

Problème de Minkowski et questions de rigidité/flexibilité pour les hérissons

Exposé de Yves Martinez-Maure

Séminaire de Géométrie - Université Paris 7 le, 30 janvier 2012

Abstract.- The classical Minkowski problem has a natural extension to hedgehogs, that is to Minkowski differences of closed convex hypersurfaces. This extended Minkowski problem is much more difficult since it essentially boils down to the question of solutions of certain Monge-Ampère equations of mixed type on the unit sphere S^n of \mathbb{R}^{n+1} . In this talk, we mainly consider the uniqueness question and give first results. In the context of hedgehogs, there is a close connection between Gauss infinitesimal rigidity and the uniqueness question in the Minkowski problem extended to hedgehogs. To conclude, we give a bellows-type theorem for hedgehogs under an appropriate differentiability condition.

Introduction.

En géométrie différentielle, le problème de Minkowski classique est celui de la courbure de Gauss prescrite pour les hypersurfaces bordant un corps strictement convexe dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^{n+1} . Plus précisément, étant donnée K une fonction continue et strictement positive sur la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} , il s'agit de la question de l'existence, de l'unicité et de la régularité d'un corps convexe de \mathbb{R}^{n+1} dont K soit la courbure de Gauss du bord (vue comme une fonction du vecteur normal unitaire sortant).

Comme nous le verrons plus loin, ce problème de Minkowski est équivalent à la question des solutions d'une EDP de Monge-Ampère de type elliptique sur la sphère unité S^n . Cette équivalence en a fait l'un des principaux problèmes de géométrie qui accompagnèrent étroitement le développement de la théorie des EDP de Monge-Ampère de type elliptique pendant le $XX^{\text{ème}}$ siècle. Les contributions majeures à la résolution de ce problème sont dues à Minkowski, Aleksandrov, Lewy, Nirenberg, Calabi, Pogorelov, Cheng et Yau. Seules les principales seront rappelées ici. Le lecteur intéressé par le développement conjoint de la théorie des EDP de Monge-Ampère et de leurs applications géométriques pourra consulter le panorama de N. Trudinger et X.J. Wang [TW].

Ce problème de Minkowski classique admet une extension naturelle aux hérissons de \mathbb{R}^{n+1} qui peuvent se voir comme des différences de Minkowski d'hypersurfaces convexes. Le problème de Minkowski étendu

aux hérissons est naturellement beaucoup plus difficile que le problème de Minkowski classique puisqu'il revient le plus souvent à la question des solutions d'une EDP de Monge-Ampère changeant de type sur \mathbb{S}^n . Or, il n'existe à ma connaissance aucun résultat global pour un tel type d'équations. Le but de cet exposé est essentiellement de présenter ce problème de Minkowski généralisé, de donner quelques premiers résultats très partiels et de montrer qu'il est permis d'espérer des résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes de hérissons.

Bref rappel de résultats concernant le problème classique.

Le premier résultat important est donc dû à H. Minkowski lui-même qui prouva l'existence d'une solution faible en procédant par approximation par des polyèdres convexes [MI1, MI2] :

Théorème (Minkowski 1903). *Si K est une fonction continue et strictement positive sur \mathbb{S}^n qui vérifie la condition intégrale suivante*

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{u}{K(u)} d\sigma(u) = 0,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique sur \mathbb{S}^n , alors K est la courbure de Gauss (au sens de la définition de Gauss) d'une hypersurface convexe fermée \mathcal{H} qui est unique à translation près.

L'unicité peut se voir comme une conséquence de la condition d'égalité dans une inégalité de Minkowski qui fait intervenir la notion de volume mixte (e.g. [S, p. 397]).

En 1953, L. Nirenberg apporte la solution complète du problème de Minkowski dans le cas $n = 2$ en utilisant la méthode de continuité [N]. Dans le cas n quelconque ≥ 2 , la solution forte est due à A.V. Pogorelov [PO] et à S.Y. Cheng et S.T. Yau [CY] qui prouvèrent indépendamment le résultat suivant :

Théorème (Pogorelov 1975, Cheng-Yau 1976). *Si K est de classe C^m , ($m \geq 3$), alors la fonction de support $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de l'hypersurface \mathcal{H} est de classe $C^{m+1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.*

La notion de hérisson.

L'ensemble \mathcal{K}^{n+1} des corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} est habituellement muni de l'addition de Minkowski et de la multiplication par les réels ≥ 0 :

- (i) $\forall (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in (\mathcal{K}^{n+1})^2, \quad \mathcal{K} + \mathcal{L} = \{u + v \mid u \in \mathcal{K}, v \in \mathcal{L}\};$
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K}^{n+1}, \quad \lambda \cdot \mathcal{K} = \{\lambda u \mid u \in \mathcal{K}\}.$

Bien sûr, ces lois ne font pas de $(\mathcal{K}^{n+1}, +, \cdot)$ un espace vectoriel puisque pour certains couples $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ de corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} , la différence $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ ne peut être définie elle-même comme un corps convexe de \mathbb{R}^{n+1} . Mais de la même façon que l'on construit le groupe \mathbb{Z} des entiers relatifs à partir du monoïde $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ des entiers naturels par un procédé de symétrisation, nous pouvons construire à partir de $(\mathcal{K}^{n+1}, +, \cdot)$, l'espace vectoriel $(\mathcal{H}^{n+1}, +, \cdot)$ des différences formelles de corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} . Or, à toute différence formelle $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ de corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} , il est possible d'associer dans \mathbb{R}^{n+1} , une réalisation géométrique que l'on peut identifier à la différence des fonctions de support des deux corps [MM6]. Cette possibilité est particulièrement aisée à comprendre quand on se restreint aux corps de \mathbb{R}^{n+1} qui sont strictement convexes. En effet, effectuer la somme de Minkowski de deux tels corps revient à effectuer celle de leurs bords $\partial\mathcal{K}$ et $\partial\mathcal{L}$ en associant à tout $u \in \mathbb{S}^n$, la somme des points $x_{\partial\mathcal{K}}(u)$ de $\partial\mathcal{K}$ et $x_{\partial\mathcal{L}}(u)$ de $\partial\mathcal{L}$ en lesquels u est le vecteur normal unitaire sortant (cf. Figure 1).

