

Curriculum Vitae (janvier 2009)

Nom : Uribe Vargas **Prénom** : Eduardo Ricardo

Né à Mexico le 7 décembre 1965, Nationalité : Mexicaine

Fonctions : Chercheur contractuel à l'Université de Liverpool, Royaume-Uni.

ÉTUDES ET ACTIVITÉS PRÉDOCTORALES

1987 (octobre) Licence de Physique - Faculté de Sciences, Université Nationale Autonome du Mexique (FC-UNAM).

1992 (mars) Diplôme de Maîtrise de Mathématiques. Prof. S. López de Medrano.

1991-93 *Professeur assistant* au Département de Mathématiques de la FC-UNAM pour les cours de Calcul différentiel et intégral, géométrie moderne et géométrie projective au niveau DEUG et Licence ; et géométrie différentielle au niveau Maîtrise.

1993 (février) Obtention d'une bourse (de 5 ans) de l'UNAM pour faire des études en France.

1994 (juin) Diplôme du DEA de Mathématiques à l'Université Paris 7 avec Prof. Marc Chaperon.

1998-2002 *Chercheur contractuel* à l'Université Paris 7 dans le projet de recherche en exploration pétrolière pour l'entreprise ELF : *étude portant sur les aspects mathématiques liés à la compréhension des interfaces du sous-sol*.

2001 (le 20 juin) Doctorat de Mathématiques à l'Université Paris 7. Titre de la Thèse :

Singularités symplectiques et de contact en géométrie différentielle des courbes et des surfaces.

Directeur : Vladimir I. Arnold.

RÉCOMPENSES SCIENTIFIQUES

Prix Nathalie Demassieux 2002 de la Chancellerie des Universités, Académie de Paris ;

Prix Hugot 2003 du Collège de France.

ACTIVITÉS POSDOCTORALES

2001-2002 (année universitaire) *Chercheur contractuel* à l'Université Paris 7 dans le projet de recherche en mathématiques appliquées pour l'entreprise ELF (décrit ci-dessus).

2002-2003 ATER à l'Université Paris 8.

2003-2005 Maître de Conférences Associé du Collège de France.

Mars 2006-février 2008 Mathematics "Research Fellow" à l'ICTP (Trieste) Italie.

Mars-juin et septembre-décembre 2008 chercheur contractuel à l'Université de Liverpool (collaboration avec P. Giblin).

2006 (le 13 décembre) Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches en sciences.

D'avril 2001 jusqu'à février 2006, j'ai été l'organisateur (concernant tous les aspects) du *Séminaire d'Arnold "Sur les Singularités"* à Paris.

RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

De septembre 1998 à mars 2002, j'ai travaillé (à l'Université Paris 7, équipe *Géométrie et dynamique*, pour l'entreprise ELF) dans le projet de recherche : *étude portant sur les aspects mathématiques liés à la compréhension des interfaces du sous-sol*.

Dans ce projet, j'ai utilisé les géométries de contact et symplectique – caustiques et fronts d'onde – pour modéliser la propagation d'ondes sismiques dans le sous-sol, et, alors, pour décrire les formes des interfaces dans le sous-sol (obtenant ainsi des formules d'optique géométrique).

INTERÊTS SCIENTIFIQUES

Théorie des singularités. Géométries différentielle, de contact et symplectique. Equations différentielles implicites. Propagation d'ondes et caustiques. Systèmes dynamiques dans les groupes finis et en théorie des nombres. Sciences de la vision par ordinateur. Géométrie tropicale.

LISTE DE PUBLICATIONS

Publications dans des revues avec comité de lecture.

1. On the higher dimensional four-vertex theorem, C.R.A.S. Paris, t.321, I (1995) 1353-1358.
2. On the $(2k+2)$ -vertex and $(2k+2)$ -flattening theorems in higher dimensional Lobatchevskian space, C.R. Acad. Sci. Paris, t.325, Série I (1997) 505-510.
3. Four-Vertex Theorems in Higher Dimensional Spaces for a Larger Class of Curves than the Convex Ones, C.R. Acad. Sci. Paris, t.330, Série I (2000) 1085-1090.
4. Weak Convexity does not Imply Convexity for Curves in $\mathbb{R}P^n$, $n > 2$, C.R. Acad. Sci. Paris, t.335, Série I (2002) 47–52.
5. On 4-Flattening Theorems and the Curves of Carathéodory, Barner and Segre, Journal of Geometry **77** (2003) 184-192.
6. On the Stability of Bifurcation Diagrams of Vanishing Flattening Points, Funct. Anal. and its Appl., **37** :3 (2003) 236–240.
7. Rigid Body Motions and Arnold’s Theory of Fronts on \mathbb{S}^2 , Journal of Geometry and Physics **45** (2003) pp. 91-104.
8. On Polar Duality, Lagrange and Legendre Singularities and Stereographic Projection to Quadrics, Proc. London Math. Soc. **87**/3 (2003) 701-724.
9. Four-Vertex Theorems, Sturm Theory and Lagrangian Singularities, Mathematical Physics, Analysis and Geometry **7** (2004) 223-237.
10. On Singularities, “Perestroikas” and Differential Geometry of Space Curves, L’Enseignement Mathématique, t. **50** (2004) 69–101.
11. On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry of Space Curves, Bull. of the Brazilian Math. Soc., **36** :3, (2005) 285-307.
12. Topology of Dynamical Systems in Finite Groups and Number Theory. Bull. des Sci. Mathématiques **130** :5 (2006) 377-402.
13. A Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve. Moscow Mathematical Journal, **6** :4, (2006) 731-768.
14. Arithmetics of the numbers of orbits of the Fermat-Euler dynamical systems. Funct. Anal. and Other Maths. Vol. **1**, No. 1 (2006) 71-83.

