

En fait, ce modèle pour la K-théorie n'est pas le seul. Dans son article [Wal83], Waldhausen montre que si on considère l'ensemble simplicial $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ dont les n -simplexes sont les diagrammes du type :

(W)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow A_{n,n} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{2,n} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{1,n} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{0,n} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{0,2} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{1,2} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{0,1} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow A_{0,1} \longrightarrow A_{0,2} \longrightarrow \dots \longrightarrow A_{0,n}
 \end{array}$$

avec tous les carrés bicartésiens, alors celui-ci a le même type d'homotopie que $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

Dans ce travail on montre cette équivalence dans le cadre des dérivateurs en s'inspirant de l'article [CN].

2. LE THÉORÈME DE COMPARAISON

§2.1. Notons \mathcal{C} la sous-catégorie de la catégorie des petites catégories \mathbf{cat} , dont les objets sont les sous-catégories finies de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et les morphismes les foncteurs qui sont des restrictions de foncteurs de la forme :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f \times g} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

avec $f(x, y) = g(x, y)$ si $y \geq 0$.

Considérons aussi \mathcal{C} comme une sous-2-catégorie de \mathbf{cat} , en prenant comme 2-flèches tous les morphismes entre foncteurs appartenant à \mathcal{C} . Du fait que les objets de \mathcal{C} sont des ensembles

partiellement ordonnés, on aura alors que pour deux foncteurs $I \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} J$ il y a au plus un

2-morphisme de u vers v .

Par définition, si \mathbb{D} est un dérivateur triangulé, tout ensemble partiellement ordonné fini est dans son domaine et donc on peut considérer la restriction $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{Cat}$, à la 2-catégorie qu'on vient de définir.

Étant donnée une catégorie I de \mathcal{C} , on dit que un I -diagramme X de \mathbb{D} , c'est-à-dire un objet X de $\mathbb{D}(I)$, est *polycartésien*, si pour tout foncteur $\mathbb{1} \times \mathbb{1} \xrightarrow{w} I$ dans \mathcal{C} (qu'on peut imaginer comme un carré dans I), $w^*(X)$ est un carré cartésien.

Notons $\mathbb{D}(I)_{\text{poly}}$ le nerf de la sous-catégorie de $\mathbb{D}(I)$, dont les objets sont les diagrammes polycartésiens et les morphismes les isomorphismes. On obtient ainsi un foncteur :

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathbb{D}(\cdot)_{\text{poly}}} \mathfrak{Set}$$

Si on considère l'objet cosimplicial $\Delta \xrightarrow{H_1} \mathcal{C}$ défini par :

$$\underline{n} \xrightarrow{H_1} \begin{array}{ccc} (0, -1) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (n, -1) \\ \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ & & \dots & & \\ \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ (0, -n-1) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (n, -n-1) \end{array}$$

et où le morphisme i -ème face (resp. dégénérescence) est défini en supprimant (resp. en répétant) la ligne $(*, -i-1)$ et la colonne $(i, *)$, la K -théorie à la Quillen du dérivateur triangulé \mathbb{D} est définie comme le type d'homotopie $\mathbb{K}^{\mathcal{Q}}(\mathbb{D})$ de l'ensemble bisimplicial $\mathbb{D}_{\text{poly}} \circ H_1^{\text{op}}$.

§2.2. De façon analogue, on peut prendre le modèle de Waldhausen de la K -théorie.

Étant donnée une catégorie I de \mathcal{C} , on dit que un I -diagramme X de \mathbb{D} a la *diagonale null*, si pour tout objet de I de la forme $(i, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec $i \geq 0$ (s'il y en a un), $X_{(i,i)}$ est un objet null de $\mathbb{D}(e)$.

Notons par $\mathbb{D}(I)_{\text{dpoly}}$ l'ensemble simplicial associé à la sous-catégorie de $\mathbb{D}(I)$, dont les objets sont les diagrammes polycartésien de diagonal nulle et les morphismes les isomorphismes.

On obtient à nouveau un foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathbb{D}(\cdot)_{\text{dpoly}}} \mathfrak{Set}$.

La K -théorie à la Waldhausen de \mathbb{D} est alors définie comme le type d'homotopie $\mathbb{K}^W(\mathbb{D})$ de l'ensemble bisimplicial $\mathbb{D}_{\text{dpoly}} \circ H_2^{\text{op}}$, où cette fois on considère H_2 le objet cosimplicial défini par :

$$\underline{n} \xrightarrow{H_2} \begin{array}{ccccccc} & & & & & & (n, n) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & (n, 1) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \downarrow \\ (1, 1) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (n, 1) \\ \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ (0, 0) & \longleftarrow & (1, 0) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (n, 0) \end{array}$$

et où le morphisme i -ème face (resp. dégénérescence) est défini en supprimant (resp. en répétant) la ligne $(*, i)$ et la colonne $(i, *)$.

