

K₁ PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS
MÉMOIRE À PARIS VI
2004-2005

ELHOIM SUMANO
DIRECTEUR: GEORGES MALTSINIOTIS

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Le groupe fondamental d'un ensemble simplicial	2
§2.1. Ensembles simpliciaux	2
§2.2. Le nerf d'une catégorie	3
§2.3. Groupoïde fondamental	5
3. K-théorie d'une catégorie exacte	7
§3.1. Catégories exactes	7
§3.2. Le modèle de Gillet et Grayson	9
§3.3. Les groupes K _n	11
4. K ₁ par générateurs et relations	12
§4.1. Suites exactes doubles	12
§4.2. Quelques homotopies de chemins	17
§4.3. Preuve du théorème principal	22
Références	35

1. INTRODUCTION

Si \mathcal{A} est une catégorie exacte, Gillet et Grayson ont donné à [GG87] un ensemble simplicial pointé $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ avec une structure de groupe commutatif à homotopie près, tel que sa réalisation géométrique est homotopiquement équivalente à l'espace de lacets de $|\mathcal{Q}(\mathcal{A})|$, où $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ est le modèle de Quillen [Qui73]. En particulier, on a la formule :

$$K_n(\mathcal{A}) = \pi_n(\mathcal{G}(\mathcal{A})), \quad n \leq 0$$

Un n -simplexe de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est un couple de suites de monomorphismes admissibles :

$$\left(\frac{A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n}{B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \cdots \rightarrow B_n} \right)$$

avec un même quotient choisit. Un n -simplexe est dit diagonal si les deux suites des morphismes sont les mêmes. En particulier, l'ensemble de 0-simplexes diagonaux est l'ensemble des objets de \mathcal{A} .

Si $K(\mathcal{A})$ désigne le groupe libre commutatif de base l'ensemble des 0-simplexes diagonaux quotient par la relation $[A'] + [A''] = [A]$ pour toute suite exacte $A' \rightarrow A \rightarrow A''$, alors on a un isomorphisme :

$$(1) \quad \begin{aligned} K_0(\mathcal{A}) &\longrightarrow K(\mathcal{A}) \\ [A, B] &\longmapsto [A] - [B] \end{aligned}$$

En suivant [Nen98], on appelle à un 1-simplexe entre sommets diagonaux une suite exacte double de \mathcal{A} . Si $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est le groupe libre commutatif de base les suites exactes doubles de \mathcal{A} soumis certaines relations (voir §4.1), on va définir un isomorphisme de groupes :

$$K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

similaire à (1) ci-dessus.

2. LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN ENSEMBLE SIMPLICIAL

§2.1. **Ensembles simpliciaux.** Soient **cat** la catégorie des petites catégories et **Ord** sa sous-catégorie pleine des ensembles ordonnés.

Si n est un nombre naturel, on note $[n]$ l'ensemble ordonné $\{0 < 1 < \dots < n\}$. La *catégorie simpliciale* Δ est définie comme la sous-catégorie pleine de **Ord** dont les objets sont les ensembles ordonnés $[n]$, où $n \in \mathbb{N}$.

Parmi les morphismes de la catégorie simpliciale il en existe certains plus importants :

Le *morphisme i-ème face* $[n-1] \xrightarrow{\delta_n^i} [n]$ pour $0 \leq i \leq n$, est le morphisme injectif qui n'a pas i dans son image ; explicitement,

$$\delta_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

Le *morphisme j-ème dégénérescence* $[n+1] \xrightarrow{\sigma_n^j} [n]$ pour $0 \leq j \leq n$, est le morphisme surjectif qui envoie j et $j+1$ sur j , autrement dit,

$$\sigma_n^j(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ i-1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

L'importance de ceux-ci vient de l'affirmation suivante : Si $[n] \xrightarrow{f} [m]$ est un morphisme de la catégorie simpliciale Δ , il existe une unique décomposition :

$$(2) \quad f = \delta_m^{i_1} \circ \delta_{m-1}^{i_2} \circ \dots \circ \delta_{m-s+1}^{i_s} \circ \sigma_{n-t}^{j_1} \circ \sigma_{n-t+1}^{j_2} \circ \dots \circ \sigma_{n-1}^{j_t},$$

où $m \geq i_1 > \dots > i_s \geq 0$, $n \geq j_t > \dots > j_1 \geq 0$ et $m = n - t + s$.

En effet, il suffit choisir $n \geq j_t > \dots > j_1 \geq 0$ tels que $f(j_k) = f(j_k + 1)$ et $m \geq i_1 > \dots > i_s \geq 0$ tels que $i_k \notin f([n])$.

§2.1.1. Désignons par \mathbf{sSet} la catégorie des foncteurs $\mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$ et appelons *ensembles simpliciaux* ses objets.

Si X est un ensemble simplicial, on note les morphismes $X(\delta_n^i)$ et $X(\sigma_n^j)$ simplement d_i^n et s_j^n , ou le plus souvent d_i et s_j , respectivement. On appelle aussi les éléments de l'ensemble $X_n := X([n])$ les *n-simplexes de X*, ou si $n = 0$ et $n = 1$ les *sommets* et les *arêtes* de X , respectivement.