Publications dans des actes de congrès avec comité de lecture

15. On the Theory of Fronts on the 2-Sphere and the Theory of Space Curves, (Proc. of Suzdal Int. Conf. 2002 on Diff. Eqs. and Dyn. Syst.) J. of Math. Sciences **126**(4) (2005) 1344–1353.

Articles soumis

16. Surface Evolution, Implicit Differential Equations and Pairs of Legendrian Fibrations, 48p.

Articles en préparation

17. A graphic version of Shanks’ algorithm in finite groups (by the monads).
18. Revisiting the 4-vertex theorem for the “newborn” curves.
19. On the lines of principal curvature at the godrons of smooth surfaces.
20. A geometric invariant of the hyperbonodes of surfaces.
21. Lectures on Legendrian and Lagrangian Singularities in Elementary Differential Geometry.
22. Arithmetics of the numbers of orbits of the Fermat-Euler dynamical systems II.
23. (avec Peter Giblin) On tangent sections of a surface and its vertex curve.
24. (avec E. Munguía) On the Tropical Version of Desargues Theorem.

Autres publications

25. Participation dans le livre *Arnold Problems*, Springer Verlag, 2004.
26. **Livre “in print”** : “Geometry”, Cambridge Univ. Press, avec V.I. Arnold et G. Capitanio.

Ici, je décris une partie de mes travaux. En particulier les travaux [8], [9], [10], [11], [16], [13], [12] et [6] de la liste de publications. Je fais aussi des petits commentaires sur les articles [14], [22], [17], [19], [20] et [24].

1. Dualité polaire, singularités lagrangiennes et legendriennes et projections stéréographiques. Considérons $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. J'ai établi la correspondance entre la géométrie différentielle euclidienne des sous-variétés de \mathbb{R}^n et la géométrie différentielle projective des sous-variétés de \mathbb{R}^{n+1} par la projection stéréographique ρ sur des *quadriques de quasi-révolution* (qui généralisent celles de révolution, cf. [8]). En 1994, V.D. Sedykh a prouvé que les singularités lagrangiennes de l'*application normale* (cf. [8]) associée à une sous-variété V de l'espace Euclidien correspondent aux singularités legendriennes de l'*application tangentielle* (cf. [8]) qui est associée à l'image de V par la projection stéréographique sur une hypersphère.

J'ai étendu le théorème de Sedykh en plusieurs directions : (1) J'ai prouvé que la correspondance établie par Sedykh est valable pour toute *projection stéréographique* ρ d'un hyperplan sur une quadrique de quasi-révolution dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. (2) J'ai prouvé que la relation la plus naturelle entre singularités lagrangiennes et legendriennes est quand la quadrique est un parabolôïde. Dans ce cas, les calculs, les formules et les démonstrations sont beaucoup plus simples. (3) J'ai donné la construction explicite de l'isomorphisme naturel entre le front de la variété lagrangienne de l'application normale (considérée comme une sous-variété de $J^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) et le front de la variété legendrienne de l'application tangentielle (considérée comme une sous-variété de l'espace dual $(\mathbb{R}^{n+1})^\vee$). Cette construction relie la théorie des singularités des applications lagrangiennes et legendriennes avec la théorie classique de pôles, polaires et dualité polaire par rapport à une quadrique. (4) Soit \mathcal{Q} une quadrique de quasi-révolution de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Avec l'isomorphisme de (3), j'ai prouvé que l'application normale associée à une sous-variété V de $\mathbb{R}^n \times \{b\}$ consiste de la composition de trois applications : (a) l'application tangentielle associée à la sous-variété $\rho(V) \subset \mathcal{Q}$; (b) l'application de *dualité polaire* par rapport à \mathcal{Q} ; et (c) la projection 'verticale' de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n \times \{b\}$ depuis le pôle $N \in \mathcal{Q}$ de la projection stéréographique ρ . En particulier, la projection verticale depuis N de "l'arête cuspidale" du front de $\rho(V)$ (obtenu de $\rho(V)$ par dualité polaire) sur $\mathbb{R}^n \times \{b\}$ est la caustique de V par l'application normale. Je rappelle que l'image d'une application legendrienne est son *front* et que les valeurs critiques d'une telle application forment l'*arête cuspidale* du front.

