie au paragraphe 3), il existe un unique  $i \in \mathbb{N}$  tel que :

- si  $j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$ ,  $\pi'$  n'intervient pas dans le  $L$ -module  $H_c^j(\mathbf{X})$ ;
- en notant  $E'$  l'espace de  $\pi'$ , le  $G$ -module  $(H_c^i(\mathbf{X}) \otimes_{\mathbb{C}} E')^{L_s}$  est irréductible et isomorphe à  $\pi$ .

En fait, ces propriétés restent vraies si l'on remplace  $\mathbf{L}_s$  par un groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  défini sur  $\mathbb{F}_q$  et contenant  $\mathbf{L}_s$ .

**Remarque.** De telles propriétés sont vraies pour tout groupe réductif connexe mais la construction de  $\mathbf{L}_s$  est en général plus compliquée.

Appliquons cela à  $\pi \in \Pi^\theta$ . Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $s$ , notons  $V_\lambda \subseteq V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$  l'espace propre correspondant. Prenons pour  $\mathbf{L}$  l'ensemble des  $g \in \mathbf{G}$  qui conservent chaque espace  $V_\lambda$  pour  $\lambda \neq \pm 1$ , ainsi que  $V_1 \oplus V_{-1}$ . Parce que la classe de  $\pi$  est fixe par  $\theta$ , on vérifie qu'il existe un sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$ , en général pas défini sur  $\mathbb{F}_q$ , de sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$ , tel que :

- $\mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{P}) \cap \mathbf{N}_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{L}) \cap \tilde{\mathbf{G}} \neq \emptyset$ ;
- si  $\theta_L$  est un élément défini sur  $\mathbb{F}_q$  de cette intersection,  $\theta_L s \theta_L^{-1}$  est conjugué à  $s$  par un élément de  $L$ .

On peut introduire le groupe  $\mathbf{L}^+$ , la variété  $\mathbf{X}^+$  et l'homomorphisme  $R_{L^+}^{G^+}$  comme au paragraphe 3, la représentation  $(\pi', E')$  de  $L$  telle que  $\pi = \pm R_L^G(\pi')$  et l'entier  $i$  comme ci-dessus. L'unicité de  $\pi'$  entraîne qu'on peut la prolonger en une représentation  $\pi'^+$  de  $L^+$ . Pour  $j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$ ,  $(H_c^j(\mathbf{X}^+) \otimes_{\mathbb{C}} E')^{L^+} = \{0\}$ . Pour  $j = i$ , ce  $G^+$ -module est un prolongement de  $\pi$ . Quitte à changer de prolongement, on peut supposer que c'est  $\pi^+$ . Donc  $\text{trace}_{\tilde{\mathbf{G}}} \pi^+ = \pm R_{L^+}^{G^+}(\text{trace}_{\tilde{L}} \pi'^+)$ . Supposons de plus  $\pi \in \Pi_{non\,qu}^\theta$ . Par définition de cet ensemble, on a alors  $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$ . Il nous suffit donc de prouver que, pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$  et tout groupe  $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$  comme ci-dessus,  $\phi(h_1, h_2)$  est orthogonal à l'image de  $\mathcal{C}(\tilde{L})$  par  $R_{L^+}^{G^+}$ .

Lusztig a défini un ensemble  $\mathcal{A}^F$  formé de triplets  $\mathbf{a} = (\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathcal{E})$ , où  $\mathbf{L}$  est un groupe de Lévi vérifiant les conditions du paragraphe 3,  $\mathbf{S}$  est un sous-ensemble de  $\tilde{\mathbf{L}}$  invariant par conjugaison et  $\mathcal{E}$  est un système local cuspidal sur  $\mathbf{S}$ , ces données vérifiant certaines conditions, en particulier elles sont définies sur  $\mathbb{F}_q$ . A tout tel triplet  $\mathbf{a}$ , on associe une fonction  $\phi(\mathbf{a}) \in \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{G}})$ , bien définie à un scalaire près. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- pour  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{A}^F$ ,  $\phi(\mathbf{a})$  et  $\phi(\mathbf{a}')$  sont orthogonales si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}'$  ne sont pas conjugués ([L4] proposition 24.15) ;
- les fonctions  $\phi(\mathbf{a})$ , pour  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^F$ , engendrent  $\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{G}})$  ([L3] théorème 21.14) ;
- plus généralement, soit  $\mathbf{L}$  un Lévi comme ci-dessus ; alors les fonctions  $\phi(\mathbf{a})$ , pour  $\mathbf{a} = (\mathbf{L}', \mathbf{S}, \mathcal{E}) \in \mathcal{A}^F$  tel que  $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$ , engendrent  $R_{L^+}^{G^+}(\mathcal{C}(\tilde{L}))$ .

Or notre construction des fonctions  $\phi(h_1, h_2)$  pour  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ , n'est que l'explicitation de celle des  $\phi(\mathbf{a})$ , pour les  $\mathbf{a} = (\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathcal{E})$  tels que  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ . Les propriétés ci-dessus entraînent qu'elles sont orthogonales à  $R_{L^+}^{G^+}(\mathcal{C}(\tilde{L}))$  si  $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$ . Cela achève la preuve.  $\square$

#### 14. Représentations et induction de Deligne-Lusztig : premières propriétés

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(m)$  paramètre les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_m$ . On note  $\mu \mapsto \sigma(\mu)$  ce paramétrage. On fixe un élément  $w(m)$  de  $\mathfrak{S}_m$  dans la classe de conjugaison paramétrée par la partition  $(m)$ . Soient  $m, d \in \mathbb{N}$ . Pour  $w \in \mathfrak{S}_m$ , on note  $w(d) \times w$  l'image de  $(w(d), w)$  par l'injection naturelle de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m$  dans  $\mathfrak{S}_{m+d}$ . Pour  $\mu \in \mathcal{P}(m+d)$  et  $\mu' \in \mathcal{P}(m)$ , on pose :

$$[\mu : w(d) \times \mu'] = |\mathfrak{S}_m|^{-1} \sum_{w \in \mathfrak{S}_m} \text{trace } \sigma(\mu)(w(d) \times w) \text{trace } \sigma(\mu')(w).$$

C'est un entier.

Soient maintenant  $d, n' \in \mathbb{N}$  tels que  $2d + n' = n$  et soit  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{P}_2(n')$ . On pose  $n'_j = S(\mu_j)$  pour  $j = 1, 2$ .

**Lemme.** (i) Pour  $j = 1, 2$ , il existe  $\varphi_j \in \mathcal{C}(\tilde{G})$  et, pour tout  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d + n'_j)$ , il existe  $c_j(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$(a) \quad R_{d,j}^-(\text{trace}_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \varphi_j + \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_j)} c_j(\boldsymbol{\mu}) \begin{cases} \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2), & \text{si } j = 1 \\ \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}), & \text{si } j = 2; \end{cases}$$

(b) pour tout  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d + n'_j)$ ,  $c_j(\boldsymbol{\mu}) \equiv [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_j] \pmod{2\mathbb{Z}}$  et  $\varphi_j$  est orthogonale à  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$  si  $j = 1$ , à  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu})$  si  $j = 2$ .

(ii) Pour  $j = 1, 2$ , on a l'égalité :

$$R_{d,j}^+(\text{trace}_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_j)} [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_j] \begin{cases} \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2), & \text{si } j = 1 \\ \eta(-1)^d \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}), & \text{si } j = 2. \end{cases}$$

Preuve. Les assertions pour  $j = 2$  se déduisent des mêmes assertions pour  $j = 1$  et du lemme 4. On suppose  $j = 1$ . Reprenons les constructions et notations du paragraphe 3. La fonction  $R_{d,1}^-(\text{trace}_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$  est la restriction à  $\tilde{G}$  de la trace de la représentation virtuelle de  $G^+$  dans le module  $R_{L^+}^{G^+}(E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$ , où  $L = A^\times \times G_{n'} = \mathbb{F}_{q^{2d}}^\times \times G_{n'}$ . Notons  $\pi^+$  cette représentation virtuelle. D'après [DM] corollaire 2.4, la restriction  $(\pi^+)|_G$  est l'image de  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  par le foncteur  $R_L^G$ . Introduisons le Lévi intermédiaire  $M = G_{2d} \times G_{n'}$ . On sait bien que :

$$R_{A^\times}^{G_{2d}}(1) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(2d)} \text{trace } \sigma(\boldsymbol{\lambda})(w(2d)) \pi(\boldsymbol{\lambda}).$$

Alors :

$$R_L^G(\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(2d)} \text{trace } \sigma(\boldsymbol{\lambda})(w(2d)) R_M^G(\pi(\boldsymbol{\lambda}) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)).$$

On a aussi, pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(2d)$  :

$$R_M^G(\pi(\boldsymbol{\lambda}) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} [\text{Res } \sigma(\boldsymbol{\mu}) : \sigma(\boldsymbol{\lambda}) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_1)] \pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2),$$

où  $[\text{Res } \sigma(\boldsymbol{\mu}) : \sigma(\boldsymbol{\lambda}) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_1)]$  est la multiplicité de  $\sigma(\boldsymbol{\lambda}) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_1)$  dans la restriction de  $\sigma(\boldsymbol{\mu})$  à  $\mathfrak{S}_{2d} \times \mathfrak{S}_{n'}$ . On obtient alors :

$$(\pi^+)|_G = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1] \pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2).$$

Pour tout  $\boldsymbol{\mu}$ , on a fixé le prolongement  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$  de  $\pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$  à  $G^+$ . Notons  $\pi^-(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$  l'autre prolongement. Ecrivons :

$$\pi^+ = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} (c_\mu^+ \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2) + c_\mu^- \pi^-(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)) + \Pi^+,$$

en regroupant dans  $\Pi^+$  toutes les composantes de  $\pi^+$  qui ne prolongent aucune représentation  $\pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Les coefficients  $c_\mu^+$  et  $c_\mu^-$  appartiennent à  $\mathbb{Z}$ . Le résultat ci-dessus entraîne que  $c_\mu^+ + c_\mu^- = [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1]$ . Posons  $\varphi = \text{trace}_{\tilde{G}} \Pi^+$  et remarquons que, pour tout  $\boldsymbol{\mu}$ , on a l'égalité  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^-(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2) = -\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$ . On obtient alors :

$$R_{d,1}^-(\text{trace}_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \varphi + \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} (c_\mu^+ - c_\mu^-) \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2).$$

Cette formule vérifie les conditions du (i) de l'énoncé.

Considérons maintenant l'homomorphisme  $R_{d,1}^+$ . On va d'abord supposer  $n' = 0$ . On a  $L = \mathbb{F}_{q^d}^\times \times \mathbb{F}_{q^d}^\times$ , que l'on plonge dans le Lévi  $M = G_d \times G_d$ . L'élément  $\theta_L$  que l'on a construit au paragraphe 3 normalise  $M$ . On note  $\theta_M = \theta_L$  et  $M^+$  le groupe engendré par  $M$  et  $\theta_M$ . On définit la représentation  $R_{L^+}^{M^+}(1)$  de  $M^+$ , on va calculer la restriction à  $\tilde{M}$  de sa trace. Notons  $\mathbf{T}$  le sous-tore de  $\mathbf{G}_d$  tel que  $T = \mathbb{F}_{q^d}^\times$ , fixons un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{G}_d$  contenant  $\mathbf{T}$ , notons  $\mathbf{N}$  son radical unipotent. Puisque l'automorphisme  $\theta_M = Ad(\theta_M)$  échange les deux copies de  $\mathbf{G}_d$ , on peut supposer que  $\theta_M(x_1, x_2) = (\theta_d(x_2), \theta_d(x_1))$  pour  $x_1, x_2 \in G_d$ . Posons  $\mathbf{U} = \mathbf{N} \times \theta_d(\mathbf{N})$ . Introduisons la variété :

$$\mathbf{X}^+ = \{x(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})) \in \mathbf{M}^+ / (\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})); x^{-1}F(x) \in F(\mathbf{U})\}$$

et sa composante neutre :

$$\mathbf{X} = \{x(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})) \in \mathbf{M} / (\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})); x^{-1}F(x) \in F(\mathbf{U})\}.$$

On a l'égalité  $\mathbf{X}^+ = \mathbf{X} \sqcup \mathbf{X}\theta_M$ . On en déduit que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , les espaces d'invariants  $H_c^i(\mathbf{X}^+)^{L^+}$  et  $H_c^i(\mathbf{X})^L$  sont isomorphes. Modulo cet isomorphisme, le groupe  $M^+$  agit sur  $H_c^i(\mathbf{X})^L$  : le groupe  $M$  agit par l'action naturelle ;  $\theta_M$  agit par l'automorphisme déduit par functorialité de  $\theta_M$ . Pour simplifier, on note encore  $\theta_M$  cet automorphisme. On adopte des simplifications d'écriture analogues dans la suite. Posons :

$$\mathbf{Y} = \{x(\mathbf{N} \cap F(\mathbf{N})) \in \mathbf{G}_d / (\mathbf{N} \cap F(\mathbf{N})); x^{-1}F(x) \in F(\mathbf{N})\}.$$

On a  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \times \theta_d(\mathbf{Y})$ . D'après la formule de Künneth,

$$H_c^i(\mathbf{X}) = \bigoplus_{j,k;j+k=i} H_c^j(\mathbf{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} H_c^k(\theta_d(\mathbf{Y})) \simeq \bigoplus_{j,k;j+k=i} H_c^j(\mathbf{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} H_c^k(\mathbf{Y}).$$

On en déduit :

$$H_c^i(\mathbf{X})^L \simeq \bigoplus_{j,k;j+k=i} H_c^j(\mathbf{Y})^T \otimes_{\mathbb{C}} H_c^k(\mathbf{Y})^T.$$

Le groupe  $M^+$  agit sur l'espace de droite de la façon suivante. Soit  $(x_1, x_2) \in M$ . Cet élément agit sur  $H_c^j(\mathbf{Y})^T \otimes_{\mathbb{C}} H_c^k(\mathbf{Y})^T$  par l'action naturelle de  $x_1$  sur le premier facteur et l'action naturelle de  $\theta_d(x_2)$  sur le second. L'élément  $\theta_M$  envoie un élément  $v_1 \otimes v_2$  de  $H_c^j(\mathbf{Y})^T \otimes_{\mathbb{C}} H_c^k(\mathbf{Y})^T$  sur l'élément  $(-1)^{jk} v_2 \otimes v_1$  de  $H_c^k(\mathbf{Y})^T \otimes_{\mathbb{C}} H_c^j(\mathbf{Y})^T$ , le signe intervenant de la façon habituelle dans la formule de Künneth. Notons  $Z^j$  l'espace  $H_c^j(\mathbf{Y})^T$  muni de sa structure naturelle de  $G_d$ -module et  $\theta_d(Z^j)$  le même espace muni de la structure de  $G_d$ -module tordue par  $\theta_d$ . Si  $j \neq k$ , les espaces  $Z^j \otimes_{\mathbb{C}} \theta_d(Z^k)$  et  $Z^k \otimes_{\mathbb{C}} \theta_d(Z^j)$  sont échangés par  $\theta_M$ , il ne contribuent pas à la restriction à  $\tilde{M}$  de la trace de notre  $M^+$ -module. On peut les négliger. Alors  $H_c^i(\mathbf{X})^L$  devient négligeable si  $i$  est impair. Si  $i$  est pair, il est équivalent à  $Z^{i/2} \otimes_{\mathbb{C}} \theta_d(Z^{i/2})$  et le signe intervenant ci-dessus est  $(-1)^{i/2}$ . Notre module virtuel de départ  $\sum_i (-1)^i H_c^i(\mathbf{X}^+)^{L^+}$  est donc équivalent à :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i Z^i \otimes_{\mathbb{C}} \theta_d(Z^i),$$

où maintenant  $\theta_M$  agit simplement par  $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ .