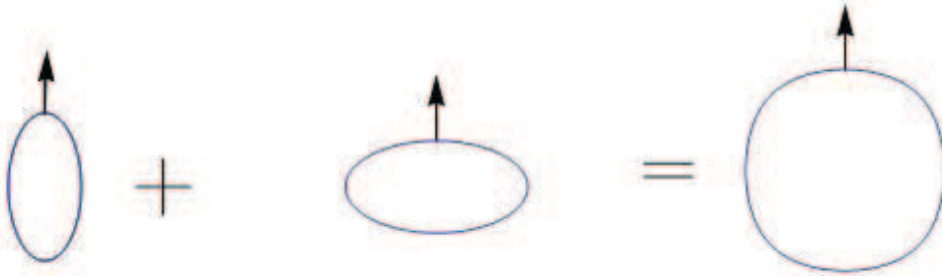


Figure 1 : Somme de Minkowski de deux corps strictement convexes

Comme nous le verrons plus loin, effectuer la « différence de Minkowski $\mathcal{H} := \mathcal{K} - \mathcal{L}$ » revient de même à associer à tout $u \in \mathbb{S}^n$, le point $x_{\mathcal{H}}(u) := x_{\partial\mathcal{K}}(u) - x_{\partial\mathcal{L}}(u)$, (cf. Figure 2). Bien sûr, l'hypersurface « hérissée » \mathcal{H} qui en résulte n'est en général ni régulière ni convexe (même si \mathcal{K} et \mathcal{L} sont des corps convexes de classe C_+^2 , i.e. de classe C^2 et à courbure de Gauss > 0) : elle peut présenter des singularités et des auto-intersections.

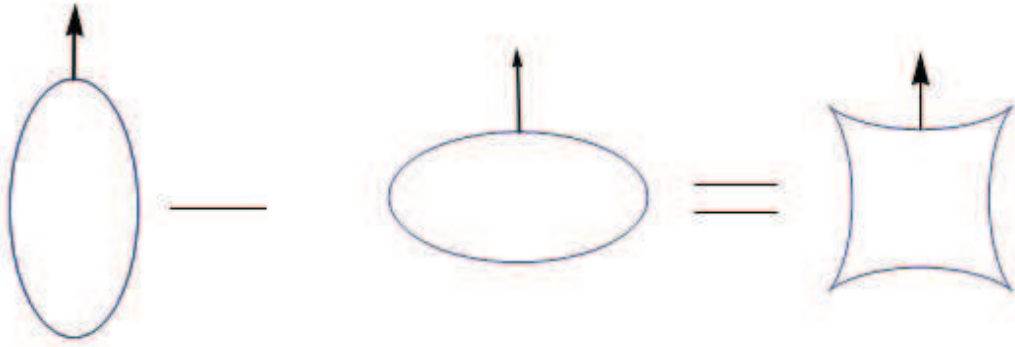


Figure 2 : Différence de Minkowski de ces deux mêmes corps convexes

Pour $n \leq 2$, cette idée d'envisager géométriquement les différences formelles de corps convexes remonte à un papier de H. Geppert publié en 1937 et tombé dans l'oubli.

Le principal objet de cet exposé est donc l'extension du problème de Minkowski à ces « différence de Minkowski de corps convexes ». Nous verrons que sa formulation analytique correspond en tout point à celle du problème classique de Minkowski, à ceci près que l'équation de Monge-Ampère à laquelle on est ramené n'est plus de type elliptique.

La notion de fonction de support et l'extension du problème de Minkowski

Ces opérations et la courbure de Gauss d'un hérisson sont très commodes à exprimer en termes de fonctions de support. Tout corps convexe $\mathcal{K} \in \mathcal{K}^{n+1}$ est déterminé par sa fonction de support $h_{\mathcal{K}} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à tout $u \in \mathbb{S}^n$, le nombre réel $h_{\mathcal{K}}(u) = \sup \{ \langle x, u \rangle \mid x \in \mathcal{K} \}$ représentant la distance signée de l'origine à l'hyperplan support de vecteur normal u . En particulier, toute hypersurface convexe fermée de classe C_+^2 (i.e., C^2 et à courbure de Gauss positive) est déterminée par sa fonction de support h (qui est nécessairement C^2 sur \mathbb{S}^n [S, p. 111]) comme l'enveloppe \mathcal{H}_h de la famille d'hyperplans d'équation $\langle x, u \rangle = h(u)$. Cette enveloppe \mathcal{H}_h est décrite analytiquement par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \langle x, u \rangle = h(u) \\ \langle x, \cdot \rangle = dh_u(\cdot) \end{cases} .$$

La seconde équation est déduite de la première en différentiant par rapport à u . D'après la première équation, la projection orthogonale de x sur la droite dirigée par u est $h(u)u$ et d'après la seconde, la projection de x sur u^\perp est le gradient de h en u (cf. Figure 3). Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{S}^n$, $x_h(u) = h(u)u + (\nabla h)(u)$ est l'unique solution du système.