Ainsi, un ensemble simplicial X détermine des familles d'ensembles et de morphismes :

$$(3) \quad \left\{ X_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ X_n \xrightarrow{d_i^n} X_{n-1} \mid 0 \leq i \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left\{ X_n \xrightarrow{s_j^n} X_{n+1} \mid 0 \leq j \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

De plus, on peut montrer que ces données viennent d'un ensemble simplicial si les fonctions d_i^n et s_j^n ont les propriétés :

$$(4) \quad \begin{aligned} d_j^{n+1} \circ d_i^n &= d_i^{n+1} \circ s_{j-1}^n && \text{si } i < j \\ s_j^n \circ s_i^{n+1} &= s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1} && \text{si } i \leq j \\ s_j^n \circ d_i^{n+1} &= \begin{cases} d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1} & \text{si } 0 \leq i < j \\ \text{id}_{[n]} & \text{si } j \leq i \leq j+1 \\ d_{i-1}^n \circ s_j^{n-1} & \text{si } j+1 < i \end{cases} \end{aligned}$$

Voilà donc une définition combinatoire d'un ensemble simplicial, comme un diagramme d'ensembles et fonctions :

$$(5) \quad X = \cdots \cdots X_n \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n^n} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_0^n} \end{array} X_{n-1} \cdots \cdots X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2^2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_0^2} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_0^1} \end{array} X_0$$

$\begin{array}{c} \xleftarrow{s_{n-1}^{n-1}} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_0^{n-1}} \end{array}$
 $\begin{array}{c} \xleftarrow{s_1^1} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_0^1} \end{array}$

soumis aux relations (4).

§2.2. **Le nerf d'une catégorie.** Si n est un nombre naturel notons par Δ^n l'ensemble simplicial canonique de dimension n , c'est-à-dire, celui-ci qui a pour ensemble de m -simplexes l'ensemble de morphismes $\text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$, et où $d_i = - \circ \delta^i$ et $s_j = - \circ \sigma^j$. La composition des morphismes fait de cette assignation $[n] \mapsto \Delta^n$ un foncteur pleinement fidèle $\Delta \xrightarrow{h} \mathbf{sSet}$ appelé *le plongement de Yoneda*.

Plus généralement, un foncteur $\Delta \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}$ détermine un autre foncteur :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{F}^\wedge} & \mathbf{sSet} \\ \mathbf{a} & \longmapsto & \mathcal{F}^\wedge(\mathbf{a}) \end{array}$$

par des formules similaires $\mathcal{F}^\wedge(\mathbf{a})_n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}([n]), \mathbf{a})$, $d_i = - \circ \mathcal{F}(\delta^i)$ et $s_j = - \circ \mathcal{F}(\sigma^j)$. Et de plus, on peut montrer que si la catégorie \mathcal{C} a des limites inductives,

le foncteur \mathcal{F}^\wedge ainsi défini a un adjoint à gauche \mathcal{F}_\wedge . Ce foncteur est appelé une *extension de Kan de \mathcal{F} à travers \mathbf{h}* (car il est caractérisé à isomorphisme près par la propriété $\mathcal{F}_\wedge \circ \mathbf{h} \simeq \mathcal{F}$).

Donc, un foncteur \mathcal{F} de la catégorie simpliciale vers une catégorie avec limites inductives induit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{C} \\
 & \nearrow \mathcal{F} & \uparrow \mathcal{F}_\wedge \dashv \mathcal{F}^\wedge \\
 \Delta^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \mathbf{sSet}
 \end{array}$$

§2.2.1. Dans le cas où \mathcal{F} est l'inclusion naturelle $\Delta \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{cat}$ le foncteur (6) ci-dessus résulte être plainement fidèle. Celui-ci est appelé le *foncteur nerf* et noté

$$(7) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathbf{cat} & \xhookrightarrow{\mathcal{N}} & \mathbf{sSet} \\
 \mathcal{C} & \longmapsto & \mathcal{N}(\mathcal{C})
 \end{array}$$

On peut vérifier facilement que le nerf $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ d'une petite catégorie \mathcal{C} est donné combinatoirement par :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des n -simplexes $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n$ est l'ensemble des suites $\mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1}$ de n morphismes entre $n + 1$ objets de \mathcal{C} :

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_0 = \mathcal{C}_0 = \text{Objets de } \mathcal{C}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_1 = \mathcal{C}_1 = \text{Flèches de } \mathcal{C}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_2 = \mathcal{C}_2 = \left\{ \mathbf{a} \xrightarrow{f} \mathbf{b} \xrightarrow{g} \mathbf{c} \right\}$$

⋮

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_n = \mathcal{C}_n = \left\{ \mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} \right\}$$

⋮

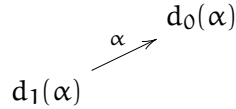
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme i -ème face $\mathcal{C}_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{C}_{n-1}$ est défini par :

$$\left(\mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} \right) \mapsto \begin{cases} \mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \mathbf{a}_i \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} \mathbf{a}_{i+2} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} & \text{si } 0 < i < n \\ \mathbf{a}_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} & \text{si } i = 0 \\ \mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbf{a}_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

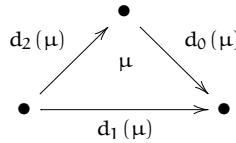
et le morphisme j -ème dégénérescence $\mathcal{C}_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{C}_{n+1}$ par :

$$\left(\mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} \right) \mapsto \left(\mathbf{a}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} \mathbf{a}_{j+1} \xrightarrow{\text{id}} \mathbf{a}_{j+1} \xrightarrow{f_i} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbf{a}_{n+1} \right)$$

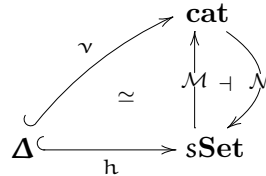
Pour cette raison, si X est un ensemble simplicial quelconque, on appelle une arête α de X une flèche de $d_1(\alpha)$ vers $d_0(\alpha)$:



et si μ est un 2-simplexe, on pense à un diagramme comme ci-dessous :

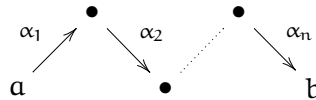


§2.2.2. De plus, puisque la catégorie **cat** a des limites inductives, nous avons un diagramme :



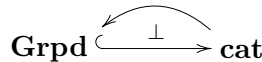
Si X est un ensemble simplicial, $\mathcal{M}(X)$ est appelée la catégorie des chemins à homotopie près de X .