Revenons au cas général où  $n'$  n'est plus supposé nul. Le Lévi  $M$  est maintenant  $G_d \times G_{n'} \times G_d$ . Un raisonnement analogue montre que le module virtuel  $R_{L^+}^{M^+}(E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$  est équivalent à :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \theta_d(Z^i),$$

où  $\theta_M$  agit par l'opérateur  $A_M : v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \mapsto v_3 \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(\theta_{n'})(v_2) \otimes v_1$ . Puisque  $\mathbf{M}$  est le Lévi d'un sous-groupe parabolique standard  $\mathbf{Q}$  défini sur  $\mathbb{F}_q$  et stable par  $\theta$ , on obtient le module  $R_{L^+}^{G^+}(E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$ , ou plus exactement un module qui a même trace sur  $\tilde{G}$ , par induction

à partir du précédent. Pour tout  $i$ , notons  $(\pi^i, E^i)$  la représentation induite de  $Q$  à  $G$  de  $Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i)$ . On prolonge  $\pi^i$  en une représentation  $\pi^{i,+}$  de  $G^+$  par :

$$(\pi^{i,+}(\theta)(f))(g) = A_M \circ f(\boldsymbol{\theta}(g)),$$

pour  $f \in E^i$  et  $g \in G$ . Alors  $R_{L^+}^{G^+}(E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$  est équivalent à  $\sum_{i \geq 0} (-1)^i E^i$ .

Supposons d'abord  $\boldsymbol{\mu}_2 = \emptyset$ . On sait que la représentation de  $G_d$  dans  $Z^i$  est somme de représentations irréductibles unipotentes. Il en est donc de même de la représentation de  $G$  dans  $E^i$ . On en déduit une égalité :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \pi^{i,+} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n)} (c^+(\boldsymbol{\mu})\pi^+(\boldsymbol{\mu}) + c^-(\boldsymbol{\mu})\pi^-(\boldsymbol{\mu})),$$

avec des constantes  $c^+(\boldsymbol{\mu}), c^-(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{Z}$  (la notation  $\pi^-(\boldsymbol{\mu})$  est similaire à celle introduite plus haut). On a alors l'égalité :

$$(1) \quad R_{d,1}^+(trace_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1)) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n)} (c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}).$$

Il nous reste à calculer les nombres  $c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})$ . Pour cela, on identifie nos représentations de  $G$  aux représentations de l'algèbre  $\mathcal{H}$  dans les sous-espaces d'éléments invariants par  $B$ . Notons  $\zeta^i$  la représentation de  $\mathcal{H}_d$  dans  $Z^{i,B_d}$ , posons  $\mathfrak{S}^M = \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{n'} \times \mathfrak{S}_d$  et identifions ce groupe au sous-groupe évident de  $\mathfrak{S}_n$ . L'espace  $E^{i,B}$  s'identifie à celui des fonctions  $f : \mathcal{H} \rightarrow Z^{i,B_d} \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1)^{B_{n'}} \otimes_{\mathbb{C}} Z^{i,B_d}$  telles que, pour  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathfrak{S}^M$  et  $h \in \mathcal{H}$ , on ait :

$$f(T_w h) = (\zeta^i(T_{w_1}) \otimes \pi(\boldsymbol{\mu}_1)(T_{w_2}) \otimes \zeta^i(T_{w_d, max}^{-1} T_{w_3} T_{w_d, max})) \circ f(h).$$

L'algèbre  $\mathcal{H}$  agit par translations à droite et  $\pi^{i,+}(\theta)$  devient l'opérateur :

$$(\pi^{i,+}(\theta)(f))(h) = A_M \circ f(T_{w_n, max}^{-1} h T_{w_n, max}).$$

Pour tout  $w \in \mathfrak{S}_n$ , posons  $T'_w = q^{-l(w)} T_{w^{-1}}$ , où  $l(w)$  est la longueur de  $w$ . Soient  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n)$  et  $(r, R)$  une représentation de  $\mathcal{H}$ . On sait que l'opérateur  $\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} trace \pi(\boldsymbol{\mu})(T'_w) r(T_w)$  est proportionnel à la projection sur la partie  $\pi(\boldsymbol{\mu})$ -isotypique de  $R$  (cf. [CR] 9.17, 9.19). D'autre part, d'après notre normalisation de la représentation  $\pi^+(\boldsymbol{\mu})$ , on sait que l'opérateur  $\pi^+(\boldsymbol{\mu})(\theta) \pi(\boldsymbol{\mu})(T_{w_n, max})$  agit sur  $E(\boldsymbol{\mu})^B$  par multiplication par  $q^{m/2}$  pour un certain entier  $m$ . Alors  $\pi^-(\boldsymbol{\mu})(\theta) \pi(\boldsymbol{\mu})(T_{w_n, max})$  agit par multiplication par  $-q^{m/2}$ . Il en résulte l'égalité :

$$(2) \quad \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} trace \pi(\boldsymbol{\mu})(T'_w) trace(\pi^{i,+}(\theta) \pi^i(T_{w_n, max} T_w)) = q^{m/2} (c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})) \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} trace \pi(\boldsymbol{\mu})(T'_w) trace \pi(\boldsymbol{\mu})(T_w).$$

La dernière somme ci-dessus est non nulle : c'est la trace d'un projecteur non nul. Cette formule calcule ainsi  $c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})$  comme rapport de deux termes. Or ceux-ci sont des polynômes en  $q^{1/2}, q^{-1/2}$ , et la formule reste valable si on remplace  $q$  par une puissance  $q^r$  pour  $r$  entier  $\geq 1$ . On ne sait pas a priori que  $c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})$  est indépendant de  $q$  mais :

(3) l'entier  $|c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})|$  est borné par un nombre indépendant de  $q$ .

En effet, d'après (1), cette propriété résulte de la suivante : la norme de l'homomorphisme  $R_{d,1}^+$  est bornée par un nombre indépendant de  $q$ . Pour prouver celle-ci, il suffit d'exprimer cet homomorphisme dans les bases  $(\phi(\mathbf{a}))_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{n'}^F, \text{ mod conjugaison}}$  de  $\mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})$  et  $(\phi(\mathbf{a}))_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^F, \text{ mod conjugaison}}$  de  $\mathcal{C}(\tilde{G})$  introduites dans le paragraphe précédent. Il envoie un élément de la première base sur

un élément de la seconde, multiplié par une racine de l'unité. L'assertion résulte alors du calcul des normes des éléments de ces bases ([L4] proposition 24.16).

On a donc une fraction rationnelle qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs en un nombre infini de points. Cette fraction rationnelle est donc constante. On peut y remplacer  $q^{1/2}$  par 1. Les représentations des algèbres de Hecke deviennent des représentations de groupes symétriques : pour tout  $r \in \mathbb{N}$  et toute partition  $\lambda \in \mathcal{P}(r)$ ,  $\pi(\lambda)$  devient  $\sigma(\lambda)$  ; on note  $\rho^i$ , resp.  $\sigma^i$ , la représentation de  $\mathfrak{S}_d$ , resp.  $\mathfrak{S}_n$ , qui correspond à  $\zeta^i$ , resp.  $\pi^i$ . On note leurs espaces respectivement  $E(\lambda)_1$ ,  $Z_1^i$ ,  $E_1^i$ . Il résulte de notre normalisation de  $\pi^+(\lambda)$  que l'opérateur  $\pi^+(\lambda)(\theta_r)$  devient  $\sigma(\lambda)(w_{r,max})$ . L'espace  $E_1^i$  est celui des fonctions  $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow Z_1^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\mu_1)_1 \otimes_{\mathbb{C}} Z_1^i$  telles que  $f(wu) = (\rho^i(w_1) \otimes \sigma(\mu_1)(w_2) \otimes \rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max}))(f(u))$  pour tout  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathfrak{S}^M$  et tout  $u \in \mathfrak{S}_n$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  y agit par translations à droite. L'opérateur  $\pi^{i,+}(\theta)$  devient l'opérateur  $\sigma^i(\theta)$  défini par :

$$(\sigma^i(\theta)f)(w) = B_M \circ f(w_{n,max}w_{n,max})$$

où  $B_M(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_3 \otimes \sigma^i(\mu_1)(w_{n',max})(v_2) \otimes v_1$ .

L'égalité (2) devient :

$$(4) \quad \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{trace } \sigma(\mu)(w^{-1}) \text{trace } (\sigma^i(\theta) \sigma^i(w_{n,max}w)) = |\mathfrak{S}_n| (c^+(\mu) - c^-(\mu)).$$

Fixons  $i \in \mathbb{N}$ , un système de représentants  $S$  de  $\mathfrak{S}^M \setminus \mathfrak{S}_n$  et des bases  $B$  de  $Z_1^i$  et  $B'$  de  $E(\mu_1)_1$ . Pour tout  $(s, b_1, b_2, b_3) \in S \times B \times B' \times B$ , notons  $f_{s,b_1,b_2,b_3}$  l'élément de  $E_1^i$  à support dans  $\mathfrak{S}^M s$ , qui vaut  $b_1 \otimes b_2 \otimes b_3$  au point  $s$ . Ces fonctions forment une base de  $E_1^i$ . Notons  $\check{B}$  et  $\check{B}'$  les bases duales de  $B$  et  $B'$ . Pour tout endomorphisme  $D$  de  $E_1^i$ , on a l'égalité :

$$\text{trace}(D) = \sum_{(s,b_1,b_2,b_3) \in S \times B \times B' \times B} \langle \check{b}_1 \otimes \check{b}_2 \otimes \check{b}_3, D(f_{s,b_1,b_2,b_3})(s) \rangle .$$

Soit  $w \in \mathfrak{S}_n$ . On a l'égalité :

$$(\sigma^i(\theta) \sigma^i(w_{n,max}w) f_{s,b_1,b_2,b_3})(s) = B_M \circ f_{s,b_1,b_2,b_3}(w_{n,max}sw).$$

Si  $w_{n,max}sws^{-1} \notin \mathfrak{S}^M$ , ceci est nul. Si  $w_{n,max}sws^{-1} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathfrak{S}^M$ , ce terme vaut :

$$\rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max})(b_3) \otimes \sigma(\mu_1)(w_{n',max}w_2)(b_2) \otimes \rho^i(w_1)(b_1).$$

On a les égalités :

$$\sum_{b_2 \in B'} \langle \check{b}_2, \sigma(\mu_1)(w_{n',max}w_2)(b_2) \rangle = \text{trace } \sigma(\mu_1)(w_{n',max}w_2),$$

$$\sum_{b_1, b_3 \in B} \langle \check{b}_1, \rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max})(b_3) \rangle \langle \check{b}_3, \rho^i(w_1)(b_1) \rangle = \text{trace } \rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max}w_1).$$

Posons  $v = (1, w_{n',max}, 1) \in \mathfrak{S}^M$ . Des formules ci-dessus et de quelques changements de variables résulte l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{trace}(\sigma^i(\theta) \sigma^i(w_{n,max}w)) &= \\ \sum_{w'=(w_1,w_2,w_3) \in \mathfrak{S}^M} \sum_{s \in S, w_{n,max}sws^{-1}=vw'} &\text{trace } \rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max}w_1) \text{trace } \sigma(\mu_1)(w_2). \end{aligned}$$

Le membre de gauche de (4) est égal à :

$$\sum_{w=(w_1,w_2,w_3) \in \mathfrak{S}^M} \sum_{s \in S} \text{trace } \sigma(\mu)(s^{-1}w^{-1}vw_{n,max}s) \text{trace } \sigma(\mu_1)(w_2) \times \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{trace } \rho^i(w_{d,max}w_3w_{d,max}w_1).$$