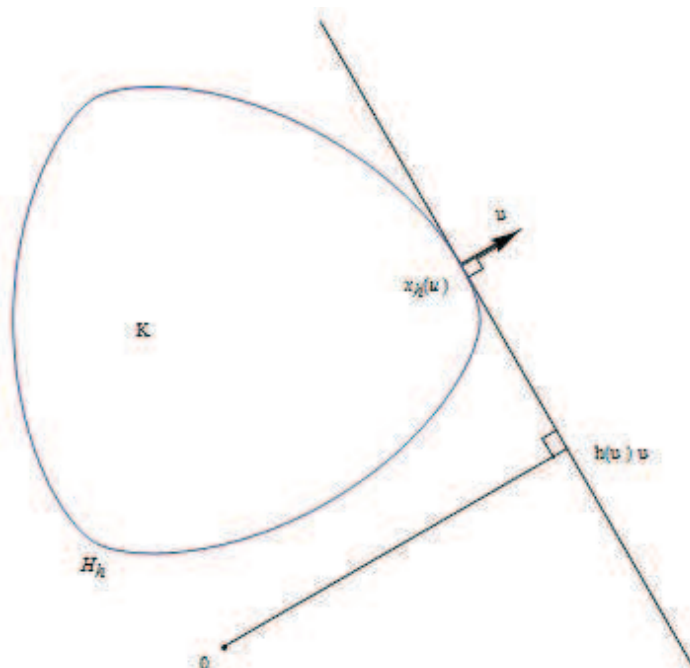


Figure 3

Maintenant, pour toute fonction $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$, l'enveloppe \mathcal{H}_h est en fait bien définie (même si h n'est pas la fonction de support d'un corps convexe). Sa paramétrisation naturelle $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{H}_h, u \mapsto h(u)u + (\nabla h)(u)$ peut être interprétée comme l'inverse de l'application de Gauss, en ce sens qu'en tout point régulier $x_h(u)$ de \mathcal{H}_h , u est un vecteur normal à \mathcal{H}_h . On dit que \mathcal{H}_h est le hérisson de fonction de support h , (Figure 4). Notons qu'il dépend linéairement de h .

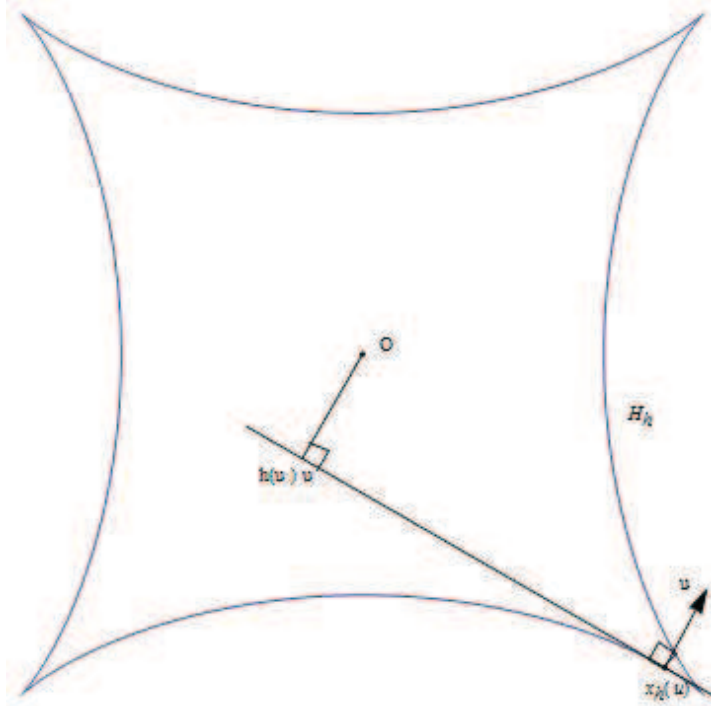


Figure 4

Notons H_{n+1} le \mathbb{R} -espace vectoriel des hérissons de classe C^2 définis à translation près dans \mathbb{R}^{n+1} et identifiés à leur fonction de support. Analytiquement, dire qu'un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est défini à translation près revient simplement à dire que la première harmonique de sa fonction de support n'est pas spécifiée.

Comme nous l'avons déjà vu, les éléments de H_{n+1} peuvent être des hypersurfaces singulières. La paramétrisation x_h pouvant être vue comme l'inverse de l'application de Gauss, la courbure de Gauss K_h de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$ est donnée par $K_h(u) = 1/\det[T_u x_h]$, où $T_u x_h$ est l'application tangente à x_h en u . Par conséquent, les singularités de \mathcal{H}_h sont précisément les points où cette courbure K_h est infinie. Pour tout $u \in \mathbb{S}^n$, l'application tangente à x_h en u est donnée par $T_u x_h = h(u) Id_{T_u \mathbb{S}^n} + H_h(u)$, où $H_h(u)$ est l'endomorphisme symétrique associé au hessien de h en u . En conséquence, si λ est une valeur propre du hessien de h en u alors $\lambda + h(u)$ est (au signe près) l'un des rayons de courbure principaux de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$ et la dite « fonction de courbure » $R_h := 1/K_h$ est donnée par

$$R_h(u) = \det[\nabla^2 h(u) + h(u) g_u], \quad (1)$$

où g est la métrique canonique sur \mathbb{S}^n et $\nabla^2 h$ le hessien de h relativement à g , le déterminant étant pris par rapport à une base orthonormale de $T_u \mathbb{S}^n$.

Le point important est que, pour tout hérisson de fonction de support C^2 , cette fonction de courbure $R_h := 1/K_h$ est bien définie et continue sur toute la sphère \mathbb{S}^n , y compris aux points singuliers de x_h . Le problème de Minkowski se pose donc très naturellement pour les hérissons. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons donc à la question de l'existence et/ou de l'unicité des solutions C^2 de l'équation de Monge-Ampère

$$R_h = R, \quad (2)$$

où la fonction $R \in C(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ est donnée.

La question de l'existence d'une solution C^2

Nous formulerons cette question de la manière suivante :

(Q₁) Quelles conditions nécessaires et suffisantes convient-il d'imposer à une fonction $R \in C(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ pour qu'elle soit la fonction de courbure (i.e. l'inverse de la courbure de Gauss K) d'un hérisson $\mathcal{H} = \mathcal{K} - \mathcal{L}$?

Comme dans le problème de Minkowski classique, la condition intégrale suivante est nécessaire à l'existence d'une solution C^2 de l'équation (2) :

$$\int_{\mathbb{S}^n} R(u) u d\sigma(u) = 0. \quad (3)$$

Elle exprime simplement que tout hérisson C^2 de \mathbb{R}^{n+1} est une hypersurface fermée. Mais cette condition n'est plus suffisante. Par exemple, la fonction constante égale à -1 sur \mathbb{S}^2 vérifie la condition intégrale (3) mais ne peut pas être la fonction de courbure d'un hérisson puisqu'il n'existe pas de surface compacte à courbure de Gauss strictement négative dans \mathbb{R}^3 .