Avec la projection stéréographique sur un parabolôïde de révolution, j'ai retrouvé (de façon complètement géométrique) une formule très pratique et simple pour calculer les sommets d'une courbe de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (que j'avais découvert par des méthodes analytiques, voir le sujet 2). Cette projection sur un parabolôïde peut être utilisée pour l'étude des ombilics des surfaces de \mathbb{R}^3 , ou plus généralement pour l'étude du contact de sous-variétés de \mathbb{R}^n avec k -sphères en termes du contact de sous-variétés de \mathbb{R}^{n+1} avec k -plans (qui est beaucoup plus facile à étudier).

2. Théorie de Sturm, systèmes de Chebyshev et sommets de courbes de \mathbb{R}^{m+1} [9]. Une courbe convexe $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ définit un système de Chebyshev de fonctions sur \mathbb{S}^1 et vice-versa. Les systèmes fondamentaux de solutions des opérateurs différentiels linéaires homogènes *disconjugués* $L : C^\infty(\mathbb{S}^1) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1)$ sont des systèmes de Chebyshev. En appliquant la théorie de Sturm des systèmes de Chebyshev et la théorie des singularités de familles génératrices de variétés lagrangiennes j'ai donné une nouvelle démonstration du théorème des $2k+2$ sommets : *une courbe convexe de \mathbb{R}^{2k} , a au moins $2k+2$ points où son hypersphère osculatrice est surosculante*. Avec cette technique, j'ai découvert une formule pour calculer les sommets d'une courbe de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (voir sujet 1), et j'ai démontré que la borne $2k+2$ est optimale.

3. Métamorphoses des courbes spatiales et sommets de Darboux [10]. Soit γ une courbe gauche de \mathbb{R}^3 . J'ai étudié les relations entre les *aplatissements* (points où le plan osculateur est stationnaire) et les *sommets de Darboux* (points où l'axe instantané de rotation du trièdre de Frenet de γ , appelé *axe de Darboux*, est stationnaire). J'ai prouvé qu'il y a 2 types de sommets de Darboux, que j'ai noté par m -D-sommets et M -D-sommets. Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe lisse. Notons par $M(\gamma)$, $m(\gamma)$ et $A(\gamma)$ le nombre de ses M -D-sommets, m -D-sommets et aplatissements, respectivement. J'ai démontré qu'il y a une relation universelle entre le nombre de points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire et le nombre de points où l'axe de Darboux est stationnaire : *Toute courbe fermée générique $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait $m(\gamma) - M(\gamma) - A(\gamma) = 0$.*

J'ai étudié les métamorphoses des sommets de Darboux et d'aplatissements dans les familles génériques à un paramètre. Il y a trois types de métamorphoses possibles, selon que, au moment de la transition, la courbe a : un bi-aplatissement, une inflexion (point de courbure nulle) ou un sommet de Darboux multiple. La théorie classique de Frenet pour les courbes de \mathbb{R}^3 est définie uniquement pour les courbes qui ont courbure positive partout. Ainsi, presque tous les théorèmes sur les courbes (classiques ou nouveaux) évitent les inflexions. J'ai fait une révision de la théorie de Frenet pour les inflexions ; ils ont, en fait, une géométrie très intéressante : j'ai prouvé que *lors d'une métamorphose de type inflexion, un m -D-sommet de la courbe est remplacé par cinq points voisins sur la courbe, qui sont dans l'ordre un m -D-sommet, un aplatissement, un m -D-sommet, un aplatissement et un m -D-sommet* (la métamorphose en sens opposé étant également possible).

Les indicatrices tangente et binormale d'une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont des fronts d'onde équidistants sur \mathbb{S}^2 , associés à la courbe legendrienne de l'espace des repères orthogonaux $ST^*\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}P^3$ (cf. [7]), qui consiste des repères de Frenet le long γ . L'intersection de l'axe de Darboux de γ (translaté à l'origine) avec la sphère unité, est une courbe qui s'appelle *indicatrix de Darboux* de γ et qui est la caustique des indicatrices tangente et binormale.

En appliquant la théorie courbes legendriennes de $ST^*\mathbb{S}^2$ et des caustiques et fronts d'onde sur \mathbb{S}^2 (cf. [7]), j'ai décrit les bifurcations des indicatrices tangente, binormale et de Darboux, lors d'une métamorphose de type inflexion.