Remarquons qu'en posant  $w' = (w_{d,max}w_3w_{d,max}w_1, w_{n',max}w_2, 1)$ ,  $u = (1, 1, w_3)$ , on a l'égalité :  $s^{-1}w^{-1}vw_{n,max}s = s^{-1}u^{-1}w'^{-1}w_{n,max}us$ . Puisque  $trace \sigma(\boldsymbol{\mu})$  est invariante par conjugaison, on peut remplacer  $trace \sigma(\boldsymbol{\mu})(s^{-1}w^{-1}vw_{n,max}s)$  par  $trace \sigma(\boldsymbol{\mu})(w'^{-1}w_{n,max})$ . Le terme que l'on somme ci-dessus devient indépendant de  $s$  et ne dépend plus de  $w_1, w_3$  que par le produit  $w_{d,max}w_3w_{d,max}w_1$ . La somme se simplifie en :

$$|S||\mathfrak{S}_d| \sum_{w_1 \in \mathfrak{S}_d, w_2 \in \mathfrak{S}_{n'}} trace \sigma(\boldsymbol{\mu})(w^{-1}w_{n,max}) trace \sigma(\boldsymbol{\mu}_1)(w_2) \sum_{i \geq 0} (-1)^i trace \rho^i(w_1),$$

où on a posé  $w = (w_1, w_{n',max}w_2, 1)$ . Rappelons que  $\rho^i$  se déduit de la représentation de  $G_d$  dans  $H_c^i(\mathbf{Y})^T$ . Notons  $\mathcal{O}$  la classe de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_d$  paramétrée par la partition  $(d)$  et  $\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$  sa fonction caractéristique. Il est connu que  $\sum_{i \geq 0} (-1)^i trace \rho^i$  est égal à  $|\mathfrak{S}_d| |\mathcal{O}|^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ . Mais, pour  $w_1 \in \mathcal{O}$ , on vérifie que  $w_{n,max}w$  (avec les notations ci-dessus) est conjugué à l'élément que l'on a noté  $w(2d) \times w_2$ . L'expression précédente devient :

$$|S||\mathfrak{S}_d|^2 \sum_{w_2 \in \mathfrak{S}_{n'}} trace \sigma(\boldsymbol{\mu})(w(2d) \times w_2) trace \sigma(\boldsymbol{\mu}_1)(w_2).$$

Puisque  $|S| = |\mathfrak{S}_n| |\mathfrak{S}_d|^{-2} |\mathfrak{S}_{n'}|^{-1}$ , ceci n'est autre que  $|\mathfrak{S}_n| [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1]$ . Alors (4) devient  $c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu}) = [\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1]$  et l'égalité (1) démontre le (ii) de l'énoncé.

On a supposé  $\boldsymbol{\mu}_2 = \emptyset$ . Passons au cas général en levant cette hypothèse. Introduisons les sous-groupes paraboliques standard  $\mathbf{R}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  et  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  de  $\mathbf{G}$ , de sous-groupes de Lévi respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{G}_d \times \mathbf{G}_{n'_1} \times \mathbf{G}_{n'_2} \times \mathbf{G}_d, & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{G}_d \times \mathbf{G}_{n'_2} \times \mathbf{G}_{n'_1} \times \mathbf{G}_d, \\ \mathbf{H}_3 &= \mathbf{G}_d \times \mathbf{G}_{n'_1} \times \mathbf{G}_d \times \mathbf{G}_{n'_2}, & \mathbf{H}_4 &= \mathbf{G}_{n'_2} \times \mathbf{G}_d \times \mathbf{G}_{n'_1} \times \mathbf{G}_d, \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{G}_{2d+n'_1} \times \mathbf{G}_{n'_2}, & \mathbf{K}_2 &= \mathbf{G}_{n'_2} \times \mathbf{G}_{2d+n'_1}. \end{aligned}$$

Pour  $i, j = 1, \dots, 4$ , on note  $w_{i,j}$  la matrice de permutation évidente telle que  $w_{i,j} \mathbf{H}_j w_{i,j}^{-1} = \mathbf{H}_i$ . Par exemple, pour  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbf{H}_1$ , on a  $w_{2,1} h w_{2,1}^{-1} = (h_1, h_3, h_2, h_4)$ . On note  $w_K$  la matrice analogue telle que  $w_K \mathbf{K}_2 w_K^{-1} = \mathbf{K}_1$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Le module  $E^i$  est isomorphe à  $Ind_{R_1}^G(Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i))$ . L'opérateur  $\pi^{i,+}(\theta)$  est le composé des opérateurs suivants :

-  $\Theta : Ind_{R_1}^G(Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i)) \rightarrow Ind_{R_2}^G(\boldsymbol{\theta}_d(Z^i) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} Z^i)$  défini par  $\Theta(\varphi)(g) = B \circ \varphi \circ \boldsymbol{\theta}(g)$ , où  $B(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = v_4 \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta}_{n'_2})(v_3) \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1)(\boldsymbol{\theta}_{n'_1})(v_2) \otimes v_1$  ;

- l'opérateur d'entrelacement  $I(w_{1,2})$  ;

- la multiplication par un réel  $> 0$ .

Par l'isomorphisme  $I(w_{3,1})$ ,  $E^i$  est encore isomorphe à  $Ind_{R_3}^G(Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2))$ . L'opérateur  $\pi^{i,+}(\theta)$  devient le composé des opérateurs :

-  $\Theta' : Ind_{R_3}^G(Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2)) \rightarrow Ind_{R_4}^G(E(\boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} Z^i)$  défini par  $\Theta'(\varphi)(g) = B' \circ \varphi \circ \boldsymbol{\theta}(g)$ , où  $B'(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\theta}_{n'_2})(v_4) \otimes v_3 \otimes \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1)(\boldsymbol{\theta}_{n'_1})(v_2) \otimes v_1$  ;

- l'opérateur d'entrelacement  $I(w_{3,4})$  ;

- la multiplication par un réel  $> 0$ .

Notons  $(\pi_{\sharp}^i, E_{\sharp}^i)$  la représentation de  $G_{2d+n'_1}$  analogue de  $(\pi^i, E^i)$  quand on remplace  $\boldsymbol{\mu}_2$  par  $\emptyset$ . On a l'isomorphisme :

$$Ind_{R_3}^G(Z^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\theta}_d(Z^i) \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2)) \simeq Ind_{S_1}^G(E_{\sharp}^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2)).$$

Donc  $E^i$  s'identifie à ce dernier module, l'opérateur  $\pi^{i,+}(\theta)$  devenant le composé des opérateurs suivants :

- $\Theta'' : \text{Ind}_{S_1}^G(E_{\sharp}^i \otimes_{\mathbb{C}} E(\boldsymbol{\mu}_2)) \rightarrow \text{Ind}_{S_2}^G(E(\boldsymbol{\mu}_2) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\sharp}^i)$  défini par  $\Theta''(\varphi)(g) = B'' \circ \varphi \circ \boldsymbol{\theta}(g)$ , où  $B''(v_1 \otimes v_2) = \pi^+(\boldsymbol{\mu}_2)(\theta_{n'_2})(v_2) \otimes \pi_{\sharp}^{i,+}(\theta_{2d+n'_1})(v_1)$ ;
- l'opérateur d'entrelacement  $I(w_K)$ ;
- la multiplication par un réel  $> 0$ .

Remarquons que, si on remplace  $(\pi_{\sharp}^i, E_{\sharp}^i)$  par une représentation  $(\pi(\boldsymbol{\mu}), E(\boldsymbol{\mu}))$  où  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)$ , la construction ci-dessus est justement celle de  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Si on a une égalité :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \pi_{\sharp}^{i,+} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} (c^+(\boldsymbol{\mu})\pi^+(\boldsymbol{\mu}) + c^-(\boldsymbol{\mu})\pi^-(\boldsymbol{\mu})),$$

on aura aussi :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \pi^{i,+} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} (c^+(\boldsymbol{\mu})\pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2) + c^-(\boldsymbol{\mu})\pi^-(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2)),$$

puis l'égalité :

$$R_{d,1}^+(\text{trace}_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d+n'_1)} (c^+(\boldsymbol{\mu}) - c^-(\boldsymbol{\mu})) \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_2).$$

Les coefficients de cette expression sont les mêmes que dans le cas  $\boldsymbol{\mu}_2 = \emptyset$ . Cela achève la preuve.  $\square$

### 15. Quelques définitions combinatoires

Soit  $\boldsymbol{\mu}$  une partition. Pour deux entiers  $a, b \in \mathbb{Z}$  avec  $a \geq b$ , on pose  $[a, b] = \{a, a-1, \dots, b+1, b\}$  (pour respecter les conventions concernant les partitions, on écrit les ensembles d'entiers en ordre décroissant). Si  $a-b+1$  est plus grand que le nombre de termes non nuls de  $\boldsymbol{\mu}$ , on pose  $\boldsymbol{\mu} + [a, b] = \{\mu_1 + a, \mu_2 + a-1, \dots, \mu_{a-b+1} + b\}$ . Pour  $t \in \mathbb{N}$ , assez grand (plus grand que le nombre de termes non nuls de  $\boldsymbol{\mu}$ ), posons :

$$E_t(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu} + [t-1, 0],$$

$$E_t^+(\boldsymbol{\mu}) = \left\{ \frac{x}{2}; x \in E_t(\boldsymbol{\mu}), x \text{ pair} \right\},$$

$$E_t^-(\boldsymbol{\mu}) = \left\{ \frac{x-1}{2}; x \in E_t(\boldsymbol{\mu}), x \text{ impair} \right\}.$$

On note  $t^+(\boldsymbol{\mu})$ , resp.  $t^-(\boldsymbol{\mu})$  le nombre d'éléments de  $E_t^+(\boldsymbol{\mu})$ , resp.  $E_t^-(\boldsymbol{\mu})$ ,

$$m(\boldsymbol{\mu}) = \sup(t^-(\boldsymbol{\mu}) - t^+(\boldsymbol{\mu}), t^+(\boldsymbol{\mu}) - t^-(\boldsymbol{\mu}) - 1),$$

$$N(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} (S(\boldsymbol{\mu}) - m(\boldsymbol{\mu})(m(\boldsymbol{\mu}) - 1)/2).$$

Ces définitions sont copiées de [AMR], paragraphe 5.B. On vérifie que  $m(\boldsymbol{\mu})$  et  $N(\boldsymbol{\mu})$  ne dépendent pas de  $t$  et que  $N(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{N}$ . On note  $\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\mu})$  et  $\boldsymbol{\beta}_t(\boldsymbol{\mu})$  les partitions telles que :

$$\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\mu}) + [t^+(\boldsymbol{\mu}) - 1, 0] = E_t^+(\boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\beta}_t(\boldsymbol{\mu}) + [t^-(\boldsymbol{\mu}) - 1, 0] = E_t^-(\boldsymbol{\mu}).$$

On vérifie que  $S(\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\mu})) + S(\boldsymbol{\beta}_t(\boldsymbol{\mu})) = N(\boldsymbol{\mu})$ . Si on change  $t$  en  $t+1$ , on obtient  $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\beta}_t(\boldsymbol{\mu})$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{t+1}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\mu})$ . On note  $\rho_t(\boldsymbol{\mu})$  la représentation irréductible de  $W_{N(\boldsymbol{\mu})}$  paramétrée par le couple  $(\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\beta}_t(\boldsymbol{\mu}))$ .

Posons encore :

$$Z_t(\boldsymbol{\mu}) = \{(x, y) \in E_t(\boldsymbol{\mu})^2; x > y, x \text{ impair}, y \text{ pair}\},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{cusp}} = (m(\boldsymbol{\mu}), m(\boldsymbol{\mu}) - 1, \dots, 1),$$

$$z(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i \geq 1, i \text{ impair}} \left( \frac{\text{mult}_{\boldsymbol{\mu}}(i)^2 - \text{mult}_{\boldsymbol{\mu}}(i)}{2} + \text{mult}_{\boldsymbol{\mu}}(i) \text{mult}_{\boldsymbol{\mu}}(\geq i) \right).$$

**Lemme.** On a la congruence :

$$|Z_t(\boldsymbol{\mu})| - |Z_t(\boldsymbol{\mu}_{cusp})| = z(\boldsymbol{\nu}) + \alpha(m(\boldsymbol{\mu})) + \frac{S(\boldsymbol{\mu})}{2} + \frac{m(\boldsymbol{\mu})(m(\boldsymbol{\mu}) + 1)}{4} \pmod{2\mathbb{Z}},$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  est la partition duale de  $\boldsymbol{\mu}$  et la fonction  $\alpha$  a été définie au paragraphe 11.

La preuve, purement combinatoire, est laissée au lecteur.  $\square$

Soient  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ . Pour  $j = 1, 2$ , posons  $m_j = m(\boldsymbol{\mu}_j)$ ,  $N_j = N(\boldsymbol{\mu}_j)$ . En notant  $n' = \frac{m_1(m_1+1)}{2} + \frac{m_2(m_2+1)}{2}$ , il y a un unique couple  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp, n'}$  tel que :

$$(1) \quad m_1 = \text{sup}(h_1 + h_2, -h_1 - h_2 - 1), \quad m_2 = \text{sup}(h_1 - h_2, h_2 - h_1 - 1).$$

On pose :

$$\gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \gamma(h_1, h_2) \eta(-1)^{N_2} (-1)^{z(\boldsymbol{\nu}_1) + z(\boldsymbol{\nu}_2)}$$

où  $\gamma(h_1, h_2)$  a été défini au paragraphe 12 et, pour  $j = 1, 2$ ,  $\boldsymbol{\nu}_j$  est la partition duale de  $\boldsymbol{\mu}_j$ .

**Remarque.** Si  $\boldsymbol{\mu}_2 = \emptyset$ , ce terme se simplifie en  $\gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \emptyset) = (-1)^{z(\boldsymbol{\nu}_1) + \frac{N(\boldsymbol{\mu}_1)}{2} + \frac{m_1(m_1+1)}{4}}$ .