Le problème de Minkowski étendu aux hérissons conduit aux exemples suivants d'EDP de Monge Ampère de type mixte pour lesquelles il n'existe pas de solution sur \mathbb{S}^2 . Pour tout $v \in \mathbb{S}^2$, la fonction C^∞ définie sur \mathbb{S}^2 par $F_v(u) = 1 - 2\langle u, v \rangle^2$ vérifie la condition intégrale (3) mais n'est pas une fonction de courbure sur \mathbb{S}^2 [MM4]. En d'autres termes, pour tout $v \in \mathbb{S}^2$, l'EDP de Monge Ampère $h^2 + h\Delta_2 h + \Delta_2 h = F_v$ n'a pas de solution C^2 sur \mathbb{S}^2 . La preuve utilise des techniques de projection orthogonale adaptée aux hérissons.

La question de l'unicité d'une solution C^2

Notons pour commencer que, pour tout $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$, ($n \in 2\mathbb{N}^*$), les hérissons de fonction de support $-h$ et h ont même fonction de courbure et vérifient

$$\mathcal{H}_{-h} = s(\mathcal{H}_h),$$

où s est la symétrie par rapport à l'origine. Il nous faut ensuite rappeler que des hérissons non congruents peuvent avoir la même fonction de courbure [MM7] : par exemple, les deux fonctions lisses (mais non analytiques) f, g définies sur \mathbb{S}^2 par

$$f(u) := \begin{cases} \exp(-1/z^2) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad g(u) := \begin{cases} \text{signe}(z) f(u) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

où $u = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, sont les fonctions de support de deux hérissons non congruents \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g de \mathbb{R}^3 ayant la même fonction de courbure $R := 1/K \in C(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$, (cf. Figure 5).



Figure 5 : Hérissons non congruents de même courbure

Nous formulerons donc la question de l'unicité comme suit :

(Q_2) *Unicité d'une solution C^2 : Soit $R \in C(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ la fonction de courbure d'un hérisson \mathcal{H} . Quelles conditions nécessaires et suffisantes convient-il d'imposer à $R \in C(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ pour que \mathcal{H} soit déterminé de manière unique par R (à translations parallèles et symétries centrales près, le vecteur normal unitaire coorientant étant préservé) ?*

Il serait en particulier intéressant de savoir s'il existe des paires de hérissons analytiques non congruents de \mathbb{R}^3 dotés d'une même fonction de courbure (par 'hérissons analytiques', nous entendons ici 'hérissons de fonction de support analytique').

Pour $n = 1$, le problème est linéaire et peut être résolu sans trop de difficulté [MM6]. Mais pour $n = 2$, le problème est donc déjà très difficile : si $R \in C(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ change de signe sur \mathbb{S}^2 , alors la question de l'existence, de l'unicité et de la régularité d'un hérisson dont R est la fonction de courbure revient à l'étude d'une EDP de Monge-Ampère de type mixte, une classe d'équations pour lesquelles il n'existe à ma connaissance aucun résultat global mais seulement des résultats locaux par C.S. Lin [L] et Zuily [Z]. Dans cet exposé, nous nous intéressons principalement, à la question de l'unicité en nous restreignant au cas $n = 2$. La question (Q_2) est trop difficile pour être résolue à l'heure actuelle et notre but sera simplement de fournir des conditions sous lesquelles deux hérissons de \mathbb{R}^3 ont nécessairement des fonctions de courbure distinctes.

Premiers résultats

Rappelons que \mathbf{H}_3 désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des hérissons C^2 définis à translation près dans \mathbb{R}^3 (par 'hérissons C^2 ' nous entendons 'hérissons de fonction support C^2 '). Notre premier résultat sera le suivant.

Théorème 1 [MM8]. *Soient \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g deux hérissons C^2 qui sont linéairement indépendants dans \mathbf{H}_3 . Si une combinaison linéaire de \mathcal{H}_f et de \mathcal{H}_g est de classe C^2_+ , alors \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g ont des fonctions de courbure distinctes.*

Notre second résultat repose sur cette décomposition des hérissons en partie centrée et partie projective.

Décomposition d'un hérisson en parties centrée et projective

Rappelons qu'un hérisson \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^{n+1} est dit centré (resp. projectif) si sa fonction de support h est symétrique (resp. antisymétrique), c'est-à-dire telle que :

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, \quad h(-u) = h(u) \quad (\text{resp. } h(-u) = -h(u)).$$

Géométriquement, cela signifie que \mathcal{H}_h est symétrique par rapport à l'origine (resp. que toute paire de points antipodaux sur la sphère unité \mathbb{S}^n correspondent à un même point sur l'hypersurface $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^n)$). Par exemple, le hérisson \mathcal{H}_f (resp. \mathcal{H}_g) de \mathbb{R}^3 représenté à la Figure 5.a (resp. Figure 5.b) est centré (resp. projectif).

Or, la fonction de support h de n'importe quel hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se décompose de manière unique en la somme de ses parties antisymétrique et symétrique :

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, \quad h(u) = f(u) + g(u) \quad \text{où} \quad \begin{cases} f(u) = \frac{1}{2}(h(u) - h(-u)) \\ g(u) = \frac{1}{2}(h(u) + h(-u)) \end{cases}.$$

Par conséquent, tout hérisson \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^{n+1} admet une unique représentation de la forme $\mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g$, où les hérissons \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g sont respectivement projectif et centré. Nous dirons que \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g sont respectivement les parties projective et centrée de \mathcal{H}_h .