Le mouvement rigide déterminé par le repère de Frenet d'une courbe dans \mathbb{R}^n admet un axe instantané de rotation uniquement si n est impaire. On appelle *sommet de Darboux* un point d'une courbe pour lequel l'axe instantané de rotation est stationnaire. J'ai prouvé que *étant donnée une courbe $\gamma \in \mathbb{R}^{2k+1}$ de courbures k_1, k_2, \dots, k_{2k} , une condition nécessaire et suffisante pour que γ ait un sommet de Darboux en $s = s_0$ est que $(k_2/k_1)' = 0, (k_4/k_3)' = 0, \dots, (k_{2k}/k_{2k-1})' = 0$ en $s = s_0$.*

4. Courbures focales, équations scalaires de Frenet et caustiques des courbes de \mathbb{R}^n [11]. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ une courbe lisse (une source de lumière). La *caustique* de γ (l'enveloppe des rayons de lumière normales à γ) est une hypersurface singulière et stratifiée. La *courbe focale* de γ , C_γ , est la strate singulière de dimension 1. La courbe focale C_γ consiste des centres des sphères osculatrices de γ et peut être paramétrée en termes du repère de Frenet de γ ($\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$), comme $C_\gamma(\theta) = (\gamma + c_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2 + \dots + c_m\mathbf{n}_m)(\theta)$. Les coefficients c_1, \dots, c_m sont des fonctions lisses que j'appelle *courbures focales* [11]. Les courbures euclidiennes de γ , $\kappa_1, \dots, \kappa_m$, forment un système de m fonctions qui déterminent la courbe γ à translation et rotation près. J'ai prouvé qu'elles sont reliées aux courbures focales par la formule suivante :

$$\kappa_i = \frac{c_1 c_1' + c_2 c_2' + \dots + c_{i-1} c_{i-1}'}{c_{i-1} c_i}, \quad \text{pour } i \geq 2,$$

ce qui montre que *les courbures focales déterminent aussi la courbe γ à translation et rotation près*. Ces fonctions n'avaient pas été considérées avant, sauf par Romero-Fuster, Sanabria-Codesal et

Nuño-Ballesteros (qui travaillent en théorie des singularités et) qui ont cherché une telle formule, mais n'ont pas abouti.

Les équations de Frenet de γ sont un système de $m + 1$ équations qui relient les vecteurs du repère de Frenet avec leurs dérivées. J'ai démontré que les courbures focales de γ satisfont un *système d'équations scalaires de Frenet* qui "est obtenu des équations de Frenet usuelles en remplaçant le i -ème vecteur normal du repère de Frenet par la i -ème courbure focal".

J'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes, en termes des courbures focales, pour que le rayon de la sphère osculatrice k -dimensionnelle de γ soit critique, pour $k = 1, \dots, m - 1$. J'ai prouvé qu'un point de γ est un sommet si et seulement si $c'_m + c_{m-1}\kappa_m = 0$ en ce point (les sommets de γ correspondent aux points les plus singuliers de la caustique de γ) et que γ habite sur une hypersphère si et seulement si $c'_m + c_{m-1}\kappa_m \equiv 0$.

J'ai prouvé que le repère de Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m)$ de C_γ en $C_\gamma(s)$ est, à signes près, $(\mathbf{n}_m, \mathbf{n}_{m-1}, \dots, \mathbf{t})$ en $\gamma(s)$, et que les courbures euclidiennes K_1, \dots, K_m de C_γ sont reliées à celles de γ par $\frac{K_1}{|\kappa_m|} = \frac{K_2}{\kappa_{m-1}} = \dots = \frac{K_m}{\kappa_1} = \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}$, ce qui donne une solution partielle du *problème inverse : étant donnée la caustique, reconstruire la source de lumière*. Ces théorèmes sont liés à mon ancien travail de recherche à Paris 7 pour l'entreprise ELF.

5. Problème de Mumford sur la courbe flecnodale et équations différentielles implicites. Soit S une surface générique et lisse de \mathbb{R}^3 . Les points d'inflexion des courbes asymptotiques (dans le domaine hyperbolique) de S forment la *courbe flecnodale* de S . J'ai résolu le problème que D. Mumford a posé au milieu des années quatre vingts (après les travaux de Salmon, Cayley, Thom, Arnold et Platonova) : *trouver toutes les métamorphoses des configurations des courbes parabolique et flecnodale, sur les surfaces dépendant génériquement d'un paramètre*. J'ai donné la liste de toutes ces métamorphoses (il y en a 14) [16], cette liste est aussi valable pour les surfaces de \mathbb{S}^3 , $\mathbb{R}P^3$ et de l'espace hyperbolique Λ^3 . Un exemple : *la naissance d'une courbe parabolique fermée, qui borne un disque hyperbolique, engendre la naissance d'une courbe flecnodale inscrite dans la courbe parabolique et qui a l'allure du nombre 8*.

Pour résoudre le problème de Mumford, j'ai ramené l'étude de la géométrie différentielle projective de S à l'étude de contours apparents de surfaces dans une variété de contact de dimension 3 où il y a une paire de fibrations legendriennes transverses. Cette théorie de paires de fibrations legendriennes et de contours apparents m'a conduit à donner une définition abstraite de *point d'inflexion*. Avec cette théorie, j'ai résolu le "problème de Mumford" pour les configurations de la courbe discriminante et de la courbe des inflexions des solutions des équations différentielles implicites dans des familles génériques à 1 paramètre, (dont le problème des surfaces est un cas particulier) : il y 15 métamorphoses et la liste diffère beaucoup de celle des surfaces !