Pour  $j = 1, 2$  on choisit un entier  $t_j$  assez grand tel que  $t_j \equiv h_2 + j \pmod{2\mathbb{Z}}$ . On pose  $\rho_j = \rho_{t_j}(\boldsymbol{\mu}_j)$ . On note  $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  le sextuplet  $(h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2)$ . Il appartient à  $\hat{\mathcal{F}}$ . On a ainsi défini une application  $\mathfrak{f} : \mathcal{P}_2(n) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ . Elle est bijective.

## 16. Un lemme technique

Soient  $h_1, h_2, N, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$  comme au paragraphe 8. Si  $|h_2| > h_1$ , soit  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$  tel que  $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \boldsymbol{\rho}_1$  et soit  $g = su$  un élément de  $\tilde{G}$  vérifiant les hypothèses du (i) du corollaire 8. Si  $|h_2| \leq h_1$ , soit  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(n)$  tel que  $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \boldsymbol{\rho}_2$  et soit  $g = su$  un élément de  $\tilde{G}$  vérifiant les hypothèses du (ii) de ce corollaire.

Notons  $\mathbb{Z}_{alg}$  le sous-anneau de  $\mathbb{C}$  formé des entiers algébriques.

**Lemme.** Sous ces hypothèses,  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g)$  n'appartient pas à  $\sqrt{2}\mathbb{Z}_{alg}$ .

Preuve. Posons  $g' = s^2u$ . C'est un élément de  $G$ . Montrons que :

(1)  $\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g) - \text{trace} \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g')$  appartient à  $\sqrt{2}\mathbb{Z}_{alg}$ .

On a  $s^4 = 1$ . Les valeurs propres de  $\pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(s)$  appartiennent à  $\{\pm 1, \pm i\}$  (où ici  $i$  est une racine de  $-1$ ). Décomposons  $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  en espaces propres  $E_j$  pour  $j \in \{\pm 1, \pm i\}$ . Posons  $t_j = \text{trace} \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(u)|_{E_j}$ . Certainement  $t_j$  appartient à  $\mathbb{Z}_{alg}$ . On a :

$$\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g) = t_1 - t_{-1} + it_i - it_{-i},$$

$$\text{trace} \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g') = t_1 + t_{-1} - t_i - t_{-i}.$$

La différence de ces deux expressions est  $-2t_{-1} + (i+1)t_i + (1-i)t_{-i}$ . Or  $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$  appartiennent à  $\mathbb{Z}_{alg}$ . Cela entraîne (1).

Il suffit donc de démontrer que  $\text{trace} \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g')$  n'appartient pas à  $\sqrt{2}\mathbb{Z}_{alg}$ . Mais ce terme appartient à  $\mathbb{Z}$  car  $\pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . Il s'agit donc de prouver que c'est un entier impair.

On calcule le couple  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . Soient  $(m_1, m_2)$  le couple d'entiers  $\geq 0$  défini par la relation 15(1). Alors :

$$\boldsymbol{\mu}_1 = (2N + m_1, m_1 - 1, \dots, 1), \quad \boldsymbol{\mu}_2 = (m_2, m_2 - 1, \dots, 1).$$

On pose  $n_1 = S(\boldsymbol{\mu}_1)$ ,  $n_2 = S(\boldsymbol{\mu}_2)$ . Remarquons que  $s^2$  est un élément semi-simple de  $G$  de valeurs propres  $\pm 1$ . En notant  $n_{\pm}$  leurs multiplicités, on a :

- si  $|h_2| > h_1$ ,  $n_+ = 2N + h_2^2$ ,  $n_- = h_1(h_1 + 1)$  ;
- si  $|h_2| \leq h_1$ ,  $n_+ = h_2^2$ ,  $n_- = 2N + h_1(h_1 + 1)$ .

On calcule  $\text{trace } \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g')$  en utilisant la théorie des faisceaux-caractères pour le groupe  $G$  et en explicitant comme au paragraphe 6 le théorème de Lusztig. Puisque l'on a déjà détaillé la méthode aux paragraphes 6 et 7 dans le cadre plus subtil du groupe  $G^+$ , on ne donne ici que le résultat. Rappelons que pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(m)$ , on note  $\sigma(\boldsymbol{\mu})$  la représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_m$  paramétrée par  $\boldsymbol{\mu}$ . On associe à  $\sigma(\boldsymbol{\mu})$  une fonction de Green  $Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu})}$  sur l'ensemble des éléments unipotents de  $G_m$ . Si  $v \in G_m$  est unipotent et si sa classe de conjugaison est paramétrée par  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)$  (i.e. les blocs de Jordan de  $v$  sont de longueur  $\lambda_1, \lambda_2$  etc...), on a :

$$Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu})}(v) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\mu}$$

pour l'ordre usuel des partitions et, si  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$ ,  $Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu})}(v) = 1$ .

Notons  $\mathcal{N}$  l'ensemble des familles  $\mathbf{n} = (n_{\epsilon,j})_{\epsilon=\pm, j=1,2}$  d'entiers  $\geq 0$  telles que :

- pour  $j = 1, 2$ ,  $n_{+,j} + n_{-,j} = n_j$ ,

- pour  $\epsilon = \pm$ ,  $n_{\epsilon,1} + n_{\epsilon,2} = n_{\epsilon}$ .

Pour une telle famille, posons  $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}} = \mathfrak{S}_{n_{+,1}} \times \mathfrak{S}_{n_{+,2}} \times \mathfrak{S}_{n_{-,1}} \times \mathfrak{S}_{n_{-,2}}$ . On a deux plongements évidents (au moins à conjugaison près) :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \\ & \nearrow & \\ \mathfrak{S}_{\mathbf{n}} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathfrak{S}_{n_+} \times \mathfrak{S}_{n_-} \end{array}$$

Pour  $\sigma_1 \in \hat{\mathfrak{S}}_{n_1}$ ,  $\sigma_2 \in \hat{\mathfrak{S}}_{n_2}$ ,  $\sigma_+ \in \hat{\mathfrak{S}}_{n_+}$ ,  $\sigma_- \in \hat{\mathfrak{S}}_{n_-}$ , notons  $\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$ , resp.  $\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma_+ \otimes \sigma_-)$ , la restriction à  $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$  de  $\sigma_1 \otimes \sigma_2$  par le premier plongement, resp. de  $\sigma_+ \otimes \sigma_-$  par le second. Notons  $(\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma_1 \otimes \sigma_2), \text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma_+ \otimes \sigma_-))$  leur produit scalaire usuel. Le théorème de Lusztig s'explique alors sous la forme :

$$(2) \quad \text{trace } \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g') = q^r \sum_{\boldsymbol{\mu}_+ \in \mathcal{P}(n_+), \boldsymbol{\mu}_- \in \mathcal{P}(n_-)} Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu}_+)}(u_+) Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu}_-)}(u_-) \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} \epsilon(\mathbf{n}) (\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_2)), \text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_+) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_-))),$$

où  $\epsilon(\mathbf{n})$  est un signe et  $r$  un entier  $\geq 0$  qui nous importerons peu. Notons  $\boldsymbol{\lambda}_+$ , resp.  $\boldsymbol{\lambda}_-$ , la partition paramétrant la classe de conjugaison de  $u_+$ , resp.  $u_-$ . On a :

- si  $|h_2| > h_1$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_+ = (2N + 2|h_2| - 1, 2|h_2| - 3, \dots, 3, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_- = (2h_1, 2h_1 - 2, \dots, 2)$ ;

- si  $|h_2| \leq h_1$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_+ = (2|h_2| - 1, \dots, 3, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_- = (2N + 2h_1, 2h_1 - 2, \dots, 2)$ .

On va montrer que, dans la triple somme ci-dessus, indexée par  $\boldsymbol{\mu}_+$ ,  $\boldsymbol{\mu}_-$ ,  $\mathbf{n}$ , un seul triplet donne une contribution non nulle. Pour ce triplet, on a  $\boldsymbol{\mu}_+ = \boldsymbol{\lambda}_+$ ,  $\boldsymbol{\mu}_- = \boldsymbol{\lambda}_-$  et  $(\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_2)), \text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_+) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_-))) = 1$ . Il en résultera l'égalité  $\text{trace } \pi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)(g') = \epsilon(\mathbf{n})q^r$  qui est bien un entier impair, ce qui achèvera la preuve.

Introduisons quelques notations. Pour toute partition  $\boldsymbol{\alpha}$  et tout entier  $a \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_a(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_a$ . Pour deux partitions  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$ , on définit de façon évidente leur réunion  $\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta}$  et leur somme  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$  (on a  $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j$  pour tout  $j$ ). Posons  $a = S(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $b = S(\boldsymbol{\beta})$ , soit  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P}(a+b)$ . Il est bien connu que si  $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \sigma(\boldsymbol{\beta})$  intervient dans la restriction de  $\sigma(\boldsymbol{\delta})$  à  $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$ , alors  $\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ . Si l'une ou l'autre de ces inégalités est une égalité, la multiplicité de  $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \sigma(\boldsymbol{\beta})$  dans la restriction de  $\sigma(\boldsymbol{\delta})$  est égale à 1.

Soit  $\boldsymbol{\mu}_+, \boldsymbol{\mu}_-, \mathbf{n}$  un triplet dont la contribution à la somme (2) est non nulle. Puisque  $Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu}_+)}(u_+) \neq 0$  et  $Q_{\sigma(\boldsymbol{\mu}_-)}(u_-) \neq 0$ , on a :

$$(3) \quad \boldsymbol{\lambda}_+ \leq \boldsymbol{\mu}_+, \boldsymbol{\lambda}_- \leq \boldsymbol{\mu}_-.$$

Puisque  $(\text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_2)), \text{res}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}(\sigma(\boldsymbol{\mu}_+) \otimes \sigma(\boldsymbol{\mu}_-))) \neq 0$ , il existe des partitions  $\boldsymbol{\alpha}_{\epsilon,j} \in \mathcal{P}(n_{\epsilon,j})$  (ici comme dans les lignes qui suivent, on a  $\epsilon = \pm, j = 1, 2$ ), telles que :

$\sigma(\alpha_{\epsilon,1}) \otimes \sigma(\alpha_{\epsilon,2})$  intervient dans la restriction de  $\sigma(\mu_\epsilon)$  à  $\mathfrak{S}_{n_{\epsilon,1}} \times \mathfrak{S}_{n_{\epsilon,2}}$  ;  
 $\sigma(\alpha_{+,j}) \otimes \sigma(\alpha_{-,j})$  intervient dans la restriction de  $\sigma(\mu_j)$  à  $\mathfrak{S}_{n_{+,j}} \times \mathfrak{S}_{n_{-,j}}$ .  
Cela entraîne :

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_\epsilon \leq \alpha_{\epsilon,1} + \alpha_{\epsilon,2}, \\ \alpha_{+,j} \cup \alpha_{-,j} \leq \mu_j. \end{cases}$$

Soit  $i$  un entier  $\geq 1$ , posons  $c_\epsilon = \text{mult}_{\mu_\epsilon}(\geq i)$ ,  $c_j = \text{mult}_{\mu_j}(\geq i)$ ,  $c = c_+ + c_-$ . Les inégalités ci-dessus entraînent :

$$(5) \quad \begin{cases} S_{c_\epsilon}(\mu_\epsilon) \leq S_{c_\epsilon}(\alpha_{\epsilon,1}) + S_{c_\epsilon}(\alpha_{\epsilon,2}), \\ S_{c_+}(\alpha_{+,j}) + S_{c_-}(\alpha_{-,j}) \leq S_c(\mu_j). \end{cases}$$

D'autre part,  $S_c(\mu_+ \cup \mu_-) = S_{c_+}(\mu_+) + S_{c_-}(\mu_-)$ . Alors :

$$(6) \quad \begin{aligned} S_c(\mu_+ \cup \mu_-) &= S_{c_+}(\mu_+) + S_{c_-}(\mu_-) \leq S_{c_+}(\alpha_{+,1}) + S_{c_+}(\alpha_{+,2}) + S_{c_-}(\alpha_{-,1}) + S_{c_-}(\alpha_{-,2}) \\ &\leq S_c(\mu_1) + S_c(\mu_2) = S_c(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

On remarque que  $\mu_1 + \mu_2 = \lambda_+ \cup \lambda_-$ . On a ainsi obtenu la relation :

$$S_c(\mu_+ \cup \mu_-) \leq S_c(\lambda_+ \cup \lambda_-)$$

pour  $c = \text{mult}_{\mu_+ \cup \mu_-}(\geq i)$ , et cela pour tout  $i \geq 1$ . D'après [S] lemme 3.4 p.192, cela entraîne  $\mu_+ \cup \mu_- \leq \lambda_+ \cup \lambda_-$ . En comparant avec (3), on obtient  $\mu_+ = \lambda_+$  et  $\mu_- = \lambda_-$ . Maintenant, les deux termes extrêmes de (6) sont égaux et cela oblige toutes les inégalités du calcul ci-dessus à être des égalités. Prenons par exemple pour  $i$  un entier pair intervenant dans  $\lambda_-$ . Notons  $c'_+$ ,  $c'_-$ ,  $c'$  les analogues de  $c_+$ ,  $c_-$ ,  $c$  relatifs à  $i+1$ . On a  $c'_+ = c_+$  car tous les termes de  $\lambda_+$  sont impairs. On a  $c'_- = c_- - 1$  car toutes les multiplicités de  $\lambda_-$  sont  $\leq 1$ . Donc  $c' = c - 1$ . Soustrayons de (5), qui est maintenant une égalité, la même égalité pour  $i+1$ . On obtient  $\alpha_{-,j,c_-} = \mu_{j,c}$  (le  $c_-$ -ième terme de  $\alpha_{-,j}$  est égal au  $c$ -ième terme de  $\mu_j$ ). Quand  $i$  parcourt tous les entiers pairs intervenant dans  $\lambda_-$ ,  $c_-$  parcourt l'ensemble  $\{1, \dots, h_1\}$ . Remarquons que la première inégalité de (4) entraîne que la longueur de  $\alpha_{-,j}$  est  $\leq h_1$ . Les égalités précédentes déterminent donc entièrement  $\alpha_{-,j}$ . On détermine de même  $\alpha_{+,j}$ . Cela montre qu'il y a un unique quadruplet de partitions  $(\alpha_{\epsilon,j})_{\epsilon=\pm, j=1,2}$  possible. Par exemple, dans le cas  $0 \leq h_2 \leq h_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{+,1} &= (2h_2 - 1, 2h_2 - 3, \dots, 3, 1), \quad \alpha_{+,2} = \emptyset, \\ \alpha_{-,1} &= (2N + h_1 + h_2, h_1 + h_2 - 1, h_1 + h_2 - 2, \dots, 2h_2 + 1, 2h_2, 2h_2 - 2, \dots, 2), \\ \alpha_{-,2} &= (h_1 - h_2, h_1 - h_2 - 1, \dots, 2, 1). \end{aligned}$$

On constate que les inégalités (4) sont des égalités, donc  $\sigma(\alpha_{+,1}) \otimes \sigma(\alpha_{+,2}) \otimes \sigma(\alpha_{-,1}) \otimes \sigma(\alpha_{-,2})$  intervient avec multiplicité 1 dans  $\text{res}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma(\mu_1) \otimes \sigma(\mu_2))$  comme dans  $\text{res}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma(\mu_+) \otimes \sigma(\mu_-))$ . L'unicité du quadruplet  $(\alpha_{\epsilon,j})_{\epsilon=\pm, j=1,2}$  entraîne celle de la famille  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ . Le calcul ci-dessus des multiplicités entraîne que, pour cette famille, on a bien  $(\text{res}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma(\mu_1) \otimes \sigma(\mu_2)), \text{res}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma(\mu_+) \otimes \sigma(\mu_-))) = 1$  comme on le voulait.  $\square$

## 17. Le résultat principal

Rappelons que l'on suppose  $p \neq 2$  et  $q > n$ .