Théorème 2 [MM8]. *Soient \mathcal{H}_{h_1} et \mathcal{H}_{h_2} deux hérissons C^2 , linéairement indépendants dans \mathbf{H}_3 et dont les parties centrées sont non triviales (i.e., distinctes d'un point) et proportionnelles à une même surface convexe de classe C_+^2 . Alors, \mathcal{H}_{h_1} et \mathcal{H}_{h_2} ont des fonctions de courbure distinctes.*

En voici une conséquence immédiate :

Corollaire. *Deux hérissons C^2 de largeur constante non nulle qui sont linéairement indépendants dans \mathbf{H}_3 ont nécessairement des fonctions de courbure distinctes.*

Le dernier résultat repose sur l'extension de la notion de fonction de courbure mixte aux hérissons que nous rappellerons ci-après.

Théorème 3 [MM8]. *Soient \mathcal{H} et \mathcal{H}' deux hérissons analytiques (resp. projectifs et C^2) de \mathbb{R}^3 qui sont linéairement indépendants dans \mathbf{H}_3 . Si la fonction de courbure mixte de \mathcal{H} et \mathcal{H}' ne change pas de signe sur \mathbb{S}^2 , alors \mathcal{H} et \mathcal{H}' ont des fonctions de courbure distinctes.*

Complément sur la courbure lorsque $n = 2$.

D'après (1), la fonction de courbure R_h d'un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est donnée par $R_h = (\lambda_1 + h)(\lambda_2 + h) = h^2 + h\Delta_2 h + \Delta_{22}h$, où Δ_2 désigne le laplacien sphérique et Δ_{22} l'opérateur de Monge-Ampère (respectivement, la somme et le produit des valeurs propres λ_1, λ_2 du hessien h). Par conséquent, l'EDP à laquelle nous nous intéressons est la suivante

$$\boxed{h^2 + h\Delta_2 h + \Delta_{22}h = 1/K}.$$

Notons que la 'fonction de courbure mixte' des hérissons de \mathbb{R}^3 , à savoir

$$\begin{aligned} R : \mathbf{H}_3^2 &\rightarrow C(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}) \\ (f, g) &\mapsto R_{(f,g)} := \frac{1}{2}(R_{f+g} - R_f - R_g) \end{aligned}$$

est bilinéaire et symétrique :

$$(i) \forall (f, g, h) \in \mathbf{H}_3^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, R_{(f+\lambda g, h)} = R_{(f, h)} + \lambda R_{(g, h)} ;$$

$$(ii) \forall (f, g) \in \mathbf{H}_3^2, R_{(g, f)} = R_{(f, g)}.$$

Pour tout $h \in \mathbf{H}_3$, nous avons en particulier $R_{-h} = R_h$. Notons que $R_{(1, h)} = \frac{1}{2}(\Delta_2 h + 2h)$ est (au signe près) la demi-somme des rayons de courbure principaux $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$.

Remarque. Comme nous l'avons rappelé, deux hérissons non congruents de \mathbb{R}^3 peuvent avoir même fonction de courbure. Par bilinéarité et symétrie de la fonction de courbure mixte $R : \mathbf{H}_3^2 \rightarrow C(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$, si deux hérissons \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g de \mathbb{R}^3 ont même fonction de courbure alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, les hérissons $\mathcal{H}_{\lambda f + \mu g}$ et $\mathcal{H}_{\mu f + \lambda g}$ ont aussi même fonction de courbure. Par exemple, de la paire $\{\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_g\}$ de hérissons non congruents représentés à la figure 5, nous pouvons déduire la paire $\{\mathcal{H}_{f+2g}, \mathcal{H}_{2f+g}\}$ de hérissons non congruents (et de même fonction de courbure) représentés à la figure 6.

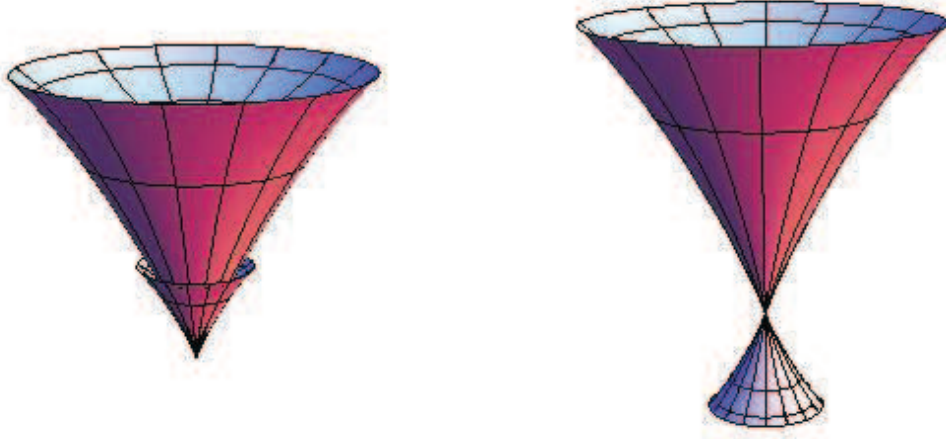


Figure 6 : Hérissos non congruents de même fonction de courbure

Lemme 1 Soient \mathcal{H}_f et \mathcal{H}_g deux hérissos C^2 de \mathbb{R}^3 . Si $u \in \mathbb{S}^2$ est tel que $R_g(u) > 0$, alors

$$R_{(f,g)}(u)^2 \geq R_f(u) R_g(u).$$

Preuve du lemme. Définissons $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $Q(t) = R_{f+tg}(u)$. Par bilinéarité et symétrie de la fonction de courbure mixte, nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q(t) = R_f(u) + 2tR_{(f,g)}(u) + t^2R_g(u).$$

Considérons le discriminant réduit $\Delta = R_{(f,g)}(u)^2 - R_f(u)R_g(u)$ du trinôme du second degré $Q(t)$. D'un côté, on a $R_g(u) > 0$ par hypothèse, si bien que $Q(t) > 0$ pour tout t assez grand. D'un autre côté, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_{(1,f+\lambda g)}(u) = R_{(1,f)}(u) + \lambda R_{(1,g)}(u) = 0$ et donc $Q(\lambda) = R_{f+\lambda g}(u) \leq 0$. Par conséquent, on a : $\Delta \geq 0$. \square

Lemme 2 ([2, 10 Theorem 3]). Soit \mathcal{H}_h un hérisson analytique (resp. projectif et C^2) de \mathbb{R}^3 . Si la fonction de courbure R_h de \mathcal{H}_h est ≤ 0 sur tout \mathbb{S}^2 , alors \mathcal{H}_h est réduit à un seul point.