6. Un nouveau invariant pour les queues d'aronde et les Godrons. Un *godron* d'une surface générique de \mathbb{R}^3 est un point parabolic où la direction asymptotique est tangent à la courbe parabolique. Bien que les godrons ont été étudiés par Salmon, Cayley et Zeuthen en gométrie algebrique énumérative, par Korteweg en thermodynamique, et par Thom, Arnold, Bruce, Giblin, etc., en théorie des singularités, ils attirent encore aux singularistes et aux géomètres.

J'ai démontré que *si une courbe lisse d'une surface de \mathbb{R}^3 est tangent à la courbe parabolique en un godron g alors soit elle a torsion zéro ou soit elle a courbure zéro en g* . La *courbe conodale* d'une surface S est la fermeture du lieu géométrique des points de contact de S avec ses plans bitangents (plans tangents à S en au moins deux points distincts). Il est connu qu'un godron est un point de tangence simple des courbes conodale, flecnodale et parabolique. J'ai trouvé toutes les configurations possibles formées par ces trois courbes et par la droite asymptotique en un godron, en termes d'un nouveau invariant projective associé aux godrons et aux queues

d'aronde que j'ai introduit [13]. J'ai donné toutes les configurations locales génériques de la courbe flecnodale au voisinage d'une queue d'aronde d'un front en position générale dans \mathbb{R}^3 (4 configurations en total). Plus généralement, au voisinage d'une queue d'aronde, j'ai donné toutes les configurations locales génériques de l'arête de rebroussement, la ligne de points doubles et la courbe flecnodale par rapport au plan tangent (7 en total). J'ai démontré d'autres théorèmes locaux concernant les indices des godrons. Un résultat global : *une courbe parabolique fermée (qui borne un disque hyperbolique) a un nombre pair positif de godrons. En plus, dans ce disque hyperbolique, la courbe flecnodale a un nombre impair de points d'auto-intersection transversale.*

7. Systèmes dynamiques et graphes orientés dans le groupes finis : les monades.

Considérons un ensemble fini G . Une monade M est un graphe d'arêtes orientées (flèches), dont les sommets sont les éléments de G et tel que de chaque sommet commence exactement une flèche. Un tel graphe définit de manière unique une application $f : G \rightarrow G$ de l'ensemble G dans lui même et vice-versa. L'itération de f définit un système dynamique sur G (et sur les sommets de M) : $x \rightarrow f(x) \rightarrow f^2(x) \rightarrow f^3(x) \rightarrow \dots$, où $f^{j+1}(x) := f(f^j(x))$. Les systèmes dynamiques des monades ont une propriété fondamentale : *chaque composante connexe d'une monade consiste soit d'un cycle ou soit d'un cycle attracteur équipé avec des arbres enracinés (on joint un arbre, par sa racine, à chaque sommet du cycle).*

Si G possède une structure algébrique (par exemple, de group ou de corps), les invariants discrets du graphe M et l'étude du système dynamique associé à la monade, peuvent fournir information sur la structure algébrique de G . Pour le cas où G est un group fini arbitraire **Arnold** a considéré la *monade carrée* qui envoie chaque élément du groupe sur son carré, $x \mapsto x^2$, et il a démontré un **théorème d'homogénéité** : *chaque composante connexe du graphe de la monade carrée est un cycle équipé homogènement (les arbres attirés sont tous isomorphes le long de la composante).* Pour le cas des groupes commutatifs Arnold a aussi décrit la structure des arbres.

Soit k un entier et considérons la *monade de Frobenius* $f_k : x \mapsto x^k$, pour un groupe fini arbitraire G . **(A)** J'ai étendu le théorème d'homogénéité d'Arnold pour les monades f_k , pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (ma démonstration est plus simple que celle d'Arnold). **(B)** Dans le cas où G est commutatif : (1) j'ai aussi décrit la structure des arbres et j'ai prouvé que les arbres attirés par les sommets des cycles sont isomorphes non seulement le long de chaque composante connexe mais le long du graphe tout entier. (2) j'ai prouvé que la composante connexe de l'élément unité, \mathbb{I}^{f_k} , est un sous-groupe de G et que la réunion de tous les cycles (E. Ghys l'appelle le *cœur* de la monade) est aussi un sous-groupe de G . En plus, le cœur est isomorphe au group quotient G/\mathbb{I}^{f_k} , et son ordre est égal au plus grand facteur de $|G|$ relativement premier avec k . **(C)** Pour un groupe arbitraire (pas nécessairement commutatif) : (1) les arbres attirés sont isomorphes le long de chaque composante connexe, mais pas nécessairement le long du graphe; j'ai prouvé que les arbres attirés par les sommets d'un cycle sont isomorphes à un sous-arbre enraciné de l'arbre enraciné qui équipe la composante de l'unité : "la composante de l'unité est équipé de l'arbre le plus grand". (2) la composante de l'unité n'est pas en générale un sous-groupe de G , mais j'ai prouvé qu'elle est toujours un sous-ensemble distingué de G (invariant par conjugaison). (3) pour démontrer (1), j'ai construit des applications naturelles A que envoient une composante connexe de la monade sur elle même et telles que chaque élément b du cycle est envoyé à l'élément suivant b^k et l'arbre joint à b est envoyé isomorphiquement sur l'arbre joint à b^k . Après l'itération de application A , l'arbre joint à b revient sur lui même, mais pas nécessairement chaque élément revient sur lui même. J'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes sur G et k pour avoir une monodromie non-triviale (elles ne dépendent que des relations arithmétiques entre $|G|$ et k).