**Théorème.** *Pour tout  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{P}_2(n)$ , on a l'égalité :*

$$\text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2) = \gamma(\mu_1, \mu_2) \phi \circ \mathfrak{f}(\mu_1, \mu_2).$$

La fin de l'article est consacrée à la démonstration de ce théorème. Elle se fait par récurrence sur  $n$ . On suppose désormais l'assertion du théorème prouvée quand on y remplace  $n$  par tout entier  $n' < n$ .

## 18. Symboles et induction de Deligne-Lusztig pour les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères

Pour tout sous-ensemble fini  $\Lambda \subset \mathbb{N} \times \{\pm 1\}$ , posons :

- pour  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ ,  $\Lambda^\epsilon = \{x \in \mathbb{N}; (x, \epsilon) \in \Lambda\}$ ;

-  $rg(\Lambda) = (\sum_{(x,\epsilon) \in \Lambda} x) - \left[ \left( \frac{|\Lambda| - 1}{2} \right)^2 \right]$  (ou  $[z]$  = partie entière de  $z$ ; remarquons que  $rg(\Lambda) \geq 0$ );

-  $def(\Lambda) = |\Lambda^+| - |\Lambda^-|$ .

On introduit la relation d'équivalence entre de tels sous-ensembles finis engendrée par  $\Lambda \sim \Lambda'$  où  $\Lambda' = \{(x+1, \epsilon); (x, \epsilon) \in \Lambda\} \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$ . Les fonctions  $rg$  et  $def$  sont constantes sur les classes d'équivalence. Pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $D \in \mathbb{Z}$ , on appelle symbole ordonné de rang  $N$  et de défaut  $D$  une classe d'équivalence d'ensembles  $\Lambda$  tels que  $rg(\Lambda) = N$  et  $def(\Lambda) = D$ . En pratique, on représentera un symbole par un élément  $\Lambda$  de la classe en question ayant un nombre d'éléments assez grand. On ne s'intéresse qu'aux symboles de défaut 0. On note  $S_N$  l'ensemble des symboles ordonnés de rang  $N$  et de défaut 0.

Pour tout ensemble  $X$ , on note  $\mathbb{C}[X]$  l'espace vectoriel complexe de base  $X$ . On le munit du produit scalaire hermitien pour lequel  $X$  est une base orthonormée.

Soient  $N, d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 1$ . Pour  $\Lambda \in S_N$ , posons :

$$X_d(\Lambda) = \{(x, \epsilon) \in \Lambda; (x+d, \epsilon) \notin \Lambda\}.$$

Pour  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda)$ , posons :

$$\Lambda_d(x, \epsilon) = (\Lambda \setminus \{(x, \epsilon)\}) \cup \{(x+d, \epsilon)\},$$

$$\zeta_{d,\Lambda}(x, \epsilon) = (-1)^{|[x+d-1, x+1] \cap \Lambda^\epsilon|}.$$

Remarquons que  $\Lambda_d(x, \epsilon) \in S_{N+d}$ . On pose :

$$I_d^+(\Lambda) = \sum_{(x,\epsilon) \in X_d(\Lambda)} \zeta_{d,\Lambda}(x, \epsilon) \Lambda_d(x, \epsilon),$$

$$I_d^-(\Lambda) = \sum_{(x,\epsilon) \in X_d(\Lambda)} \epsilon \zeta_{d,\Lambda}(x, \epsilon) \Lambda_d(x, \epsilon).$$

Par linéarité, cela définit des homomorphismes  $I_d^\pm : \mathbb{C}[S_N] \rightarrow \mathbb{C}[S_{N+d}]$ .

Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$ , représentons ces partitions par des familles de même longueur :  $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_r)$ ,  $\beta = (\beta_1 \geq \dots \geq \beta_r)$ . Posons  $\Lambda^+ = \alpha + [r-1, 0]$ ,  $\Lambda^- = \beta + [r-1, 0]$  et  $\Lambda = \{(x, \epsilon); \epsilon = \pm 1, x \in \Lambda^\epsilon\}$ . Alors  $\Lambda \in S_N$  et l'application  $(\alpha, \beta) \mapsto \Lambda$  ainsi définie est une bijection de  $\mathcal{P}_2(N)$  sur  $S_N$ . Puisque  $\mathcal{P}_2(N)$  paramètre  $\hat{W}_N$ , on en déduit une bijection de  $\hat{W}_N$  sur  $S_N$ , que l'on note  $\rho \mapsto \Lambda(\rho)$ . Fixons un élément  $w^+(d)$ , resp.  $w^-(d)$ , de  $W_d$  dans la classe de conjugaison paramétrée par  $((d), \emptyset)$ , resp.  $(\emptyset, (d))$ . Pour  $\rho \in \hat{W}_{N+d}$ ,  $\rho' \in \hat{W}_N$  et  $\epsilon = \pm$ , posons :

$$[\rho : w^\epsilon(d) \times \rho'] = |W_N|^{-1} \sum_{w \in W_N} \text{trace } \rho(w^\epsilon(d) \times w) \text{trace } \rho'(w),$$

avec des notations analogues à celles du paragraphe 14. L'homomorphisme  $I_d^\epsilon$  s'interprète de la façon suivante (on identifie  $\pm$  à  $\{\pm 1\}$ ) :

(1) pour tout  $\rho' \in \hat{W}_N$ ,  $I_d^\epsilon(\Lambda(\rho')) = \sum_{\rho \in \hat{W}_{N+d}} [\rho : w^\epsilon(d) \times \rho'] \Lambda(\rho)$ .

Posons  $S = \cup_{N \in \mathbb{N}} S_N$ . Des homomorphismes précédents se déduisent des endomorphismes  $I_d^\pm$  de  $\mathbb{C}[S]$ . Posons  $\mathcal{S} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times S \times S$ . On a un isomorphisme :

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\mathbb{N} \times \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S].$$

Pour  $j = 1, 2$  et  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ , on note  $I_{d,j}^\epsilon$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$  produit tensoriel de l'endomorphisme  $I_d^\epsilon$  de la  $j$ -ième copie de  $\mathbb{C}[S]$  et des identités de  $\mathbb{C}[\mathbb{N} \times \mathbb{Z}]$  et de l'autre copie de

$\mathbb{C}[S]$ . Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{S}_m$  le sous-ensemble des  $(h_1, h_2, \Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{S}$  tels que  $h_1(h_1 + 1) + h_2^2 + 2rg(\Lambda_1) + 2rg(\Lambda_2) = m$ . Evidemment,  $I_{d,j}^\epsilon$  se restreint en un homomorphisme de  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_m]$  dans  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_{m+2d}]$ .

Pour  $\rho = (h_1, h_2, N_1, N_2, \rho_1, \rho_2) \in \hat{\mathcal{F}}$ , posons :

$$\mathbf{\Lambda}_k(\rho) = (h_1, h_2, \Lambda(\rho_1), \Lambda(\rho_2)).$$

Ce terme appartient à  $\mathcal{S}_n$ . On a ainsi défini une application  $\mathbf{\Lambda}_k : \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{S}_n$ . Elle est bijective.

Notons  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu}$  le sous-espace de  $\mathcal{C}(\tilde{G})$  engendré par les fonctions  $\phi(\rho)$  pour  $\rho \in \hat{\mathcal{F}}$ . En associant à tout  $s \in \mathcal{S}_n$  la fonction  $\phi \circ \mathbf{\Lambda}_k^{-1}(s)$ , on définit une application linéaire  $k : \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu}$ . D'après le lemme 5, c'est une isométrie.

Pour  $n', d \in \mathbb{N}$  tels que  $d \geq 1$  et  $n' + 2d = n$ , pour  $j = 1, 2$  et  $\epsilon = \pm$ , on a défini au paragraphe 3 un homomorphisme  $R_{d,j}^\epsilon : \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{G})$ . Par construction de  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu}$ , il envoie  $\mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{k,qu}$  dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu}$  (rappelons notre convention d'affecter d'indices  $n'$  les objets analogues à ceux que l'on a défini pour notre groupe  $G = G_n$  quand on remplace  $n$  par  $n'$ ).

**Lemme.** *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n'}] & \xrightarrow{k_{n'}} & \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{k,qu} \\ \downarrow I_{d,j}^\epsilon & & \downarrow R_{d,j}^\epsilon \\ \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] & \xrightarrow{k} & \mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu} \end{array}$$

Le lemme est dû à Asai ([A], lemme 2.8.2). Il se déduit de (1).

## 19. Symboles et induction de Deligne-Lusztig de représentations : premières propriétés

On pose  $\mathbf{\Lambda}_{rep} = \mathbf{\Lambda}_k \circ \mathfrak{f}$  où  $\mathfrak{f}$ , resp.  $\mathbf{\Lambda}_k$  a été définie au paragraphe 15, resp. 18. Alors  $\mathbf{\Lambda}_{rep}$  est une bijection de  $\mathcal{P}_2(n)$  sur  $\mathcal{S}_n$ . On définit un homomorphisme  $rep : \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$  qui à  $s \in \mathcal{S}_n$  associe  $\gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ , où  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \mathbf{\Lambda}_{rep}^{-1}(s)$ . Cet homomorphisme  $rep$  est une isométrie.

**Remarque.** L'assertion du théorème revient à dire que  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu} = \mathcal{C}(\tilde{G})_{k,qu}$  et que  $rep = k$ . L'hypothèse de récurrence assure la validité de ces assertions quand on y remplace  $n$  par tout  $n' < n$ .

Soient  $n', d \in \mathbb{N}$  tels que  $d \geq 1$ ,  $n' + 2d = n$  et soit  $j = 1, 2$ . Le lemme 14(ii) entraîne que l'image de  $\mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{qu}$  par  $R_{d,j}^+$  est incluse dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$ .

**Lemme.** *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n'}] & \xrightarrow{rep_{n'}} & \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{qu} \\ \downarrow I_{d,j}^+ & & \downarrow R_{d,j}^+ \\ \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] & \xrightarrow{rep} & \mathcal{C}(\tilde{G})_{qu} \end{array}$$

Preuve. On suppose pour simplifier  $j = 1$ . Soient  $s = (h_1, h_2, \Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{S}_{n'}$  et  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \mathbf{\Lambda}_{rep, n'}^{-1}(s) \in \mathcal{P}_2(n')$ . Posons  $n'_1 = S(\boldsymbol{\mu}_1)$ ,  $m = m(\boldsymbol{\mu}_1)$ , soit  $t$  un entier assez grand tel que  $t \equiv h_2 + 1 \pmod{2\mathbb{Z}}$ . Posons :

$$X = \{x \in E_t(\boldsymbol{\mu}_1); x + 2d \notin E_t(\boldsymbol{\mu}_1)\}.$$

Pour  $x \in X$ , posons :

$$\begin{aligned} E_t(\boldsymbol{\mu}_1; x) &= (E_t(\boldsymbol{\mu}_1) \setminus \{x\}) \cup \{x + 2d\}, \\ \zeta(x) &= (-1)^{|[x+2d-1, x+1] \cap E_t(\boldsymbol{\mu}_1)|}. \end{aligned}$$

D'après la règle de Murnaghan, les partitions  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(2d + n'_1)$  telles que  $[\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1] \neq 0$  sont celles pour lesquelles  $E_t(\boldsymbol{\mu})$  est égal à  $E_t(\boldsymbol{\mu}_1; x)$  pour un  $x \in X$ . On a alors l'égalité  $[\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1] = \zeta(x)$ .

Il résulte des définitions que l'on peut supposer :

$$\Lambda_1^\epsilon = \{y + u^\epsilon; y \in E_t^\epsilon(\boldsymbol{\mu}_1)\} \cup [u^\epsilon - 1, 0],$$

pour  $\epsilon = \pm$ , où :

- si  $m \equiv h_2 + 1 \pmod{2\mathbb{Z}}$ ,  $u^+ = m$ ,  $u^- = 0$ ,
- si  $m \equiv h_2 \pmod{2\mathbb{Z}}$ ,  $u^+ = 0$ ,  $u^- = m + 1$ .