Donnons une description de cette catégorie. Pour cela considérons $\mathcal{M}'(X)$ la catégorie dont les objets sont les sommets de X , et où un morphisme α de a vers b est un chemin de flèches de a vers b , c'est-à-dire, une suite $\alpha = (\alpha_1 | \dots | \alpha_n)$ avec $d_0(\alpha_i) = d_1(\alpha_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq n - 1$:



Alors, $\mathcal{M}(X)$ est la catégorie que s'obtient de $\mathcal{M}'(X)$ en imposant la relation $(d_1(\mu)) \sim (d_0(\mu) | d_2(\mu))$ pour tout 2-simplexe μ de X . (En particulier, pour tout objet a le chemin $(s_0(a))$ est dans la classe de l'identité de a .)

§2.3. **Groupeïde fondamental.** Rappelons que l'inclusion de la catégorie de groupeïdes dans **cat** a un adjoint à gauche :



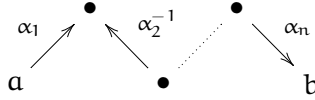
qui associe à toute catégorie \mathcal{C} sa catégorie totale de fractions, notée $\mathcal{C}[\mathcal{C}^{-1}]$. Celle-ci est la catégorie (en fait le groupeïde) qui s'obtient de \mathcal{C} après avoir formellement ajouté un inverse à tout morphisme. (Voir [GZ67]).

Si X est un ensemble simplicial, le groupeïde fondamental de X est défini comme la catégorie totale de fractions de la catégorie $\mathcal{M}(X)$. Il est noté par $\Pi_1(X)$.

Pour mieux comprendre $\Pi_1(X)$ considérons d'ailleurs la définition suivante. Si a et b sont deux sommets de X , appelons à un expression formelle $\alpha =$

$(\alpha_1^{\varepsilon_1} | \dots | \alpha_n^{\varepsilon_n})$ de flèches α_i de X et où $\varepsilon_i = 1, -1$, un *chemin orienté de a vers b* si on a $d_{s_1}(\alpha_1) = a, = d_{t_{n+1}}(\alpha_n) = b$ et $d_{s_i}(\alpha_i) = d_{t_i}(\alpha_{i-1})$, pour $1 < i \leq n$ où

$$s_i = \frac{(|\varepsilon_i| + \varepsilon_i)}{2} \quad \text{et} \quad t_i = \frac{(|\varepsilon_{i-1}| - \varepsilon_{i-1})}{2}$$



Donc, $\Pi_1(X)$ est le groupoïde dont les objets sont les sommets de X et où un morphisme de a vers b est une classe de chemins orientés par la relation d'équivalence engendrée par $(d_1(\mu)) \sim (d_0(\mu) | d_2(\mu))$ pour tout 2-simplexe μ de X . (En particulier, pour toute flèche α de X , $(\alpha | \alpha^{-1})$ et $(\alpha^{-1} | \alpha)$ sont les identités.)

On notera la classe d'un chemin orienté $\alpha = (\alpha_1^{\varepsilon_1} | \dots | \alpha_n^{\varepsilon_n})$ dans cette catégorie par $[\alpha] = [\alpha_1^{\varepsilon_1} | \dots | \alpha_n^{\varepsilon_n}]$, et on l'appellera *la classe d'homotopie du chemin orienté α* .

Deux chemins orientés de X sont dits *homotopes* s'ils ont la même classe d'homotopie. Dans ce cas, ils ont la même origine et la même extrémité. Plus généralement, deux chemins quelconques α et β de X sont dit *librement homotopes* s'il existe des chemins orientés γ et δ de X tels que $\gamma \circ \beta$ et $\alpha \circ \delta$ aient la même classe d'homotopie.

§2.3.1. *Réalisation géométrique.* À tout objets $[n]$ de la catégorie simpliciale on peut associer un espace topologique Δ^n , appelé le *simplexe topologique canonique de dimension n*. Cet espace est défini comme l'enveloppe convexe de la base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$, de l'espace linéaire \mathbb{R}^{n+1} . Autrement dit :

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

On sait qu'une fonction quelconque d'ensembles $[n] \xrightarrow{f} [m]$, induit une unique fonction linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec la propriété $e_i \mapsto e_{f(i)}$. Sa restriction est une fonction continue $\Delta^n \xrightarrow{f} \Delta^m$, qu'on désigne par abus per la même lettre.

Par exemple, le morphisme i -ème face $[n-1] \xrightarrow{\delta_n^i} [n]$ détermine le plongement de Δ^{n-1} sur la i -ème face de Δ^n ; et le morphisme j -ème dégénérescence $[n+1] \xrightarrow{\sigma_n^j} [n]$ détermine la projection de Δ^{n+1} sur sa j -ème face (qui peut s'identifier avec Δ^n).

On a de cette manière un foncteur $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$. Puisque la catégorie \mathbf{Top} a des limites inductives on a donc un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{Top} \\
 & \nearrow \nu & \uparrow |\cdot| \dashv s(\cdot) \\
 \Delta & \xrightarrow{h} & \mathbf{sSet}
 \end{array}$$

Si X est un ensemble simplicial, on appelle l'espace $|X|$ la *réalisation géométrique* de X^1 .

Finalemnt, rappelons que si X est un ensemble simplicial et $\Pi_1^{\text{top}}(|X|)$ désigne le groupoïde fondamental des lacets topologiques de sa réalisation géométrique, alors il y a une équivalence de groupoïdes :

$$(8) \quad \Pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\text{top}}(|X|)$$

3. K-THÉORIE D'UNE CATÉGORIE EXACTE

§3.1. **Catégories exactes.** Pour notre propos, une *catégorie exacte* \mathcal{A} est une catégorie additive plongée comme une sous-catégorie additive pleine, fermée par d'extensions, d'une catégorie abelienne \mathcal{B} .