Lemme 3. Soit \mathcal{H}_g un hérisson convexe de classe C_+^2 dans \mathbb{R}^3 . Étant donné un hérisson projectif \mathcal{H}_f de \mathbb{R}^3 , la fonction de courbure mixte $R_{(f,g)}$ est identiquement nulle sur \mathbb{S}^2 seulement si \mathcal{H}_f est réduit à un seul point, c'est-à-dire, seulement si f est la restriction à \mathbb{S}^2 d'une forme linéaire d'une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 .

Preuve du lemme. Puisque \mathcal{H}_g est de classe C_+^2 , nous avons

$$R_f(u) R_g(u) \leq R_{(f,g)}(u)^2$$

en vertu du lemme 1. Comme $R_{(f,g)}(u) = 0$, on en déduit que $R_f \leq 0$ ce qui implique le résultat d'après le lemme 2. \square

Preuve du théorème 2. Par hypothèse, h_1 et h_2 sont de la forme

$$\begin{cases} h_1 = f_1 + \lambda_1 k \\ h_2 = f_2 + \lambda_2 k \end{cases},$$

où λ_1, λ_2 sont des nombres réels non nuls, f_1, f_2 des fonctions de support de hérissons projectifs et k la fonction de support d'un hérisson centré de classe C_+^2 . Supposons que $R_{h_1} = R_{h_2}$. Par bilinéarité et symétrie de la fonction de courbure mixte, cela donne

$$R_{f_1} + \lambda_1^2 R_k + 2\lambda_1 R_{(f_1,k)} = R_{f_2} + \lambda_2^2 R_k + 2\lambda_2 R_{(f_2,k)}.$$

En décomposant en parties symétrique et antisymétrique, nous obtenons

$$\begin{cases} R_{f_1} + \lambda_1^2 R_k = R_{f_2} + \lambda_2^2 R_k \\ \lambda_1 R_{(f_1,k)} = \lambda_2 R_{(f_2,k)} \end{cases}.$$

Par linéarité de la fonction de courbure mixte par rapport à la première variable, la seconde équation est équivalente à $R_{(\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2, k)} = 0$. D'après le lemme 3, cela implique que $\mathcal{H}_{\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2}$ est un point et donc que $\mathcal{H}_{\lambda_1 f_1} = \mathcal{H}_{\lambda_2 f_2}$ dans \mathbb{H}_3 . Or, en multipliant chaque membre de la première équation du système précédent par λ_1^2 , on obtient

$$\lambda_1^2 R_{f_1} + \lambda_1^4 R_k = \lambda_1^2 R_{f_2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 R_k,$$

et donc

$$R_{\lambda_1 f_1} - R_{\lambda_1 f_2} = \lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) R_k$$

par bilinéarité de la fonction de courbure mixte. Par conséquent,

$$R_{\lambda_2 f_2} - R_{\lambda_1 f_2} = \lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) R_k,$$

c'est-à-dire,

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (R_{f_2} - \lambda_1^2 R_k) = 0.$$

Comme \mathcal{H}_{f_2} est projectif (resp. \mathcal{H}_k convexe de classe C_+^2), nous avons [MM2] :

$$\int_{\mathbb{S}^2} R_{f_2} d\sigma \leq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{S}^2} R_k d\sigma > 0.$$

Par conséquent, $R_{f_2} \neq \lambda_1^2 R_k$. De l'équation précédente, on déduit donc $\lambda_2^2 = \lambda_1^2$, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \lambda_2 = \varepsilon \lambda_1.$$

Maintenant, $\lambda_1 \mathcal{H}_{f_1} = \mathcal{H}_{\lambda_1 f_1} = \mathcal{H}_{\lambda_2 f_2} = \lambda_2 \mathcal{H}_{f_2}$ et λ_1, λ_2 sont non nuls. Par conséquent, on a $\mathcal{H}_{f_1} = \varepsilon \mathcal{H}_{f_2}$ dans \mathbf{H}_3 , c'est-à-dire, $\mathcal{H}_{f_2} = \varepsilon \mathcal{H}_{f_1}$ et donc

$$\mathcal{H}_{h_2} = \mathcal{H}_{f_2 + \lambda_2 k} = \mathcal{H}_{f_2} + \lambda_2 \mathcal{H}_k = \varepsilon (\mathcal{H}_{f_1} + \lambda_1 \mathcal{H}_k) = \varepsilon \mathcal{H}_{h_1} \text{ dans } \mathbf{H}_3,$$

ce qui contredit le fait que \mathcal{H}_{h_1} et \mathcal{H}_{h_2} sont linéairement indépendants dans \mathbf{H}_3 . \square

Un théorème du soufflet pour les hérissons

Soit \mathcal{H}_h un hérisson de fonction de support C^2 dans \mathbb{R}^3 . Le volume (algébrique) de \mathcal{H}_h est défini par

$$v(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h R_h d\sigma.$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique sur \mathbb{S}^2 et R_h la fonction de courbure de \mathcal{H}_h [MM2]. Il s'interprète comme l'intégrale sur $\mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{H}_h$ de l'indice $i_h(x)$, défini comme nombre algébrique d'intersection d'une demi-droite orientée d'origine x avec l'hypersurface \mathcal{H}_h munie de son orientation transverse (nombre indépendant de la demi-droite pour un ouvert dense de directions).