L'application :

$$x \mapsto \begin{cases} (\frac{x}{2} + u^+, 1), & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (\frac{x-1}{2} + u^-, -1), & \text{si } x \text{ est impair,} \end{cases}$$

est une bijection de  $X$  sur  $X_d(\Lambda_1)$ . Si  $x \in X$  correspond ainsi à  $(y, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ , posons  $\zeta(y, \epsilon) = \zeta(x)$  et notons  $\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon)$  la partition de  $2d + n'_1$  telle que  $E_t(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon)) = E_t(\boldsymbol{\mu}_1; x)$ . On vérifie que :

$$(1) \quad \boldsymbol{\Lambda}_{rep}(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2) = (h_1, h_2, \Lambda_{1,d}(y, \epsilon), \Lambda_2).$$

On a l'égalité  $R_{d,1}^+ \circ rep_{n'}(s) = \gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) R_{d,1}^+(trace_{\tilde{G}_{n'}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$ . Grâce au lemme 14(ii) et aux considérations ci-dessus, on obtient l'égalité :

$$R_{d,1}^+ \circ rep_{n'}(s) = \sum_{(y,\epsilon) \in X_d(\Lambda_1)} \gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \zeta(y, \epsilon) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2).$$

D'autre part, d'après (1) et les définitions,

$$rep \circ I_{d,1}^+(s) = \sum_{(y,\epsilon) \in X_d(\Lambda_1)} \gamma(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2) \zeta_{d,\Lambda_1}(y, \epsilon) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2).$$

Il s'agit donc de prouver que, pour tout  $(y, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ , on a l'égalité :

$$(2) \quad \gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \zeta(y, \epsilon) = \gamma(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2) \zeta_{d,\Lambda_1}(y, \epsilon).$$

Fixons donc  $(y, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ , notons  $x$  l'élément de  $X$  qui lui correspond et posons  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(y, \epsilon)$ . On a l'égalité :

$$[x + 2d - 1, x + 1] \cap E_t(\boldsymbol{\mu}_1) = Z^0 \sqcup Z^1,$$

où, pour  $\ell = 0, 1$ ,  $Z^\ell = \{z \in E_t(\boldsymbol{\mu}_1); x + 2d > z > x, z \equiv x + \ell \pmod{2\mathbb{Z}}\}$ . L'application :

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{z}{2} + u^+, & \text{si } z \text{ est pair,} \\ \frac{z-1}{2} + u^-, & \text{si } z \text{ est impair,} \end{cases}$$

est une bijection de  $Z^0$  sur  $[y + d - 1, y + 1] \cap \Lambda_1^\epsilon$ . Donc  $(-1)^{|Z^0|} = \zeta_{d,\Lambda_1}(y, \epsilon)$ . Introduisons les ensembles  $Z_t(\boldsymbol{\mu}_1)$  et  $Z_t(\boldsymbol{\mu})$  du paragraphe 15. Supposons par exemple  $x$  pair. Posons :

$$Z'_t(\boldsymbol{\mu}_1) = \{(x', y') \in Z_t(\boldsymbol{\mu}_1); y' \neq x\}, \quad Z'_t(\boldsymbol{\mu}) = \{(x', y') \in Z_t(\boldsymbol{\mu}); y' \neq x + 2d\}.$$

Ces deux ensembles sont égaux. L'ensemble  $Z_t(\boldsymbol{\mu}_1) \setminus Z'_t(\boldsymbol{\mu}_1)$  est en bijection, par  $(x', x) \mapsto x'$ , avec  $\{x' \in E_t(\boldsymbol{\mu}_1); x' > x, x' \text{ impair}\}$ . De même,  $Z_t(\boldsymbol{\mu}) \setminus Z'_t(\boldsymbol{\mu})$  est en bijection, par  $(x', x + 2d) \mapsto x'$ , avec  $\{x' \in E_t(\boldsymbol{\mu}); x' > x + 2d, x' \text{ impair}\}$ . Ce dernier ensemble est égal à  $\{x' \in E_t(\boldsymbol{\mu}_1); x' > x, x' \text{ impair}\} \setminus Z^1$ . On en déduit l'égalité  $|Z_t(\boldsymbol{\mu}_1)| - |Z_t(\boldsymbol{\mu})| = |Z^1|$ . On a supposé  $x$  pair. Dans le cas où  $x$  est impair, on démontre de même que  $|Z_t(\boldsymbol{\mu})| - |Z_t(\boldsymbol{\mu}_1)| = |Z^1|$ . En tout cas, en utilisant le lemme 15, on a :

$$(-1)^{|Z^1|} = (-1)^{z(\boldsymbol{\nu}) - z(\boldsymbol{\nu}_1)},$$

où  $\boldsymbol{\nu}$ , resp.  $\boldsymbol{\nu}_1$  sont les partitions transposées de  $\boldsymbol{\mu}$ , resp.  $\boldsymbol{\mu}_1$ . Alors :

$$\zeta(y, \epsilon) = (-1)^{|[x+2d-1, x+1] \cap E_t(\boldsymbol{\mu}_1)|} = (-1)^{|Z^0| + |Z^1|} = (-1)^{z(\boldsymbol{\nu}) - z(\boldsymbol{\nu}_1)} \zeta_{d,\Lambda_1}(y, \epsilon).$$

Mais, par définition de la fonction  $\gamma$ , on a l'égalité :

$$(-1)^{z(\nu)-z(\nu_1)} = \gamma(\boldsymbol{\mu}(y, \epsilon), \boldsymbol{\mu}_2) \gamma(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^{-1}.$$

D'où (2).  $\square$

## 20. Symboles et induction de Deligne-Lusztig de représentations, suite

Soient  $n', d \in \mathbb{N}$  tels que  $d \geq 1$  et  $n' + 2d = n$ , et soit  $j = 1, 2$ .

**Lemme.** (i) L'image de  $\mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{qu}$  par l'homomorphisme  $R_{d,j}^-$  est incluse dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$ .

(ii) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n'}] & \xrightarrow{rep_{n'}} & \mathcal{C}(\tilde{G}_{n'})_{qu} \\ \downarrow I_{d,j}^- & & \downarrow R_{d,j}^- \\ \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] & \xrightarrow{rep} & \mathcal{C}(\tilde{G})_{qu} \end{array}$$

Preuve. On suppose encore  $j = 1$ . Soient  $\bar{n}', \bar{d} \in \mathbb{N}$  tels que  $\bar{d} \geq 1$  et  $\bar{n}' + 2\bar{d} = n$ , soient  $\bar{j} = 1, 2$  et  $\bar{\epsilon} = \pm$ . Pour  $s \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n'}]$  et  $\bar{s} \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_{\bar{n}'}]$ , on a l'égalité de produits scalaires :

$$(1) \quad (I_{d,1}^-(s), I_{\bar{d},\bar{j}}^{\bar{\epsilon}}(\bar{s})) = (R_{d,1}^- \circ rep_{n'}(s), R_{\bar{d},\bar{j}}^{\bar{\epsilon}} \circ rep_{\bar{n}'}(\bar{s})).$$

En effet, par l'hypothèse de récurrence,  $rep_{n'} = k_{n'}$ ,  $rep_{\bar{n}'} = k_{\bar{n}'}$ . Grâce au lemme 18, le membre de droite est égal à  $(k \circ I_{d,1}^-(s), k \circ I_{\bar{d},\bar{j}}^{\bar{\epsilon}}(\bar{s}))$ . Puisque  $k$  est une isométrie, cela entraîne (1).

Soit  $s = (h_1, h_2, \Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{S}_{n'}$ . Posons  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \boldsymbol{\Lambda}_{rep_{n'}}^{-1}(s)$ . Modifions la formule du lemme 14(i) en ne conservant dans la somme que les  $\boldsymbol{\mu}$  tels que  $[\boldsymbol{\mu} : w(2d) \times \boldsymbol{\mu}_1] \neq 0$  et en additionnant les autres au terme  $\varphi_1$ . Les  $\boldsymbol{\mu}$  ci-dessus ont été déterminés dans la preuve précédente, dont on reprend les notations. On obtient le résultat suivant. Il existe une combinaison linéaire :

$$\mathcal{J}(s) = \sum_{(x,\epsilon) \in X_d(\Lambda_1)} \epsilon \zeta_{d,\Lambda_1}(x, \epsilon) c(x, \epsilon) (h_1, h_2, \Lambda_1(x, \epsilon), \Lambda_2)$$

où les coefficients  $c(x, \epsilon)$  sont des entiers impairs, et il existe  $\varphi \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ , orthogonal à  $rep(\mathcal{J}(s))$ , de sorte que :

$$R_{d,1}^- \circ rep_{n'}(s) = \varphi + rep(\mathcal{J}(s)).$$

**Remarque.** Il n'est pas naturel à ce point d'introduire les termes  $\epsilon \zeta_{d,\Lambda_1}(x, \epsilon)$ , mais on peut évidemment le faire quitte à modifier le signe de  $c(x, \epsilon)$  et cela simplifiera les calculs ci-dessous.

Alors :

$$(R_{d,1}^- \circ rep_{n'}(s), R_{d,1}^- \circ rep_{n'}(s)) = (\varphi, \varphi) + \sum_{(x,\epsilon) \in X_d(\Lambda_1)} c(x, \epsilon)^2.$$

Appliquons (1) pour  $\bar{d} = d, \bar{s} = s, \bar{j} = 1, \bar{\epsilon} = -$ . Le terme de gauche ci-dessus est égal à  $(I_{d,1}^-(s), I_{d,1}^-(s))$ , i.e. à  $|X_d(\Lambda_1)|$ . En comparant avec le membre de droite, on voit que  $\varphi = 0$  et  $c(x, \epsilon) = \pm 1$  pour tout  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ . Puisque  $\varphi = 0$ , on obtient déjà  $R_{d,1}^- \circ rep_{n'}(s) = rep(\mathcal{J}(s))$ , ce qui entraîne le (i) de l'énoncé. Pour démontrer le (ii), on doit prouver que  $\mathcal{J}(s) = I_{d,1}^-(s)$ , c'est-à-dire que  $c(x, \epsilon) = 1$  pour tout  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ .

Pour  $\bar{\epsilon} = +$ , l'égalité (1) se simplifie. En effet, grâce au lemme 19, le membre de droite devient  $(rep(\mathcal{J}(s)), rep \circ I_{d,\bar{j}}^+(\bar{s}))$ . Puisque  $rep$  est une isométrie, on obtient :

$$(2) \quad (I_{d,1}^-(s), I_{d,\bar{j}}^+(\bar{s})) = (\mathcal{J}(s), I_{d,\bar{j}}^+(\bar{s})).$$

Supposons d'abord  $rg(\Lambda_2) > 0$ . Il est facile de trouver  $\bar{d} > 0$ ,  $\bar{\Lambda}_2 \in S_{rg(\Lambda_2) - \bar{d}}$  et  $(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \in X_{\bar{d}}(\bar{\Lambda}_2)$  tels que  $\Lambda_2 = \bar{\Lambda}_{2,\bar{d}}(\bar{x}, \bar{\epsilon})$ . Soit  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda_1)$ , posons  $\bar{s} = (h_1, h_2, \Lambda_1(x, \epsilon), \bar{\Lambda}_2)$ . On vérifie que  $(h_1, h_2, \Lambda_1(x, \epsilon), \Lambda_2)$  est le seul élément de  $\mathcal{S}_n$  qui intervienne à la fois dans la décomposition

de  $\mathcal{J}(s)$  ou  $I_{d,1}^-(s)$  et dans celle de  $I_{d,2}^+(\bar{s})$ , quand on écrit ces termes dans la base  $\mathcal{S}_n$  de  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ . On calcule alors les produits scalaires :

$$(\mathcal{J}(s), I_{d,2}^+(\bar{s})) = c(x, \epsilon) \epsilon \zeta_{d, \Lambda_1}(x, \epsilon) \zeta_{\bar{d}, \bar{\Lambda}_2}(\bar{x}, \bar{\epsilon}),$$

$$(I_{d,1}^-(s), I_{d,2}^+(\bar{s})) = \epsilon \zeta_{d, \Lambda_1}(x, \epsilon) \zeta_{\bar{d}, \bar{\Lambda}_2}(\bar{x}, \bar{\epsilon}).$$

En comparant avec (2), on obtient  $c(x, \epsilon) = 1$  comme on le voulait.

On suppose désormais  $rg(\Lambda_2) = 0$ . On simplifie les notations en posant  $\Lambda = \Lambda_1$ ,  $N' = rg(\Lambda)$ ,  $N = N' + d$ ,

$$J(\Lambda) = \sum_{(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda)} \epsilon \zeta_{d, \Lambda}(x, \epsilon) c(x, \epsilon) \Lambda(x, \epsilon).$$

Pour  $\bar{d} \in \{1, \dots, N\}$  et  $\bar{\Lambda} \in S_{N-\bar{d}}$ , on a l'égalité de produits scalaires dans  $\mathbb{C}[S_N]$  :

$$(3) \quad (I_{\bar{d}}^-(\Lambda), I_{\bar{d}}^+(\bar{\Lambda})) = (J(\Lambda), I_{\bar{d}}^+(\bar{\Lambda})).$$

On l'obtient en appliquant (2) à  $\bar{s} = (h_1, h_2, \bar{\Lambda}, \Lambda_2)$  et  $\bar{j} = 1$ .

Disons qu'un ensemble fini d'entiers  $\geq 0$  est cuspidal si c'est un intervalle  $[t, 0]$ . Si un ensemble fini  $A$  d'entiers  $\geq 0$  n'est pas cuspidal, on peut trouver un autre ensemble  $\bar{A}$ , un élément  $\bar{x} \in \bar{A}$  et un entier  $\bar{d} \geq 1$  tels que  $\bar{x} + \bar{d} \notin \bar{A}$  et  $A = (\bar{A} \setminus \{\bar{x}\}) \cup \{\bar{x} + \bar{d}\}$ .