Tous ces résultats se trouvent dans [12]. Après mon exposé dans le séminaire d'Anatoly Vershik à St. Petersburg, S. Duzhin a montré deux groupes différents d'ordre 27 dont les monades carrées, $f_2 : x \mapsto x^2$, sont isomorphes. En fait, j'ai montré que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les monades de Frobenius $f_k : x \mapsto x^k$ des groupes présentes par Duzhin sont isomorphes. C'est-à-dire l'isomorphisme des monades de Frobenius $f_k : x \mapsto x^k$ n'implique pas l'isomorphisme des groupes.

8. Stabilité du diagramme de bifurcation des aplatissements[6]. Soit $F_{\lambda,r}$ une famille de courbes gauches évanescents de \mathbb{R}^3 , considérées comme des intersections d'une surface lisse (dépendant de paramètres $\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}^k$) avec une famille de cylindres dont le rayon r tend vers zéro. Le *diagramme de bifurcation des aplatissements* de $F_{\lambda,r}$ consiste des paires $(\lambda, c) \in \Lambda \times \mathbb{R}$, où $c = r^2$, telles que la courbe correspondant possède un aplatissement dégénéré ou bien n'est pas lisse. L'intersection du diagramme de bifurcation avec un espace transversal de dimension 3 est une coupe parabolique, basée sur un hypocycloïde à six rebroussements. C'est la première fois qu'on trouve un tel diagramme de bifurcation en théorie de singularités. L'étude des formes normales de ces diagrammes, à difféomorphisme près, se situe à mi-chemin entre le comptage global des aplatissements des courbes fermées et la théorie locale des singularités de germes de fonctions, mais je l'ai réduit à un problème local (1996). V.I. Arnold a conjecturé (1993) que le type différentiable de ce diagramme a des modules fonctionnelles. J'ai démontré (1999) qu'il a au plus un module [6]. Ces résultats impliquent qu'une courbe convexe plane nouveau-née (générique) a exactement 4 sommets. Par exemple, l'intersection d'une surface générique convexe S avec un plan suffisamment proche de son plan tangent (et parallèle) en un point pas ombilic, est une courbe qui a 4 sommets. Si le point est un ombilic de S , alors la courbe a 6 sommets [18].

La démonstration n'est pas facile, elle a nécessité un recours à une nouvelle technique de l'analyse, vu que la singularité doit être déformée à l'intérieur d'un espace de codimension infinie, qui est l'image d'un opérateur différentiel. En particulier, j'ai introduit un théorème de détermination finie adapté à cette contrainte.

9. Arithmétique des nombres d'orbites des systèmes dynamiques de Fermat-Euler.

Notons par $\mathcal{E}(n)$ le sous-groupe multiplicatif de l'anneau \mathbb{Z}_n , qui consiste des résidus modulo n , qui sont relativement premiers avec n . Le nombre d'éléments de $\mathcal{E}(n)$ est noté par $\varphi(n)$, et l'application $n \mapsto \varphi(n)$ est connue comme la *fonction d'Euler*.

Considérons dans $\mathcal{E}(n)$ le système dynamique \hat{a} qui multiplie les éléments de $\mathcal{E}(n)$ par a , $x \mapsto ax$ (on suppose $(a, n) = 1$). Le système dynamique \hat{a} agit comme une permutation des éléments de $\mathcal{E}(n)$ dont toutes les orbites ont la même période.

Soit M un entier positif. Nous disons qu'un nombre n tel que $(n, a) = 1$, appartient à la classe $(M_+)_a$ si le nombre d'orbites du système dynamique $\hat{a} : \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(n)$ est un multiple de M .

On considère le cas $a = 2$. La classe $(M_+)_2$ est un idéal du semi-groupe multiplicatif des nombres impaires. Arnold a observé expérimentalement que pour les entiers $M = 3, 5, 8$, les nombres premiers < 512 qui appartient à $(M_+)_2$ sont des résidus quadratiques modulo M^2 , mais que cela n'est pas vrai pour $M = 6$. Il n'a pas trouvé une explication théorique de cela.

Théorème. [16] *Soit $M > 1$ un entier. Si M est impair ou bien divisible par 2^k pour $k \geq 2$, alors tous les nombres premiers appartenant à $(M_+)_2$ sont des résidus quadratiques modulo M^2 .*

La démonstration dépend "essentiellement" de la structure du graphe de la monade $x \mapsto 2x$ du group additive $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ (voir sujet 7).