Si \mathcal{A} est une catégorie exacte, une suite de morphismes de \mathcal{A} :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est dite *exacte* si g est le conoyau de f et f est le noyau de g (dans \mathcal{B}). Un monomorphisme (resp. épimorphisme) $A \xrightarrow{f} B$ (resp. $B \xrightarrow{g} C$) de \mathcal{A} est dit un *monomorphisme admissible* (resp. *épimorphisme admissible*) s'il a un conoyau dans \mathcal{B} (resp. noyau) qui soit dans \mathcal{A} .

§3.1.1. *Quelques propriétés.* Si \mathcal{A} est une catégorie exacte, la famille des monomorphismes admissibles (resp. épimorphismes admissibles) de \mathcal{A} est fermé, par composition et cochageement de base (resp. changement de base).

En effet, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sont deux monomorphismes admissibles (resp. épimorphismes admissibles) et si \mathcal{A} est plongée dans la catégorie abelienne \mathcal{B} , alors on a une suite exacte dans \mathcal{B} :

$$(9) \quad \text{coker}(f) \longrightarrow \text{coker}(g \circ f) \longrightarrow \text{coker}(g)$$

$$\left(\text{resp. } \text{ker}(f) \longrightarrow \text{ker}(g \circ f) \longrightarrow \text{ker}(g) \right)$$

Donc, $\text{coker}(g \circ f)$ (resp. $\text{ker}(g \circ f)$) est dans \mathcal{A} car elle est fermée par d'extensions.

¹On supposera en plus que le foncteur $|\cdot|$ a son image dans la catégorie d'espaces de Kelley. Voir [GZ67]. De cette façon il commute avec les produits finis

D'autre parte, si $A \xrightarrow{f} B$ est un monomorphisme admissible (resp. épimorphisme admissible) et si $A \xrightarrow{\varphi} X$ (resp. $Y \xrightarrow{\psi} B$) est un morphisme quelconque de \mathcal{A} , on a dans \mathcal{B} un diagramme dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & \text{coker}(f) \\ \varphi \downarrow & (*) & \downarrow \tilde{\varphi} & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & D & \longrightarrow & \text{coker}(f) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} & \text{ker}(f) & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ & \parallel & & \downarrow \tilde{\psi} & (*) & \downarrow \psi \\ \text{resp.} & \text{ker}(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \right)$$

où le carré (*) est cocartésien (resp. cartésien).

Donc, D est dans \mathcal{A} et de plus le morphisme \tilde{f} est un monomorphisme admissible.

§3.1.2. *Hexagones exacts.* Un diagramme commutatif dans \mathcal{A} :

$$(10) \quad \begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \\ \varphi^A \downarrow & & \downarrow \varphi^B & & \downarrow \varphi^C \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \psi^A \downarrow & & \downarrow \psi^B & & \downarrow \psi^C \\ A'' & \xrightarrow{f''} & B'' & \xrightarrow{g''} & C'' \end{array}$$

dont les colonnes et les lignes sont exactes est appelé un *hexagone exact*.

Étant donné un hexagone exact, considérons la somme amalgamée :

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ \varphi^A \downarrow & & \downarrow \widetilde{\varphi^A} \\ A & \xrightarrow{\tilde{f}'} & D \end{array}$$

Puisque on a l'égalité $\varphi^B \circ f' = f \circ \varphi^A$, par la propriété universelle de la somme amalgamée on obtient un diagramme commutatif :

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ \varphi^A \downarrow & & \downarrow \varphi^A \\ A & \xrightarrow{\tilde{f}'} & D \\ & \searrow f & \downarrow d \\ & & B \end{array}$$

Si nous posons sous $p = \psi^C \circ g = g'' \circ \psi^B$, on en déduit une suite exacte :

$$D \xrightarrow{d} B \xrightarrow{p} C''$$

§3.2. **Le modèle de Gillet et Grayson.** Notons qu'étant donné une suite de monomorphismes admissibles dans une catégorie exacte \mathcal{A} :

$$(13) \quad A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 ,$$

lorsqu'on choisit pour $0 \leq i < j \leq 2$ de suites exactes $A_i \longrightarrow A_j \longrightarrow A_{j/i}$ dans \mathcal{A} , on peut par la propriété universelle du conoyau compléter la suite (13) dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A_{2/1} \\ & & & & \uparrow \\ & & & & A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \\ & & & & \uparrow \\ A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 \end{array}$$

De plus, la suite qui résulte de cette construction $A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \longrightarrow A_{2/1}$ est exacte par (9).

Plus généralement, étant donné une suite de monomorphismes admissibles de longueur n :

$$(14) \quad A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n$$

lorsqu'on choisit pour tout $0 \leq i < j \leq n$ des quotients $A_i \longrightarrow A_j \longrightarrow A_{j/i}$ dans \mathcal{A} , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & A_{n/n} \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & A_{2/1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/1} \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/0} \\ & & & & & & \uparrow \\ A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow A_n \end{array}$$

où en vertu de ce qui précède les suites $A_{i/k} \longrightarrow A_{j/k} \longrightarrow A_{j/i}$ sont exactes, pour tout $k < i < j$.

On appellera le diagramme ainsi obtenu :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & A_{n/n} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & A_{2/1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/1} \\
 & & & & & & \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\
 & & & & & & A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/0}
 \end{array}$$

un quotient de la suite (14).