Soit  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda)$ . Supposons  $\Lambda^{-\epsilon}$  non cuspidal. Choisissons  $\bar{\Lambda}^{-\epsilon}$ ,  $\bar{x} \in \bar{\Lambda}^{-\epsilon}$  et  $\bar{d} \geq 1$  tels que  $\bar{x} + \bar{d} \notin \bar{\Lambda}^{-\epsilon}$  et  $\Lambda^{-\epsilon} = (\bar{\Lambda}^{-\epsilon} \setminus \{\bar{x}\}) \cup \{\bar{x} + \bar{d}\}$ . Notons  $\bar{\Lambda}$  l'élément de  $S_{N-\bar{d}}$  tel que  $\bar{\Lambda}^\epsilon = \Lambda_d(x, \epsilon)^\epsilon$  et  $\bar{\Lambda}^{-\epsilon}$  soit l'ensemble que l'on vient de choisir. On vérifie que  $\Lambda_d(x, \epsilon)$  est le seul élément de  $S_N$  qui intervienne à la fois dans la décomposition de  $J(\Lambda)$  ou  $I_{\bar{d}}^-(\Lambda)$  et dans celle de  $I_{\bar{d}}^+(\bar{\Lambda})$ . Le même argument de produit scalaire que ci-dessus entraîne l'égalité  $c(x, \epsilon) = 1$ .

On suppose désormais  $\Lambda^{-\epsilon}$  cuspidal. Supposons qu'il existe  $\bar{x}, \bar{d} \in \mathbb{N}$  tels que :

$$(4) \quad \bar{x} \notin \Lambda^\epsilon, \bar{x} + \bar{d} \in \Lambda^\epsilon, \{\bar{x}, \bar{x} + \bar{d}\} \cap \{x, x + d\} = \emptyset.$$

Fixons de tels entiers, définissons  $\bar{\Lambda} \in S_{N-\bar{d}}$  par  $\bar{\Lambda}^\epsilon = (\Lambda_d(x, \epsilon)^\epsilon \setminus \{\bar{x} + \bar{d}\}) \cup \{\bar{x}\}$ ,  $\bar{\Lambda}^{-\epsilon} = \Lambda^{-\epsilon}$ . Cherchons les constituants communs de  $J(\Lambda)$  (ou  $I_{\bar{d}}^-(\Lambda)$ ) et  $I_{\bar{d}}^+(\bar{\Lambda})$ . On doit chercher les  $(y, \nu) \in X_d(\Lambda)$  et  $(\bar{y}, \bar{\nu}) \in X_{\bar{d}}(\bar{\Lambda})$  tels que  $\Lambda_d(y, \nu) = \bar{\Lambda}_{\bar{d}}(\bar{y}, \bar{\nu})$ . Considérons de tels couples. Si  $\nu \neq \bar{\nu}$ , l'un des deux ensembles  $\Lambda_d(y, \nu)^{-\epsilon}$  et  $\bar{\Lambda}_{\bar{d}}(\bar{y}, \bar{\nu})^{-\epsilon}$  est cuspidal, l'autre pas. C'est impossible. Si  $\nu = \bar{\nu} = -\epsilon$ ,  $\Lambda_d(y, \nu)^\epsilon = \Lambda^\epsilon$ ,  $\bar{\Lambda}_{\bar{d}}(\bar{y}, \bar{\nu})^\epsilon = \bar{\Lambda}^\epsilon$ . Or  $\bar{\Lambda}^\epsilon$  contient  $\bar{x}$  et  $\Lambda^\epsilon$  ne le contient pas. Impossible. Donc  $\nu = \bar{\nu} = \epsilon$ . Si  $\bar{y} \neq \bar{x}$ ,  $\bar{\Lambda}_{\bar{d}}(\bar{y}, \epsilon)^\epsilon$  contient  $\bar{x}$  et ne contient pas  $\bar{x} + \bar{d}$ . Il en est donc de même de  $\Lambda_d(y, \epsilon)^\epsilon = (\Lambda^\epsilon \setminus \{y\}) \cup \{y + d\}$ . Puisque  $\Lambda^\epsilon$  ne contient pas  $\bar{x}$  et contient  $\bar{x} + \bar{d}$ , cela entraîne à la fois  $y = \bar{x} + \bar{d}$  et  $y + d = \bar{x}$ . Ces égalités sont contradictoires. Donc  $\bar{y} = \bar{x}$ . Alors  $\bar{\Lambda}_{\bar{d}}(\bar{y}, \epsilon) = \Lambda_d(x, \epsilon)$ . Puisque ce terme est égal à  $\Lambda_d(y, \epsilon)$ , nécessairement  $y = x$ . On a ainsi montré que  $\Lambda_d(x, \epsilon)$  était le seul constituant commun de  $J(\Lambda)$  (ou  $I_{\bar{d}}^-(\Lambda)$ ) et  $I_{\bar{d}}^+(\bar{\Lambda})$ . Comme précédemment, on en déduit l'égalité  $c(x, \epsilon) = 1$ .

On suppose désormais qu'il n'y a pas de  $\bar{x}, \bar{d}$  vérifiant (4). Montrons que :

(5) l'une des trois possibilités suivantes est vérifiée :

(a) il existe  $z \leq x - 2$  tel que  $\Lambda^\epsilon = \{x\} \cup [z, 0]$  ;

(b) il existe  $z' \geq x + d + 1$  tel que  $\Lambda^\epsilon = [z', x + d + 1] \cup [x + d - 1, 0]$  ;

(c)  $\Lambda^\epsilon$  est cuspidal.

Soit  $y$  le plus grand élément de  $\Lambda^\epsilon$ . Supposons  $y > x + d$ . S'il existe  $\bar{x} < y$ ,  $\bar{x} \neq x + d$ , tel que  $\bar{x} \notin \Lambda^\epsilon$ , on a  $\bar{x} \neq x$  puisque  $x \in \Lambda^\epsilon$ , et le couple  $\bar{x}, \bar{d} = y - \bar{x}$  vérifie (4), contrairement à l'hypothèse. Donc  $x + d$  est l'unique élément de l'intervalle  $[y, 0]$  qui n'appartient pas à  $\Lambda^\epsilon$  et (b) est vérifié pour  $z' = y$ . Supposons maintenant  $x + d \geq y$ . On n'a pas  $y = x + d$  puisque  $x + d \notin \Lambda^\epsilon$ . Donc  $x + d > y$ . Supposons  $x + d > y > x$ . S'il existe  $\bar{x} < y$  tel que  $\bar{x} \notin \Lambda^\epsilon$ , de nouveau le couple  $\bar{x}, \bar{d} = y - \bar{x}$  vérifie (4). Impossible, donc  $\Lambda^\epsilon = [y, 0]$  et (c) est vérifié. Supposons enfin  $x \geq y$ . Alors  $x = y$  puisque  $x \in \Lambda^\epsilon$ . Notons alors  $z$  le plus grand élément de

$\Lambda^\epsilon$  qui soit  $< x$ . On prouve de même que  $\Lambda^\epsilon = \{x\} \cup [z, 0]$ . Alors (a) est vérifié si  $x - 2 \geq z$  et (c) l'est si  $x - 1 = z$ . Cela prouve (5).

Supposons vérifiée la condition (a) ci-dessus. Soit  $(y, \nu) \in X_d(\Lambda)$  un élément autre que  $(x, \epsilon)$ . Notons (a'), (b') et (c') les conditions obtenues en remplaçant  $(x, \epsilon)$  par  $(y, \nu)$  dans les conditions (a), (b) et (c) ci-dessus. Les arguments précédents montrent que  $c(y, \nu) = 1$  sauf si, d'une part,  $\Lambda^{-\nu}$  est cuspidal et, d'autre part, l'une des conditions (a'), (b') ou (c') est vérifiée. Puisque  $\Lambda^\epsilon$  n'est pas cuspidal, la première condition impose  $\nu = \epsilon$ . Pour la même raison, (c') n'est pas vérifiée. La condition (a') non plus : elle impliquerait  $x = y$ . Il ne reste que (b'). On a alors à la fois :

$$\Lambda^\epsilon = \{x\} \cup [z, 0] = [z', y + d + 1] \cup [y + d - 1, 0].$$

Cela impose  $z = x - 2$  et  $y = x - d - 1$ .

Supposons d'abord  $x - 2 > z$ . On vient de montrer que  $c(y, \nu) = 1$  pour tout  $(y, \nu) \in X_d(\Lambda)$ ,  $(y, \nu) \neq (x, \epsilon)$ . Alors :

$$J(\Lambda) - I_d^-(\Lambda) = (c(x, \epsilon) - 1)\zeta_{d,\Lambda}(x, \epsilon)\Lambda_d(x, \epsilon).$$

L'égalité (3) s'écrit :

$$(c(x, \epsilon) - 1)(\Lambda_d(x, \epsilon), I_d^+(\bar{\Lambda})) = 0.$$

En appliquant cette égalité à  $\bar{d} = d$ ,  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ , on obtient  $c(x, \epsilon) = 1$ . Supposons maintenant  $x - 2 = z$ . On a  $c(y, \nu) = 1$  pour tout  $(y, \nu) \in X_d(\Lambda)$  avec  $(y, \nu) \neq (x, \epsilon)$ ,  $(y, \nu) \neq (x - d - 1, \epsilon)$  et (3) s'écrit :

$$((c(x, \epsilon) - 1)\zeta_{d,\Lambda}(x, \epsilon)\Lambda_d(x, \epsilon) + (c(x - d - 1, \epsilon) - 1)\zeta_{d,\Lambda}(x - d - 1, \epsilon)\Lambda_d(x - d - 1, \epsilon), I_d^+(\bar{\Lambda})) = 0.$$

Si  $d \geq 2$ , on prend  $\bar{d} = 1$ ,  $\bar{\Lambda}$  tel que  $\bar{\Lambda}^{-\epsilon} = \Lambda^{-\epsilon}$  et  $\bar{\Lambda}^\epsilon = \{x + d - 1\} \cup [x - 2, 0]$ . On vérifie que  $\Lambda_d(x, \epsilon)$  intervient dans la décomposition de  $I_d^+(\bar{\Lambda})$  tandis que  $\Lambda_d(x - d - 1, \epsilon)$  n'y intervient pas. L'égalité ci-dessus entraîne  $c(x, \epsilon) = 1$ . Si  $d = 1$ , soient  $\bar{d}_1 = 1$ ,  $\bar{d}_2 = 2$ ,  $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda$ ,  $\bar{\Lambda}_2$  tel que  $\bar{\Lambda}_2^{-\epsilon} = \Lambda^{-\epsilon}$  et  $\bar{\Lambda}_2^\epsilon = [x - 1, 0]$ . On vérifie que  $\Lambda_d(x, \epsilon)$  intervient dans la décomposition de  $I_{\bar{d}_1}^+(\bar{\Lambda}_1) + I_{\bar{d}_2}^+(\bar{\Lambda}_2)$ , tandis que  $\Lambda_d(x - d - 1, \epsilon)$  n'y intervient pas. D'où encore  $c(x, \epsilon) = 1$ . Cela achève la preuve dans le cas où (a) est vérifiée. Une preuve similaire s'applique si (b) l'est.

Reste le cas où (c) est vérifiée. Alors  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  sont tous deux cuspidaux. Puisque  $\text{def}(\Lambda) = 0$ , cela implique  $\text{rg}(\Lambda) = 0$ . A ce point, nous avons donc démontré l'assertion suivante :

(6) si  $s = (h_1, h_2, \Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{S}_{n'}$  vérifie  $(\text{rg}(\Lambda_1), \text{rg}(\Lambda_2)) \neq (0, 0)$ , alors  $R_{d,1}^- \circ \text{rep}_{n'}(s) = \text{rep} \circ I_{d,1}^-(s)$ .

Reprenons la démonstration en supposant  $\text{rg}(\Lambda) = 0$ . On peut supposer  $\Lambda^+ = \Lambda^- = [d - 1, 0]$ . On a l'égalité  $X_d(\Lambda) = \Lambda$ . Soit  $(x, \epsilon) \in X_d(\Lambda)$  avec  $x \neq 0$ . Définissons  $\bar{\Lambda}$  par  $\bar{\Lambda}^{-\epsilon} = [d - 1, 0]$  et  $\bar{\Lambda}^\epsilon = [d, x + 1] \cup [x - 1, 0]$  et posons  $\bar{d} = x$ . Un calcul comme on en a déjà fait montre que les seuls constituants communs de  $J(\Lambda)$ , ou  $I_d^-(\Lambda)$ , et  $I_d^+(\bar{\Lambda})$  sont  $\Lambda_d(x, \epsilon)$  et  $\Lambda_d(0, \epsilon)$ . L'égalité (3) s'écrit  $\alpha + \beta = \alpha c(x, \epsilon) + \beta c(0, \epsilon)$  où  $\alpha, \beta \neq 0$ . Puisque  $c(x, \epsilon)$  et  $c(0, \epsilon)$  sont des signes, cela entraîne  $c(x, \epsilon) = c(0, \epsilon)$ . On calcule :

$$(I_d^-(\Lambda), I_d^+(\Lambda)) = 0,$$

$$(J(\Lambda), I_d^+(\Lambda)) = \sum_{(x,\epsilon) \in X_d(\Lambda)} \epsilon c(x, \epsilon).$$

D'après ce qui précède, ce dernier terme vaut  $d(c(0, 1) - c(0, -1))$  et (3) entraîne que ce terme est nul. En conséquence  $c(x, \epsilon)$  est constant. En notant  $\nu$  cette constante, on a  $J(\Lambda) = \nu I_d^-(\Lambda)$ .