Théorème 2.1. *Pour tout dérivateur triangulé \mathbb{D} , on a un isomorphisme $\mathbb{K}^{\mathcal{Q}}(\mathbb{D}) \simeq \mathbb{K}^W(\mathbb{D})$.*

Notons d'abord qu'en fait $\mathbb{K}^{\mathcal{Q}}(\mathbb{D})$ est le type d'homotopie de $\mathbb{D}_{\text{dpoly}} \circ H_1^{\text{op}}$ car l'image de H_1 ne contient pas des objets diagonaux.

Montrons le théorème en deux étapes en vérifiant que $\mathbb{D}_{\text{dpoly}} \circ H_1^{\text{op}}$ et $\mathbb{D}_{\text{dpoly}} \circ H_2^{\text{op}}$ ont le même type d'homotopie.

§2.3. Première étape.

Proposition 2.2. *Soit \mathbb{D} un dérivateur triangulé. Si $I \xrightarrow{u} J$ est le morphisme de la catégorie \mathcal{C} donné par :*

$$I = \left(\begin{array}{c} \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \end{array} \right) \subset \left(\begin{array}{c} (k,k) \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ (0,0) \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \end{array} \right) = J,$$

alors, u induit une équivalence entre la catégorie $\mathbb{D}(I)$ est la sous-catégorie plane de $\mathbb{D}(J)$ dont les objets sont les diagrammes X , tels que :

- (i) $X_{(k,k)}$ est un objet null de $\mathbb{D}(e)$.
- (ii) Les carrés de la ligne supérieur de X sont cocartésien, c'est-à-dire, $w^*(X) \in \mathbb{D}(\underline{1}^{\text{op}} \times \underline{1}^{\text{op}})$ est un carré cocartésien pour tout $\underline{1}^{\text{op}} \times \underline{1}^{\text{op}} \xrightarrow{w} J$ de la forme $w(i, j) = (w_1(i), k - 1 + j)$.

Démonstration. Cet est un cas particulier de la proposition 3.20 de [CN]. ✠

Soit G_1 l'ensemble cosimplicial donné par :

$$\underline{n} \xrightarrow{G_1} \begin{array}{c} (n,n) \\ \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ (0,0) \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow (n,0) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ (0,-1) \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow (n,-1) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ (0,-n-1) \leftarrow \bullet \leftarrow \dots \leftarrow (n,-n-1) \end{array}$$

Considérons les morphismes $F' \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{array} F$ d'objets cosimpliciaux de \mathcal{C} , où pour chaque $m \in \mathbb{N}$, φ_m est donné par l'inclusion $\varphi_m(x, y) = (x, y)$ et

$$\psi_m(x, y) = \begin{cases} (x, y) & y \geq 0 \\ (x, 0) & y < 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire, ψ_t induit l'identité sur le triangle et la projection du carré.

On obtient alors deux morphismes d'ensembles simpliciaux :

$$D \circ F^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{D * \varphi^{\text{op}}} \\ \xleftarrow{D * \psi^{\text{op}}} \end{array} D \circ (F')^{\text{op}}$$

avec $(D * \varphi^{\text{op}}) \circ (D * \psi^{\text{op}}) = \text{id}_{D \circ (F')^{\text{op}}}$ puisque $\psi \circ \varphi = \text{id}_{F'}$.

On va construire une homotopie entre l'identité de l'ensemble simplicial $D \circ F^{\text{op}}$ et le morphisme $(D * \psi^{\text{op}}) \circ (D * \varphi^{\text{op}}) = D * (\varphi \circ \psi)^{\text{op}}$.

Autrement dit, on va donner un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$D \circ F^{\text{op}} \times \underline{1} \xrightarrow{h} D \circ F^{\text{op}},$$

tel que si $\underline{m} \xrightarrow{k_j} \underline{1}$ est le morphisme constant de valeur j (pour j égale à 0 ou 1), pour tout $z \in D(F(\underline{m}))$:

$$(1) \quad \begin{aligned} h_m(z, k_0) &= (\text{id}_{D \circ F^{\text{op}}})_m(z) = D(\text{id}_{F(\underline{m})})(z) \\ &\text{et} \\ h_m(z, k_1) &= (D * (\varphi \circ \psi)^{\text{op}})_m(z) = D((\varphi \circ \psi)_m)(z) \end{aligned}$$

Pour cela notons d'abord que :

$$F(k_0)(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x, -1) & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F(k_1)(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x, -2) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Donc, si $F(\underline{1}) \xrightarrow{\lambda} \underline{1}$ est le morphisme défini par la formule :