Dans ce qui suit, nous travaillerons dans les espaces de Banach C_m , ($m \in \mathbb{N}$), introduits par L. Nirenberg dans son étude du problème de Minkowski dans \mathbb{R}^3 [N, p. 380]. Nous envisagerons des déformations lisses de hérissons de \mathbb{R}^3 :

Définition. Soit \mathcal{H}_h un hérisson de fonction de support C^2 dans \mathbb{R}^3 . Une déformation lisse de \mathcal{H}_h est la donnée d'une application différentiable $\tilde{h} : [0, 1] \rightarrow C_2$, $t \mapsto h_t := h(t, \cdot)$ telle que $h_0 = h$.

Théorème. Soit \mathcal{H}_h un hérisson C^2 de \mathbb{R}^3 . Si une déformation lisse de \mathcal{H}_h , disons

$$\tilde{h} : [0, 1] \rightarrow C_2, t \mapsto h_t := h(t, \cdot),$$

préserve la fonction de courbure (c'est-à-dire, vérifie $R_{h_t} = R_h$ pour tout $t \in [0, 1]$), alors elle préserve également le volume algébrique :

$$\forall t \in [0, 1], \quad v(h_t) = v(h).$$

Lemme. La fonction de courbure $R : C_2 \rightarrow C_0$, $h \mapsto R_h$ est différentiable sur C_2 , et :

$$\forall (f, g) \in C_2 \times C_2, \quad dR_f(g) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{R_{f+tg} - R_f}{t} = 2R_{(f,g)}.$$

Preuve du lemme. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad R_{f+tg} - R_f &= R_f + 2tR_{(f,g)} + t^2R_g - R_f \\ &= t(2R_{(f,g)} + tR_g) ; \end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{R_{f+tg} - R_f}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} (2R_{(f,g)} + tR_g) = 2R_{(f,g)}.$$

Or, nous avons :

$$\|R_{f+g} - R_f - 2R_{(f,g)}\|_{C_0} = \|R_g\|_{C_0} = o(\|g\|_{C_2}),$$

d'où le résultat. □

Preuve du théorème. Par hypothèse, l'application $R \circ \tilde{h} : [0, 1] \rightarrow C_0$ est constante. Comme \tilde{h} est différentiable par hypothèse et R en vertu du lemme précédent, $R \circ \tilde{h}$ est différentiable sur $[0, 1]$, et :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left(R \circ \tilde{h} \right)'(t) = 2R_{\left(\tilde{h}(t), \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right)(t) \right)}.$$

Ainsi, il vient par différentiation :

$$\forall t \in [0, 1], \quad R_{\left(\tilde{h}(t), \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right)(t) \right)} = 0. \quad (4)$$

Maintenant, pour tout $t_0 \in [0, 1]$, nous avons :

$$\forall t \in [0, 1] - \{t_0\}, \quad \frac{v(\tilde{h}(t)) - v(\tilde{h}(t_0))}{t - t_0} = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\tilde{h}(t) - \tilde{h}(t_0)}{t - t_0} R_{\tilde{h}(t_0)} d\sigma$$

et donc :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{v(\tilde{h}(t)) - v(\tilde{h}(t_0))}{t - t_0} = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right) (t_0) R_{\tilde{h}(t_0)} d\sigma.$$

Or, par symétrie du volume mixte des hérissons [MM2], nous avons :

$$\frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) (t_0) R_{\tilde{h}(t_0)} d\sigma = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{h}(t_0) R_{(\tilde{h}(t_0), (\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t})(t_0))} d\sigma.$$

Par conséquent, il découle de (4) que :

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad (v \circ \tilde{h})'(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{v(\tilde{h}(t)) - v(\tilde{h}(t_0))}{t - t_0} = 0,$$

si bien que tous les hérissons de la famille (\mathcal{H}_{h_t}) ont le même volume (algébrique). \square

Remarque. Les hérissons non congruents de même fonction de courbure de la figure 5 (resp. figure 6) ont des volumes algébriques distincts et ne peuvent donc pas être reliés par une déformation lisse préservant la fonction de courbure.

Rigidité infinitésimale de Gauss

Définition. Soit \mathcal{H}_f un hérisson (de fonction de support) C^2 de \mathbb{R}^3 . Une déformation isogauss infinitésimale de \mathcal{H}_f est la donnée d'une famille $(\mathcal{H}_{f+tg})_{t \in \mathbb{R}}$ de hérissons C^2 de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} x_{f+tg} : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathcal{H}_{f+tg} \subset \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto x_f(u) + tx_g(u) \end{aligned}$$

où \mathcal{H}_g est un hérisson C^2 de \mathbb{R}^3 tel que la fonction de courbure mixte $R_{(f,g)} := \frac{1}{2}(R_{f+g} - R_f - R_g)$ est identiquement nulle sur \mathbb{S}^2 .

Définition. Soit \mathcal{H}_f un hérisson (de fonction de support) C^2 de \mathbb{R}^3 . Si toute déformation isogauss infinitésimale $(\mathcal{H}_{f+tg})_{t \in \mathbb{R}}$ de \mathcal{H}_f est triviale, c'est-à-dire telle que \mathcal{H}_g est réduit à un seul point, alors le hérisson \mathcal{H}_f sera dit Gauss infinitésimalement rigide.

Remarque 1. Le hérisson \mathcal{H}_g est réduit à un point si, et seulement si, sa fonction de support g est la restriction à \mathbb{S}^2 d'une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , ce qui revient à dire que sa fonction de courbure R_g est identiquement nulle sur \mathbb{S}^2 [K, Theorem 1]. Par conséquent, le hérisson \mathcal{H}_f est Gauss infinitésimalement rigide si, et seulement si, nous avons :

$$\forall g \in C^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}), \quad (R_{(f,g)} = 0) \implies (R_g = 0).$$

Remarque 2. Si le hérisson $\mathcal{H}_f \subset \mathbb{R}^3$ est trivial (c'est-à-dire, réduit à un point), alors \mathcal{H}_f n'est pas Gauss infinitésimalement rigide. En effet, pour tout hérisson régulier \mathcal{H}_g de \mathbb{R}^3 , nous avons $R_{(f,g)} = 0$ bien que la fonction R_g ne soit pas identiquement nulle sur \mathbb{S}^2 .