Comme on l'a dit au paragraphe 18, l'espace  $\mathbb{C}[S_d]$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[\hat{W}_d]$ , lui-même égal à l'espace des fonctions invariantes par conjugaison sur  $W_d$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(d)$ . Notons  $w(\alpha, \beta)$  un élément de la classe de conjugaison dans  $W_d$  paramétrée par  $(\alpha, \beta)$ ,  $\mathbf{1}_{\alpha, \beta}$  la fonction caractéristique de cette classe,  $Z_{W_d}(w(\alpha, \beta))$  le centralisateur de  $w(\alpha, \beta)$  dans  $W_d$ .

Posons  $s_{\alpha,\beta} = I_{\alpha_1}^+ \circ I_{\alpha_2}^+ \circ \dots \circ I_{\beta_1}^- \circ I_{\beta_2}^- \circ \dots(\Lambda)$ . Grâce à 18(1), cet élément de  $\mathbb{C}[S_d]$  s'identifie à  $|Z_{W_d}(w(\alpha,\beta))| \mathbf{1}_{\alpha,\beta}$ . Pour tout  $\rho \in \hat{W}_d$ , on a alors l'égalité :

$$(7) \quad \Lambda(\rho) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_2(d)} |Z_{W_d}(w(\alpha,\beta))|^{-1} \text{trace } \rho(w(\alpha,\beta)) s_{\alpha,\beta}.$$

Plongeons  $S_d$  dans  $\mathcal{S}_n$  par  $\Lambda' \mapsto (h_1, h_2, \Lambda', \Lambda_2)$ . Notons  $\check{\Lambda}(\rho)$  et  $\check{s}_{\alpha,\beta}$  les images de  $\Lambda(\rho)$  et  $s_{\alpha,\beta}$ . Je dis que :

(8) si  $(\alpha,\beta) \neq (\emptyset, (d))$  alors  $\text{rep}(\check{s}_{\alpha,\beta}) = k(\check{s}_{\alpha,\beta})$ .

Si  $\alpha \neq \emptyset$ , on peut écrire  $\check{s}_{\alpha,\beta} = I_{\alpha_1,1}^+(s')$  avec  $s' \in \mathcal{S}_{n-2\alpha_1}$ . En utilisant les lemmes 18, 19 et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\text{rep}(\check{s}_{\alpha,\beta}) = R_{\alpha_1,1}^+ \circ \text{rep}_{n-2\alpha_1}(s') = R_{\alpha_1,1}^+ \circ k_{n-2\alpha_1}(s') = k(\check{s}_{\alpha,\beta}).$$

Si  $\alpha = \emptyset$ , on a  $\beta_1 < d$ . On peut écrire  $\check{s}_{\alpha,\beta} = I_{\beta_1,1}^-(s')$  où  $s' \in \mathcal{S}_{n-2\beta_1}$  est une combinaison linéaire de termes  $(h_1, h_2, \Lambda', \Lambda_2)$  avec  $\text{rg}(\Lambda') = d - \beta_1$ . On raisonne comme précédemment, en remplaçant l'usage du lemme 19 par celui de (6) ci-dessus. Cela prouve (8)

En utilisant l'égalité  $J(\Lambda) = \nu I_d^-(\Lambda)$ , le même raisonnement conduit à l'égalité :

$$\text{rep}(\check{s}_{\emptyset,(d)}) = \nu k(\check{s}_{\emptyset,(d)}).$$

Posons  $\mathbf{w} = (h_1, h_2, d, 0, w(\emptyset, (d)), -)$ . C'est un élément de  $\mathcal{F}$  et on a  $k(\check{s}_{\emptyset,(d)}) = \phi(\mathbf{w})$ . On calcule  $|Z_{W_d}(w(\emptyset, (d)))| = 2d$ . En calculant  $k(\check{\Lambda}(\rho))$  et  $\text{rep}(\check{\Lambda}(\rho))$  grâce à l'égalité (7), on obtient l'égalité :

$$k(\check{\Lambda}(\rho)) + \frac{\nu-1}{2d} \phi(\mathbf{w}) = \text{rep}(\check{\Lambda}(\rho))$$

pour tout  $\rho \in \hat{W}_d$ . Si  $|h_2| > h_1$ , resp.  $|h_2| \leq h_1$ , prenons pour  $\rho$  la représentation  $\text{sgn}_{CD}^{h_1+s(h_2)}$ , resp.  $\text{sgn}_{CD}^{h_1}$ . Alors  $k(\check{\Lambda}(\rho))$  est égal à la fonction notée  $\phi(\rho_i)$  au paragraphe 8, où  $i = 1$ , resp.  $i = 2$  et  $\text{rep}(\check{\Lambda}(\rho)) = \gamma(\mu_1, \mu_2) \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)$ , où  $(\mu_1, \mu_2)$  est défini comme au paragraphe 16. Soit  $g = su$  un élément de  $\tilde{G}$  vérifiant les conditions du (i), resp. (ii), du corollaire 8. Ce corollaire nous dit que :

$$\phi(\rho_i)(g) = \alpha q^{\delta(h_1, h_2)/2}, \quad \phi(\mathbf{w})(g) = \beta q^{\delta(h_1, h_2)/2},$$

où  $\alpha, \beta \in \{\pm 1\}$ . Appliquons l'égalité précédente au point  $g$ . On obtient :

$$\alpha q^{\delta(h_1, h_2)/2} + \beta \frac{\nu-1}{2d} q^{\delta(h_1, h_2)/2} = \gamma(\mu_1, \mu_2) \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)(g).$$

Le terme de droite et le premier terme de gauche sont des entiers algébriques. Donc  $\frac{\nu-1}{2d} q^{\delta(h_1, h_2)/2}$  l'est aussi. Si  $d$  ne divise pas  $q^{\delta(h_1, h_2)/2}$ , cela entraîne  $\nu = 1$ . Alors  $J(\Lambda) = I_d^-(\Lambda)$  et cela achève la démonstration. Supposons que  $d$  divise  $q^{\delta(h_1, h_2)/2}$ . C'est donc une puissance de  $p$ . L'égalité précédente se récrit :

$$\frac{q^{\delta(h_1, h_2)/2}}{d} (\alpha d + \beta \frac{\nu-1}{2}) = \gamma(\mu_1, \mu_2) \text{trace}_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2)(g).$$

D'après le lemme 16, le membre de droite n'appartient pas à  $\sqrt{2}\mathbb{Z}_{alg}$ . A fortiori, l'entier  $\alpha d + \beta \frac{\nu-1}{2}$  est impair. Cela entraîne  $\nu = 1$ , d'où encore la conclusion.  $\square$

## 21. Preuve du théorème

Remarquons que :

(1) pour tout entier  $N \geq 1$ ,  $\mathbb{C}[S_N]$  est engendré par les images des homomorphismes  $I_d^\epsilon$  pour  $\epsilon = \pm$  et  $d = 1, \dots, N$ .

En effet, interprétons  $\mathbb{C}[S_N]$  comme  $\mathbb{C}[\hat{W}_N]$ , ou encore comme l'espace des fonctions sur  $W_N$  invariantes par conjugaison. Soit  $f$  une telle fonction, supposons-la orthogonale aux images des homomorphismes  $I_d^\epsilon$ . D'après 18(1), pour tous  $\epsilon = \pm$ ,  $d \in \{1, \dots, N\}$ ,  $w' \in W_{N-d}$ , on a  $f(w^\epsilon(d) \times w') = 0$ . Mais tout élément de  $W_N$  est conjugué à un élément  $w^\epsilon(d) \times w'$  pour  $\epsilon$ ,  $d$  et  $w'$  convenablement choisis. Donc  $f = 0$ , ce qui prouve (1).

Notons  $\mathcal{S}_{n,cusp}$  l'ensemble des  $(h_1, h_2, \Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{S}_n$  tels que  $rg(\Lambda_1) = rg(\Lambda_2) = 0$  (et donc  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ ). Notons  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind}$  le sous-espace de  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  engendré par les images des homomorphismes  $I_{d,j}^\epsilon$ , pour  $\epsilon = \pm$ ,  $d = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $j = 1, 2$ . D'après (1), on a l'égalité  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n] = \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind} \oplus \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}]$ . Cette décomposition est orthogonale. On a :

(2) pour tout  $s \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind}$ ,  $rep(s) = k(s)$ .

En effet, on peut supposer  $s = I_{d,j}^\epsilon(s')$ , avec  $s' \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_{n'}]$ ,  $n' + 2d = n$ ,  $d \geq 1$ ,  $\epsilon = \pm$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . En utilisant le lemme 18, l'un des lemmes 19 ou 20 et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$rep(s) = rep \circ I_{d,j}^\epsilon(s') = R_{d,j}^\epsilon \circ rep_{n'}(s') = R_{d,j}^\epsilon \circ k_{n'}(s') = k \circ I_{d,j}^\epsilon(s') = k(s).$$

Cela entraîne :

(3)  $rep(\mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}]) = k(\mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}])$ .

En effet, d'après le lemme 13,  $k(\mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}])$  est inclus dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$ . Il est aussi orthogonal à  $k(\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind})$  donc, d'après (2), à  $rep(\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind})$ . Mais l'orthogonal de  $rep(\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{ind})$  dans  $\mathcal{C}(\tilde{G})_{qu}$  est  $rep(\mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}])$ . D'où l'inclusion du membre de droite de (3) dans celui de gauche, puis leur égalité par égalité de leurs dimensions.

Soit  $(h_1, h_2) \in \mathcal{F}_{cusp}$ , posons  $s = (h_1, h_2, \Lambda_0, \Lambda_0)$ , où  $\Lambda_0$  est l'unique symbole de rang 0, notons  $(\mu_1, \mu_2)$  l'élément de  $\mathcal{P}_2(n)$  tel que  $\Lambda_{rep}(\mu_1, \mu_2) = s$ . C'est le couple associé à  $(h_1, h_2)$  au paragraphe 11. Par définition,

$$rep(s) = \gamma(\mu_1, \mu_2) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2) = \gamma(h_1, h_2) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2).$$

D'après (3), on peut écrire :

$$(4) \quad \gamma(h_1, h_2) trace_{\tilde{G}} \pi^+(\mu_1, \mu_2) = \sum_{(h'_1, h'_2) \in \mathcal{F}_{cusp}} x(h'_1, h'_2) \phi(h'_1, h'_2),$$

avec des coefficients  $x(h'_1, h'_2) \in \mathbb{C}$ . En comparant les normes, on a l'égalité :

$$(5) \quad \sum_{(h'_1, h'_2) \in \mathcal{F}_{cusp}} |x(h'_1, h'_2)|^2 = 1.$$

Utilisons les définitions des paragraphes 9 et 12 relatives au couple  $(h_1, h_2)$  et soit  $\mathbf{t}$  comme au paragraphe 9. L'égalité (4) entraîne :

$$\gamma(h_1, h_2) d_{\mathbf{t}}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{(h'_1, h'_2) \in \mathcal{F}_{cusp}} x(h'_1, h'_2) c_{\mathbf{t}}(h'_1, h'_2).$$

Grâce aux lemmes 9 et 12, cette égalité se simplifie en :

$$\prod_{j \in J(h_1, h_2)} \eta(t_j) = \begin{cases} x(h_1, h_2) \left( \prod_{j \in J(h_1, h_2)} \eta(t_j) \right) + x(h_1, -h_2) \left( \prod_{j \in J(h_1, -h_2)} \eta(t_j) \right), & \text{si } h_2 \neq 0, \\ x(h_1, 0) \left( \prod_{j \in J(h_1, 0)} \eta(t_j) \right), & \text{si } h_2 = 0. \end{cases}$$

Si  $h_2 = 0$ , on en déduit  $x(h_1, 0) = 1$ . Si  $h_2 \neq 0$ , on remarque que les différents produits sont, en tant que fonctions de  $\mathbf{t}$ , des caractères du groupe  $\mathbb{F}_q^{\times, N}$  dans lequel varie  $\mathbf{t}$ . L'indépendance linéaire des caractères entraîne que  $x(h_1, -h_2) = 0$  et  $x(h_1, h_2) = 1$ . L'égalité (5) entraîne ensuite que  $x(h'_1, h'_2) = 0$  pour tout  $(h'_1, h'_2) \neq (h_1, h_2)$ . Alors  $rep(s) = k(s)$ . Cela démontre que  $rep$  et  $k$  coïncident sur  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_{n,cusp}]$ . Joint à (2), ce résultat démontre le théorème.  $\square$

## Bibliographie

- [A] T. Asai : Unipotent class functions of split special orthogonal groups  $SO_{2n}^+$  over finite fields, *Comm. Algebra* 12 (1984), 517-615
- [AMR] A.-M. Aubert, J. Michel, R. Rouquier : Correspondance de Howe pour les groupes réductifs sur les corps finis, *Duke Math. J.* 83 (1996), 353-397
- [CR] C. Curtis, I. Reiner : *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders*, vol. 1, Wiley Interscience (1981)
- [DM] F. Digne, J. Michel : Groupes réductifs non connexes, *Ann. Scient. ENS* 27 (1994), 345-406
- [L1] G. Lusztig : Character sheaves V, *Adv. in Math.* 61 (1986), 103-165
- [L2] ——— : Character sheaves on disconnected groups III, *Representation Th.* 8 (2004), 125-154
- [L3] ——— : ———-IV, *Representation Th.* 8 (2004), 155-188
- [L4] ——— : ———- V, *Representation Th.* 8 (2004), 346-376
- [L5] ——— : Green functions and character sheaves, *Annals of Math.* 131 (1990), 355-408
- [S] N. Spaltenstein : *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Springer L.N. 946 (1980)
- [W1] J.-L. Waldspurger : Une conjecture de Lusztig pour les groupes classiques, *Mémoires SMF* 96 (2004)
- [W2] ——— : Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés, *Astérisque* 269 (2001)

CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu  
175, rue du Chevaleret  
75013 Paris