Définissons l'ensemble simplicial de Gillet et Grayson de \mathcal{A} , noté $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, comme celui dont l'ensemble des n -simplexes est l'ensemble des paires de suites de longueur n de monomorphismes admissibles :

$$\left(\frac{A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n}{B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \cdots \rightarrow B_n} \right)$$

avec un même quotient donné :

(15)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A_{n/n-1} & & & & & & A_{n/n-1} \\
 & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 & & & & A_{2/1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/1} & & & & & & A_{2/1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/1} \\
 & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 & & & & A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/0} & & & & & & A_{1/0} \longrightarrow A_{2/0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n/0} \\
 & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n & & & & & & & & & & B_0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_n
 \end{array}$$

Les morphismes face $\mathcal{G}_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{G}_{n-1}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ sont définis en supprimant la ligne $A_{*/i}$ et les colonnes qui contiennent A_i et B_i . Les morphismes dégénérescences $\mathcal{G}_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{s_i^n} \mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{A})$ sont définis en répétant à droite les colonnes qui contiennent A_i et B_i , en complétant par 0 en haut des colonnes.

Alors par exemple, l'ensemble de 0-simplexes est le produit $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0$ et un 1-simplexe de (A, A') vers (B, B') est une paire de suites exactes avec le même conoyau :

$$(A \rightarrow B \rightarrow C, A' \rightarrow B' \rightarrow C)$$

§3.2.1. Considérons l'automorphisme ν de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ défini pour chaque n par l'inversion :

$$(16) \quad \left(\frac{A_0 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n}{B_0 \rightarrow \cdots \rightarrow B_n} \right) = \xi \xrightarrow{\nu_n} -\xi = \left(\frac{B_0 \rightarrow \cdots \rightarrow B_n}{A_0 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n} \right)$$

Un élément ξ de $\mathcal{G}(\mathcal{A})_n$ tel que $\xi = -\xi$ est dit un n -simplexe diagonal. Notons par $\widetilde{\mathcal{G}(\mathcal{A})}$ le sous-ensemble simplicial de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ des éléments diagonaux. Montrons que la réalisation géométrique de $\widetilde{\mathcal{G}(\mathcal{A})}$ est contractile. Pour cela, il suffit de voir qu'il est à homotopie près le nerf d'une catégorie avec objet initial.

Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$ la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{A} , et où un morphisme de A vers B est une monomorphisme admissible $A \xrightarrow{f} B$.

Alors, l'objet 0 de \mathcal{A} est un objet initial de $\widetilde{\mathcal{A}}$. De plus, on peut définir un équivalence homotopique du nerf de $\widetilde{\mathcal{A}}$ vers $\widetilde{\mathcal{G}(\mathcal{A})}$ par le procédé indiqué au début de la section.

D'un autre côté, notons que la somme directe définie en \mathcal{A} induit un morphisme d'ensembles simpliciaux (il suffit de choisir une somme directe de chaque deux objets de \mathcal{A}) :

$$(17) \quad \mathcal{G}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}(\mathcal{A}) \xrightarrow{+} \mathcal{G}(\mathcal{A})$$

par la formule :

$$\left(\frac{A_0 \rightarrow \dots \rightarrow A_n}{B_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_n} \right) + \left(\frac{A'_0 \rightarrow \dots \rightarrow A'_n}{B'_0 \rightarrow \dots \rightarrow B'_n} \right) = \left(\frac{A_0 \oplus A'_0 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \oplus A'_n}{B_0 \oplus B'_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \oplus B'_n} \right)$$

Cette structure fait de la réalisation géométrique de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ un monoïde commutatif à homotopie près, en vertu des propriétés de \oplus . De plus, le morphisme (16) induit un inverse de (17) car $\xi + (-\xi)$ et $(-\xi) + \xi$ sont toujours diagonaux et on a vu que $|\widetilde{\mathcal{G}(\mathcal{A})}|$ est contractile.

D'après ce qui précède, l'espace $|\mathcal{G}(\mathcal{A})|$ a une structure de groupe topologique commutatif à homotopie près, avec unité le point $*$ qui correspond au sommet $(0, 0)$ de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

§3.3. Les groupes K_n . Soit \mathcal{A} une catégorie exacte.

De la structure de groupe à homotopie près de la réalisation géométrique de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, qu'on a mentionnée dans la section précédente, on peut en déduire deux choses :

§3.3.1. La première. L'ensemble de composants connexes par arcs de $|\mathcal{G}(\mathcal{A})|$ peut être vu naturellement comme un groupe commutatif.

D'après l'équivalence (8), ce groupe a la description combinatoire suivante : Il est l'ensemble des couples d'objets de \mathcal{A} sous la relation d'équivalence donné par des chemins orientés. L'addition est donnée coordonnée à coordonnée par \oplus .

Notons $K_0(\mathcal{A})$ ce groupe et $[A, A']$ la classe d'un sommet de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Si $K(\mathcal{A})$ désigne le groupe commutatif de base les objets A de \mathcal{A} , soumis à la relation $[A''] + [A'] = [A]$ s'il y a une suite exacte $A'' \rightarrow A \rightarrow A'$. Alors, on peut définir un isomorphisme de groupes :

$$(18) \quad \begin{aligned} K_0(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\sim} K(\mathcal{A}) \\ [A, A'] &\longmapsto [A] - [A'] \end{aligned}$$

§3.3.2. *La deuxième.* Le groupe fondamental de $|\mathcal{G}(\mathcal{A})|$ avec point base $*$ est commutatif et on a une autre façon de définir son addition (Voir [MA02]). Pour cela il faut considérer les lacets comme des fonctions vers $|\mathcal{G}(\mathcal{A})|$ et effectuer une addition point par point.