Le théorème correspondant pour a un nombre premier arbitraire, est :

Théorème. [22] *Soit $M > 1$ un entier. Si $(M, a) = 1$ ou bien M est divisible par a^k pour $k \geq 2$, alors tous les nombres premiers appartenant à $(M_+)_a$ sont des résidus a -iques modulo M^a .*

10. Shanks A l'aide des propriétés combinatoires des monades (voir sujet 7), j'ai donné une interprétation graphique de l'algorithme de Shanks pour trouver les racines de l'équation $x^2 \equiv a \pmod{p}$ et j'ai étendu cet algorithme pour trouver les solutions de l'équation $x^q \equiv a \pmod{p}$, où q et p sont des nombres premiers arbitraires [17].

11. Les lignes des courbures principales dans un godron [19]. Étant donnée une surface dans l'espace 3-dimensionnel, ses domaines hyperbolique et elliptique, ses courbes parabolique, flecnodale et conodale, et ses godrons sont de nature projective (affine). Donc, tous les théorèmes démontrés dans [14] et [15] sont 'invariants par les transformations projectives' (affines).

Si on considère aussi une structure euclidienne dans \mathbb{R}^3 , alors les lignes des courbures (principales) existent, et en un godron, une des lignes des courbures principales est tangente à la courbe parabolique et c'est connu (1980) qu'elle est placée localement du côté elliptique (hyperbolique) si le godron est positif (resp. négatif).

J'ai découvert des nouvelles propriétés de la ligne de courbure principale tangente à la courbe parabolique [19]. Par exemple, *en un godron, le vecteur normal principal de cette ligne de courbure pointe toujours vers le domaine hyperbolique*. En plus, cette ligne de courbure principale C possède une "propriété séparante" : sous la dualité projective toutes les courbes tangentes à la courbe parabolique au godron (et donc tangentes à C) sont envoyées sur des courbes (de la surface duale) qui possèdent un point de rebroussement (cusp) et qui ont la même tangente en ce point. La propriété séparante de la ligne de courbure principale C est que, sous la dualité projective, les cusps des images de deux courbes tangentes à C , localement séparées par C , pointent dans des directions opposées.

Cela est un fait remarquable puisque cette propriété est encore invariante par les transformations projectives, bien que les lignes des courbures principales ne le sont pas.

12. Un invariant projectif pour les hyperbonodes [20]. Les points d'auto-intersection de la courbe flecnodale d'une surface lisse générique (*hyperbonodes*) jouent un rôle fondamentale pour les bifurcations des courbes parabolique et flecnodale, quand la surface dépend d'un paramètre (cf. [16]). J'ai introduit un invariant projectif qui reflète certaines propriétés géométriques de la surface en ces points.

13. Desargues tropicale. En géométrie tropicale, les relations d'incidence entre points et droites sont différents de celles de la géométrie projective ou euclidienne. Par exemple, par deux points en position générale il passe exactement une droite tropicale, mais pour des paires de points en certaines positions, il y a une infinité de droites qui passent par eux. A cause de cela, la version tropicale du théorème de Desargues a une formulation légèrement différente [24]. Notre démonstration est géométrique (nous utilisons les propriétés affines des droites tropicales).

PARTICIPATION À DES CONFÉRENCES INTERNATIONALES

1. 4th Int. Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, Brésil, juillet 1996.
Exposé : Degeneracy and Bifurcation Diagrams of Vanishing Singularities.
2. 5th Int. Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, Brésil, juillet 1998.
Exposé : Construction of Weakly Convex but Non-Convex Curves and Estimation of the Number of its Vertices.
3. X Escola de Geometria Diferencial, Belo Horizonte, Brésil, juillet 1998.
Exposé : 4-Vertex Theorems for Convex Curves in Higher Dimensional Spheres and in Higher Dimensional Euclidean and Hyperbolic Spaces.
4. Banach Centre Symp. on “Geometry and Topology of Caustics”, Varsovie, Pologne, août 1998.
Exposé : Sturm Theory, Singularities of the Normal Map and the Focal Set of a Curve in \mathbb{R}^n .
5. International Workshop on Singularity Theory, University of Warwick, June 1999.
Exposé : On the Stability of the Bifurcation Diagram Associated to Vanishing Flattenings.
6. Internat. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russie, août 2000.
Exposé : Whitney Umbrellas in Bifurcations of the Flecnodal Curve of Projective Surfaces.
7. Conférence NATO : Newton Institute Workshop on Singularity Theory and Applications to Wave Propagation and Dynamical Systems, Cambridge, septembre 2000.
Exposé : Bifurcations of the Inflections of Solutions of Implicit Differential Equations.
8. Programme scientifique NATO “Singularity Theory” et programme scientifique NATO “Geometry and Topology of Fluid Flows”, Newton Inst., Cambridge, novembre 2000. L’unique exposé commun aux deux programmes :
On Some Interesting Aspects in “Perestroikas” of Space Curves.
9. Banach Centre Symp. on “Geometry and Topology : Caustics II”, Varsovie, Pologne, juin 2002.
Exposé : “Scalar Frenet Equations” and Focal Curvatures for Curves in \mathbb{R}^{m+1} .
10. Internat. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russie, août 2002.
Exposé : Rigid Body Motions and Arnold’s Theory of Fronts on $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
11. Internat. Conf. on Singularity Theory and its Applications, Bedlewo, Pologne, octobre 2003.
Deux exposés : “4-Vertex Theorems, Sturm Theory and Lagrangian Singularities I” et “4-Vertex Theorems, Sturm Theory and Lagrangian Singularities II”.
- 12 Invited talk to the 2nd Congreso Latino Americano de Matemáticos, Cancún, Mexique, Juin, 2004.
Exposé : Surface Evolution, Implicit Differential Equations and Pairs of Legendrian Fibrations.
13. Internat. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russie, juillet 2004.
Exposé : On Vertices and Focal Curvatures of Space Curves.
14. Polish-Japanese “Geometric Singularity Theory” Working Days, Będlewo, Pologne, 30 Aug.-7 Sept. 2004.
Deux exposés : “On vertices, focal curvatures and Lagrangian singularities” and “Geometry of implicit differential equations and pairs of Legendrian fibrations”
15. Ecole de la Formation Permanente du CNRS : Singularités en Géométrie et Topologie, Théorie et applications (Jeunes chercheurs en singularités) CIRM - LUMINY, Marseille 14 au 18 fév. 2005.
Exposé : A New Projective Invariant Associated to the Special Parabolic Points of Surfaces and to Swallowtails.
16. Géométrie et Analyse des espaces singuliers. Lille, France, May, 2005.
Exposé : A new projective invariant associated to swallowtails and to the special parabolic points of surfaces.
17. Banach Centre Symp. “Geometry and Topology : Caustics III”, Varsovie, Pologne, juin 2006.