Rigidité infinitésimale de Gauss des hérissons réguliers de \mathbb{R}^3

Rappelons la **preuve de la rigidité infinitésimale de Gauss des hérissons réguliers de \mathbb{R}^3** (par rapport à la fonction de courbure). Il s'agit essentiellement de la preuve donnée par J. Stoker [ST] : Soit \mathcal{H}_f un hérisson régulier de \mathbb{R}^3 . La régularité de \mathcal{H}_f est équivalente à la stricte positivité de sa fonction de courbure $R_f := 1/K_f$. Si $(\mathcal{H}_{f+tg})_{t \in \mathbb{R}}$ définit une déformation isogauss infinitésimale \mathcal{H}_f , alors nous avons :

$$0 = R_{(f,g)}^2 \geq R_f \cdot R_g$$

et donc $R_g \leq 0$ sur \mathbb{S}^2 . En prenant l'origine à l'intérieur du corps convexe bordé par \mathcal{H}_f dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons supposer sans perte de généralité que $f > 0$ et donc $fR_g \leq 0$ sur \mathbb{S}^2 . Maintenant, par symétrie du volume mixte des hérissons de \mathbb{R}^3 [MM4], il vient :

$$0 = \int_{\mathbb{S}^2} gR_{(f,g)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} fR_{(g,g)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} fR_g d\sigma,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique sur \mathbb{S}^2 . Par conséquent, R_g est identiquement nulle sur \mathbb{S}^2 , ce qui implique que \mathcal{H}_g est réduit à un point d'après la remarque 1. \square

Relation au problème de Minkowski

Dans le contexte des hérissons, il existe une relation étroite entre rigidité infinitésimale de Gauss et question de l'unicité dans le problème de Minkowski. Cela est dû à l'équivalence suivante :

$$\forall (f, g) \in C^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})^2, \quad (R_f = R_g) \iff R_{(f+g, f-g)} = 0.$$

Nous avons donné plus haut des exemples de paires de hérissons non congruents et de même fonction de courbure dans \mathbb{R}^3 (cf. figures 5 et 6). De chacun de ces exemples, nous pouvons déduire des exemples de hérissons non triviaux qui ne sont pas Gauss infinitésimalement rigides. C'est par exemple le cas de la paire de hérissons de \mathbb{R}^3 donnée par :

$$f(u) := \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \exp(-1/z^2) & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(u) := \begin{cases} \exp(-1/z^2) & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z \geq 0, \end{cases}$$

où $u = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. En effet, il est évident que $R_{(f,g)} = 0$. Nous ne connaissons que des exemples non analytiques. La question de savoir s'il existe des paires de hérissons analytiques non congruents et de même fonction de courbure dans \mathbb{R}^3 reste ouverte (par 'hérissons analytiques', nous entendons 'hérissons de fonction de support analytique'). Par conséquent, la question de savoir s'il existe des exemples de hérissons analytiques non triviaux qui ne sont pas Gauss infinitésimalement rigides est également ouverte.

References

- [A1] A.D. Alexandrov, *On uniqueness theorems for closed surfaces* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 99-102.
- [A2] A.D. Alexandrov, *On the curvature of surfaces* (Russian), Vestnik Leningrad. Univ. 21 (1966), 5-11.
- [B] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Berlin: Springer, 2003.
- [CY] S.Y. Cheng and S.T. Yau, *On the regularity of the solution of the n -dimensional Minkowski problem*, Commun. Pure Appl. Math. 29 (1976), 495-516.
- [K] D. Koutroufiotis, *On a conjectured characterization of the sphere*. Math. Ann. 205, (1973), 211-217.

- [LLR] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss)*. Singularities, Banach Center Publ. 20 (1988), 245-253.
- [L] C.S. Lin, *The local isometric embedding in \mathbb{R}^3 of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature*, J. Differ. Geom. 21 (1985), 213-230.
- [MM1] Y. Martinez-Maure, *Hedgehogs of constant width and equichordal points*, Ann. Polon. Math. 67 (1997), 285-288.
- [MM2] Y. Martinez-Maure, *De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons*. Arch. Math. 72 (1999), 444-453..
- [MM3] Y. Martinez-Maure, *Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 332 (2001), 41-44.
- [MM4] Y. Martinez-Maure, *Hedgehogs and zonoids*, Adv. Math. 158 (2001), 1-17.
- [MM5] Y. Martinez-Maure, *Théorie des hérissons et polytopes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 336 (2003), 241-244.
- [MM6] Y. Martinez-Maure, *Geometric study of Minkowski differences of plane convex bodies*, Canad. J. Math. 58 (2006), 600-624.
- [MM7] Y. Martinez-Maure, *New notion of index for hedgehogs of \mathbb{R}^3 and applications*, Eur. J. Comb. 31 (2010), 1037-1049.
- [MM8] Y. Martinez-Maure, *Uniqueness results for the Minkowski problem extended to hedgehogs*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), 440-450.
- [MI1] H. Minkowski, *Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1897), 198-219.
- [MI2] H. Minkowski, *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann. 57 (1903), 447-495.
- [N] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337-394.
- [PA] G. Panina, *New counterexamples to A. D. Alexandrov's hypothesis*, Adv. Geom. 5 (2005), 301-317.
- [PO] A.V. Pogorelov, *The Minkowski multidimensional problem*, John Wiley & Sons, Washington D.C. (1978), Russian original: 1975.
- [S] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge: Cambridge University Press 1993.
- [ST] J. J. Stoker, *Differential geometry*. Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989
- [TW] N. Trudinger and X.J. Wang, *The Monge-Ampère equation*

- and its geometric applications*, Handbook of geometric analysis. No. 1. Somerville, MA: International Press; Beijing: Higher Education Press. Adv. Lectures in Math. (ALM) 7, 467-524 (2008).
- [Z] C. Zuily, *Existence locale de solutions C^∞ pour des équations de Monge-Ampère changeant de type*, Commun. Partial Differ. Equations 14 (1989) 691-697.