De l'équivalence (8) on peut déduire une description combinatoire de $\pi_1(|\mathcal{G}(\mathcal{A})|, *)$ et de son addition :

Il est l'ensemble des lacets orientés de point base $(0, 0)$ en imposant que si μ est un 2-simplexe $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, alors $(d_1(\mu))$ et $(d_0(\mu)|d_2(\mu))$ puissent être échangés dans tout lacet. L'addition des lacets est donnée par composition ou par le procédé suivant :

Étant donné deux lacets combinatoires α et β de base $(0, 0)$, en ajoutant des flèches du type $\left(A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0, A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \right)$ on peut supposer que α et β sont de la forme :

$$\alpha = (\alpha_1|\alpha_2^{-1}|\dots|\alpha_{2n-1}|\alpha_{2n}^{-1}) \quad \text{et} \quad \beta = (\beta_1|\beta_2^{-1}|\dots|\beta_{2n-1}|\beta_{2n}^{-1})$$

Alors $[\alpha] + [\beta]$ est donné par la classe d'homotopie du lacet :

$$(\alpha_1 + \beta_1 | (\alpha_2 + \beta_2)^{-1} | \dots | \alpha_{2n-1} + \beta_{2n-1} | (\alpha_{2n} + \beta_{2n})^{-1})$$

On note par $K_1(\mathcal{A})$ le groupe commutatif ainsi obtenu. Dans ce travail on va donner une description du groupe $K_1(\mathcal{A})$ similaire à celle de $K_0(\mathcal{A})$ donnée par l'isomorphisme (18).

§3.3.3. Plus généralement, si $n > 1$, on note $K_n(\mathcal{A})$ le n -ième groupe d'homotopie de $|\mathcal{G}(\mathcal{A})|$ de point base $*$. Appelons a la famille de groupes commutatifs $\{K_n(\mathcal{A})\}_n$ la K -théorie de \mathcal{A} .

4. K_1 PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

§4.1. **Suites exactes doubles.** Soient \mathcal{A} une catégorie exacte et $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ son ensemble simplicial de Gillet et Grayson.

Une flèche $(A, A) \xrightarrow{\ell} (B, B)$ de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ entre deux sommets diagonaux est appelée une *suite exacte double* de \mathcal{A} :

$$\ell = \left(A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{g_1} C, A \xrightarrow{f_2} B \xrightarrow{g_2} C \right) = \left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C \right).$$

Une suite exacte double ℓ est dite *diagonale*, si elle est une flèche diagonale, c'est-à-dire, si $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$.

Notons par $\mathbf{Sed}(\mathcal{A})$ la catégorie de suites exactes doubles, où un *morphisme de suites exactes doubles* $\ell \xrightarrow{\varphi} \ell'$ est un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \ell = & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} & B & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} & C \\ \downarrow \varphi & \downarrow \varphi^A & & \downarrow \varphi^B & & \downarrow \varphi^C \\ \ell' = & A' & \begin{array}{c} \xrightarrow{f'_1} \\ \xrightarrow{f'_2} \end{array} & B' & \begin{array}{c} \xrightarrow{g'_1} \\ \xrightarrow{g'_2} \end{array} & C' \end{array}$$

tel que $\varphi^B \circ f_i = f'_i \circ \varphi^A$ et $\varphi^C \circ g_i = g'_i \circ \varphi^A$ pour tout i , $1 \leq i \leq 2$.

§4.1.1. *Hexagones exacts.* Un *morphisme double* $\ell \xrightarrow{\varphi} \ell'$ entre deux objets de $\mathbf{Sed}(\mathcal{A})$, est un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \ell = A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{g_1} & C \\ \varphi \downarrow & \varphi_1^A \downarrow & \varphi_2^A \downarrow & \varphi_1^B \downarrow & \varphi_2^B \downarrow \\ \ell' = A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{g'_1} & C' \end{array}$$

où $\varphi_i^B \circ f_i = f'_i \circ \varphi_i^A$ et $\varphi_i^C \circ g_i = g'_i \circ \varphi_i^B$ pour tout i , $1 \leq i \leq 2$.

Une suite $\ell' \xrightarrow{\varphi} \ell \xrightarrow{\psi} \ell''$ de morphismes doubles :

$$(19) \quad \begin{array}{ccccc} \ell' = A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{g'_1} & C' \\ \varphi \downarrow & \varphi_1^A \downarrow & \varphi_2^A \downarrow & \varphi_1^B \downarrow & \varphi_2^B \downarrow \\ \ell = A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{g_1} & C \\ \psi \downarrow & \psi_1^A \downarrow & \psi_2^A \downarrow & \psi_1^B \downarrow & \psi_2^B \downarrow \\ \ell'' = A'' & \xrightarrow{f''_1} & B'' & \xrightarrow{g''_1} & C'' \end{array}$$

est dite *exacte*, si les suites verticales forment des suites exactes doubles de \mathcal{A} :

$$(20) \quad \begin{aligned} \ell_A &= \left(\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\varphi_1^A} & A \\ & \varphi_2^A \searrow & \nearrow \psi_1^A \\ & & A'' \end{array} \right) \\ \ell_B &= \left(\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\varphi_1^B} & B \\ & \varphi_2^B \searrow & \nearrow \psi_1^B \\ & & B'' \end{array} \right) \\ \ell_C &= \left(\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\varphi_1^C} & C \\ & \varphi_2^C \searrow & \nearrow \psi_1^C \\ & & C'' \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on appelle le diagramme (19) un *hexagone exact double*.

§4.1.2. *Le groupe de Nenashev.* Définissons le *groupe de Nenashev* de \mathcal{A} , noté $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ comme le groupe commutatif libre engendré par les suites exactes doubles, soumis aux relations :

N1. $\ell \sim 0$ si ℓ est diagonal.

N2. $\ell' - \ell + \ell'' \sim \ell_A - \ell_B + \ell_C$ pour tout hexagone exact double (19).