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq -1 \\ 0 & \text{si } y = -2 \end{cases}$$

on obtient les égalités :

$$\lambda \circ F(k_0)(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda \circ F(k_1)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Ensuite, notons qu'il existe un 2-morphisme $\varphi \circ \psi \xrightarrow{\alpha} \text{id}_F$ dans la catégorie \mathcal{C}^Δ défini par la famille de foncteurs :

$$\left\{ F(\underline{m}) \times \underline{1} \xrightarrow{\alpha_m} F(\underline{m}) \right\}_m \quad \text{où} \quad \alpha_m(x, y, t) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x, yt) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

En particulier, le morphisme $F(\underline{m}) \xrightarrow{(\lambda \circ F(k_j)) \circ \text{id}} F(\underline{m}) \times \underline{1} \xrightarrow{\alpha_m} F(\underline{m})$, qui appartient bien à \mathcal{C} puisque $\alpha_m(x, y, \lambda \circ F(f)(x, y)) = (x, y)$ si $y \geq 0$, satisfait :

$$\begin{aligned} \alpha_m \circ \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ \lambda \circ F(k_0) \end{array} \right) (x, y) &= \alpha_m(x, y, \lambda \circ F(k_0)(x, y)) \\ &= (x, y) \\ &= \text{id}_{F(\underline{m})}(x, y) \end{aligned}$$

et

$$(2) \quad \alpha_m \circ \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ \lambda \circ F(k_1) \end{array} \right) (x, y) = \alpha_m(x, y, \lambda \circ F(k_1)(x, y)) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x, 0) & \text{si } y < 0 \end{cases} = (\varphi \circ \psi)_m(x, y)$$

Ainsi, si pour tout $\underline{m} \xrightarrow{f} \underline{1}$ et $z \in D(F(\underline{m}))$, la formule :

$$h_m(z, f) = D\left(\alpha_m \circ \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ \lambda \circ F(f) \end{array} \right)\right)(z)$$

definit un morphisme d'ensembles simpliciaux $D \circ F^{\text{op}} \times \underline{1} \xrightarrow{h} D \circ F^{\text{op}}$, celui-ci est l'homotopie désirée, puisque les égalités (2) qu'on vient de montrer induisent les égalités (1).

Montrons alors que pour tout $\underline{n} \xrightarrow{s} \underline{m}$ dans la catégorie simplicial, on a un carré commutatif :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} D(F(\underline{n})) \times \text{Hom}_{\Delta}(\underline{n}, \underline{1}) & \xrightarrow{h_n} & D(F(\underline{n})) \\ \uparrow D(F(\underline{m})) \times (-\circ s) & & \uparrow D(F(s)) \\ D(F(\underline{m})) \times \text{Hom}_{\Delta}(\underline{m}, \underline{1}) & \xrightarrow{h_m} & D(F(\underline{m})) \end{array}$$

Pour cela notons que si $\underline{m} \xrightarrow{f} \underline{1}$ et $z \in D(F(\underline{m}))$, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F(\underline{n}) & \xrightarrow{(\lambda \circ F(f \circ s)) \circ \text{id}} & F(\underline{n}) \times \underline{1} & \xrightarrow{\alpha_n} & F(\underline{n}) \\ \uparrow F(s) & & \uparrow F(s) \times \text{id} & & \uparrow F(s) \\ F(\underline{m}) & \xrightarrow{(\lambda \circ F(f)) \circ \text{id}} & F(\underline{m}) \times \underline{1} & \xrightarrow{\alpha_m} & F(\underline{m}) \end{array}$$

puisque F est un foncteur et la famille de α_m provient d'un 2-morphisme.

En appliquant le foncteur D à ce dernier carré on obtient que

$$D\left(\alpha_n \circ \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ \lambda \circ F(f \circ s) \end{array} \right) \circ F(s)\right)(z) = D\left(F(s) \circ \alpha_m \circ \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ \lambda \circ F(f) \end{array} \right)\right)(z);$$

c'est-à-dire, le carré (3) est commutatif.

RÉFÉRENCES

- [CN] D-C. Cisinski and A. Neeman, *Additivity for derivator K-theory*, preprint.
- [Jar87] J. F. Jardine, *The Multiple Q-Construction*, Canadian Journal of Mathematics **39** (1987), no. 5, 1174–1209.
- [Mal] G. Maltsiniotis, *La K-théorie d'un dérivateur triangulé*, À paraître dans 'Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics', Contemp. Math. Proceedings.
- [Nee97] A. Neeman, *K-Theory for triangulated categories I(A) : homological functors*, Asian Journal of Mathematics **1** (1997), 330–417.
- [Qui73] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory I*, Algebraic K-theory (New York), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 81–147.
- [Wal83] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory for spaces*, Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J.), Lecture Notes in Math., vol. 1126, Springer-Verlag, 1983, pp. 318–419.