- Exposé : Projective differential geometry of swallowtails and godrons.
18. Int. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russie, juillet 2006.
Exposé : Projective differential geometry of swallowtails and godrons (via a new invariant).
19. Internat. Conf. ANALYSIS and SINGULARITIES “Arnold-70” Moscou, Russie, août 2007.
Exposé : Arithmetics of the number of orbits of the Femat-Euler dynamical systems.
20. Int. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russie, juin 2008.
Exposé : Differential geometry of surfaces in the neighbourhood of a hyperbonode.

COURS DONNÉ (par invitation) DANS UNE CONFÉRENCE INTERNATIONALE

1. 7th Int. Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, Brésil, juillet-août 2002.
Cours : *Symplectic and Contact Singularities in Differential Geometry*.
2. “School and Workshop on *The Geometry and Topology of Singularities* and a celebration of the first 60 years of Lê Dung Tráng” Cuernavaca, Mexique 8-26 janvier 2007.
Cours : *Legendrian and Lagrangian Singularities in Elementary Differential Geometry*.

COLLABORATION INTERNATIONALE

- En 2000, 2001, 2002, 2003 et 2004 j’ai eu des séjours scientifiques de deux mois en été et d’un mois en hiver à l’Institut Steklov de Mathématiques de Moscou, pour travailler en collaboration avec V.I. Arnold et M.E. Kazarian.
- Séjours scientifiques pour collaborer avec V.I. Arnold et M.E. Kazarian, à l’institut franco-russe (CNRS) Jean Victor Poncelet à Moscou, le mois de janvier 2005 ; du 28.07.05 au 13.10.05 ; du 09.07.06 au 13.09.06 ; du 28.07.07 au 13.10.07 et du 25.06.08 au 17.09.08.
- En novembre 2003 et avril 2004 “Fellow” dans l’Institut de Mathématiques de l’Académie de Sciences de Pologne dans le European Community Centre of Excellence program “Institut of Mathematics - the Stefan Banach International Mathematical Center as Centre of Excellence”, the package “Symplectic Singularities and Applications”. Collaboration avec Prof. S. Janeszko.
- Les 2 dernières années je collabore avec P. Mormul dans l’étude des drapaux de Goursat, des k -drapaux spéciaux et de la prolongation de Cartan multidimensionnelle d’un côté (je ne suis pas expert en ces sujets) et leurs rapports avec la théorie de control, la théorie des singularités et la théorie des courbes.
- Depuis un an je collabore avec le professeur Peter Giblin (Université de Liverpool) dans l’étude de la géométrie différentielle des surfaces et ses applications aux sciences de la vision par ordinateur. Je suis chercheur contractuel à l’Université de Liverpool pour approfondir notre collaboration sur la géométrie différentielle des surfaces.

RAPPORTEUR

- Rapporteur (“referee”) de journaux internationaux : Proc. of the London Math. Soc., The Asian J. of Mathematics, C.R. Acad. Sci. Paris, J. of Geometry and Physics, Bulletin of the Brazilian Math. Soc., Geometria Dedicata, Bulletin de la Soc. Mat. Mexicana, International Journal of Mathematics, Publicacions Matemàtiques (Univ. Barcelona), Functional Anal. and Other Mathematics, Journal of Dynamical and Control Systems.