Notons par $\langle \ell \rangle$ la classe d'une suite exacte double ℓ dans le groupe $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

§4.1.3. *Propriété d'addition.* Notons que la somme de deux suites exactes doubles dans le groupe $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est réellement s'addition comme des flèches donnée par (17), c'est-à-dire :

$$(21) \quad \langle \ell \rangle + \langle \ell' \rangle = \langle \ell + \ell' \rangle$$

En effet, si nous avons que :

$$\ell = \left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C \right) \quad \text{et} \quad \ell' = \left(A' \begin{array}{c} \xrightarrow{f'_1} \\ \xrightarrow{f'_2} \end{array} B' \begin{array}{c} \xrightarrow{g'_1} \\ \xrightarrow{g'_2} \end{array} C' \right)$$

sont deux suites exactes doubles, alors on a un hexagone exact :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \oplus A' & \xrightarrow{f \oplus f'} & B \oplus B' & \xrightarrow{\varphi \oplus \varphi'} & C \oplus C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' \end{array}$$

(Les flèches horizontales de la deuxième ligne sont g , $g \oplus g'$, ψ , $\psi \oplus \psi'$, g' , ψ' .)

où les suites verticales sont diagonaux. En particulier, on a que

$$(22) \quad -\langle \ell \rangle = \langle -\ell \rangle$$

où $-\ell$ est donné par (16), car $\langle \ell \rangle + \langle -\ell \rangle = \langle \ell + (-\ell) \rangle$ et $\ell + (-\ell)$ est toujours diagonal.

§4.1.4. *Somme directe de sommets à gauche et à droite.* Étant donné une flèche $\alpha = (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} M, A' \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{\psi} M)$ et un sommet (X, Y) de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, considérons les flèches :

$$(X, Y) \oplus \alpha = (A \oplus X \xrightarrow{f \oplus 1} B \oplus X \xrightarrow{(\varphi, 0)} M, A' \oplus Y \xrightarrow{g \oplus 1} B' \oplus Y \xrightarrow{(\psi, 0)} M)$$

et

$$\alpha \oplus (X, Y) = (A \xrightarrow{\binom{f}{0}} B \oplus X \xrightarrow{\varphi \oplus 1} M \oplus X, A' \xrightarrow{\binom{g}{0}} B' \oplus Y \xrightarrow{\psi \oplus 1} M \oplus Y)$$

Alors, dans le cas où α est une suite exacte double, disons :

$$\left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} N \right)$$

et $X = Y$, nous avons que $(X, X) \oplus \ell$ et $\ell \oplus (X, X)$ sont aussi des suites exactes doubles.

De plus, on peut voir que

$$\langle (X, X) \oplus \ell \rangle = \langle \ell \oplus (X, X) \rangle = \langle \ell \rangle \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

par un cas particulier de la section précédente.

§4.1.5. *Le groupe K_1^{\det} de Bass.* Soit $\mathbf{Aut}(\mathcal{A})$ la catégorie d'automorphismes de \mathcal{A} , c'est-à-dire, la catégorie dont ses objets sont les couples (A, α) formés d'un objet A de \mathcal{A} et d'un automorphisme $A \xrightarrow{\alpha} A$ de \mathcal{A} , et où un morphisme $(A, \alpha) \xrightarrow{\varphi} (B, \beta)$ est simplement une flèche $A \xrightarrow{\varphi} B$ de \mathcal{A} telle que $\beta \circ \varphi = \varphi \circ \alpha$.

Une suite $(A, \alpha) \xrightarrow{\varphi} (B, \beta) \xrightarrow{\psi} (C, \gamma)$ de morphismes de $\mathbf{Aut}(\mathcal{A})$ est dite *exacte* si $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ est une suite exacte de \mathcal{A} .

Rappelons que le groupe $K_1^{\det}(\mathcal{A})$ (voir [Ros94]), est défini comme le groupe commutatif libre engendré par les automorphismes de \mathcal{A} soumis aux relations :

B1. $(A, \alpha\beta) \sim (A, \alpha) + (A, \beta)$.

B2. $(A', \alpha') - (A, \alpha) + (A'', \alpha'') \sim 0$ pour toute suite exacte :

$$(A', \alpha') \longrightarrow (A, \alpha) \longrightarrow (A'', \alpha'')$$

Nous avons un foncteur plainement fidèle :

$$(23) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Aut}(\mathcal{A}) & \hookrightarrow & \mathbf{Sed}(\mathcal{A}) \\ (A, \alpha) & \mapsto & \ell(\alpha) \end{array}$$

$$(24) \quad \text{où} \quad \ell(\alpha) = \left(0 \rightrightarrows A \xrightarrow[\underset{1}{\rightrightarrows}}{\alpha} A \right) = (A, \alpha)$$

Montrons qu'il induit un morphismes de groupes :

$$(25) \quad K_1^{\det}(\mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

En fait, la relation **B2** est valable dans le groupe $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ car c'est un cas particulier de **N2**, où les suites ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C sont diagonales, donc ils s'annulent dans le groupe $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ par **N1**. Pour voir la relation **B1** considérons l'exagone :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightrightarrows & 0 & \rightrightarrows & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightrightarrows & A & \xrightarrow[\underset{1}{\rightrightarrows}]{\alpha\beta} & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightrightarrows & A & \xrightarrow[\underset{1}{\rightrightarrows}]{\alpha} & A \end{array}$$

Alors par **N2** on a que $\langle (A, \alpha\beta) \rangle = \langle (A, \alpha) \rangle + \langle (A, \beta) \rangle$.

§4.1.6. *Un petit lemme.* Étant donné un sommet (A, A') de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, considérons l'automorphisme $\alpha_{A, A'}$ de $A \oplus A' \oplus A \oplus A'$ défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_{A \oplus A'} \\ 1_{A \oplus A'} & 0 \end{pmatrix}$$

Observons alors qu'une flèche $\alpha = (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} \mathbf{N}, A' \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{\psi} \mathbf{N})$ induit une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{Aut}\mathcal{A}$:

$$\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} \xrightarrow{f \oplus g \oplus f \oplus g} \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \xrightarrow{\varphi \oplus \psi \oplus \varphi \oplus \psi} \alpha_{\mathbf{N},\mathbf{N}}$$

En particulier, on a $\langle \ell(\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}) \rangle + \langle \ell(\alpha_{\mathbf{N},\mathbf{N}}) \rangle = \langle \ell(\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \rangle$.

Montrons que $\langle \ell(\alpha_{\mathbf{N},\mathbf{N}}) \rangle$ est null. Pour cela considérons la matrice à coefficients dans \mathbb{Z} :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det(M) = 1$ on a que M est le produit de matrices élémentaires et alors, par l'isomorphisme (voir [Ros94]) :

$$K_1^{\det}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Gl}(\mathbb{Z})/\mathrm{E}(\mathbb{Z})$$

la classe $\langle M \rangle$ de l'automorphisme qu'elle induit à $K_1^{\det}(\mathbb{Z})$ est null.

D'autre part, en considérant le morphisme de groupes de $K_1^{\det}(\mathbb{Z})$ vers $K_1^{\det}(\mathcal{A})$ induit par le seul foncteur de la catégorie des \mathbb{Z} -modules libres vers \mathcal{A} , tel que $\mathbb{Z} \mapsto \mathbf{N}$, nous avons que $\langle \ell(\alpha_{\mathbf{N},\mathbf{N}}) \rangle = 0$ car il est l'image du zéro par la composition :

$$K_1^{\det}(\mathbb{Z}) \longrightarrow K_1^{\det}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Donc, si $\alpha = (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} \mathbf{M}, A' \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{\psi} \mathbf{M})$ est une flèche, on a $\langle \ell(\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}) \rangle = \langle \ell(\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \rangle$. En particulier,

Lemme 4.1. *Si (A, A') est un sommet dans la composant connexe de $(0, 0)$, alors $\langle \ell(\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}) \rangle = 0$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

§4.1.7. *Suites exactes doubles comme lacets.* Notons qu'on peut associer à une suite exacte double de \mathcal{A} :

$$\ell = \left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C \right)$$

un lacet dans $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ de base $(0, 0)$:

$$(26) \quad \mu(\ell) = (\ell(\mathbf{A}) \mid \ell \mid \ell(\mathbf{B})^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc} (\mathbf{A}, \mathbf{A}) & \xrightarrow{\ell} & (\mathbf{B}, \mathbf{B}) \\ \ell(\mathbf{A}) \swarrow & \circlearrowleft & \nearrow \ell(\mathbf{B}) \\ & (0, 0) & \end{array} \right)$$

On note par $\mathfrak{m}(\ell)$ la classe d'homotopie de ce lacet dans $K_1(\mathcal{A})$.

Théorème 4.2. *Si \mathcal{A} est une catégorie exacte, la fonction :*

$$\begin{aligned} \mathbf{Sed}(\mathcal{A})_0 &\longrightarrow \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) \\ \ell &\longmapsto \mathbf{m}(\ell) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme de groupes :

$$(27) \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow[\sim]{\mathbf{m}} \mathbf{K}_1(\mathcal{A})$$

Avant de donner une preuve du théorème, on va travailler avec quelques homotopies de chemins de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

§4.2. Quelques homotopies de chemins.

§4.2.1. *Sommets isomorphes.* Supposons que nous avons un chemin $(\alpha_1 | \dots | \alpha_n)$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ où

$$\alpha_{i-1} = \left(A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_i} A_{i/i-1}, A'_{i-1} \xrightarrow{f'_i} A'_i \xrightarrow{g'_i} A'_{i/i-1} \right)$$

et que pour un certain $0 < k \leq n$, on a d'isomorphismes

$$A_k \xrightarrow{\varphi} B_k \qquad A'_k \xrightarrow{\varphi'} B'_k$$

Alors, si nous considérons les flèches :

$$\beta_{k-1} = \left(A_{k-1} \xrightarrow{\varphi \circ f_{k-1}} B_k \xrightarrow{g_{k-1} \circ \varphi^{-1}} A_{k/k-1}, \right. \\ \left. A'_{k-1} \xrightarrow{\varphi' \circ f'_{k-1}} B'_k \xrightarrow{g'_{k-1} \circ (\varphi')^{-1}} A_{k/k-1} \right)$$

et

$$\beta_k = \left(B_k \xrightarrow{f_k \circ \varphi^{-1}} A_{k+1} \xrightarrow{g_k} A_{k+1/k}, \right. \\ \left. B'_k \xrightarrow{f'_k \circ (\varphi')^{-1}} A'_{k+1} \xrightarrow{g'_k} A'_{k+1/k} \right)$$

les chemins $(\alpha_0 | \dots | \alpha_n)$ et $(\alpha_0 | \dots | \beta_{k-1} | \beta_k | \dots | \alpha_n)$ sont homotopes.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (B_k, B'_k) & & & \\ & & \nearrow \beta_{k-1} & \uparrow \alpha & \searrow \beta_k & & \\ \dots & \longrightarrow & (A_{k-1}, A'_{k-1}) & \xrightarrow{\alpha_{k-1}} & (A_k, A'_k) & \xrightarrow{\alpha_k} & (A_{k+1}, A'_{k+1}) \longrightarrow \dots \\ & & \mu & & \mu' & & \end{array}$$

En effet, si $\alpha = (A_k \xrightarrow{\varphi} B_k \longrightarrow 0, A'_k \xrightarrow{\varphi'} B'_k \longrightarrow 0)$, alors les chemins $(\alpha_0 | \dots | \alpha_{k-1} | \alpha_k | \dots | \alpha_n)$ et $(\alpha_0 | \dots | \alpha_{k-1} | \alpha | \alpha^{-1} | \alpha_k | \dots | \alpha_n)$ sont homotopes.

Mais $(\alpha_{k-1}|\alpha)$ et $(\alpha^{-1}|\alpha_k)$ sont homotopes à (β_{k-1}) et (β_k) , respectivement. Car les 2-simplexes :

$$\begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & & \uparrow \\
 A_{k/k-1} & \xrightarrow{1} & A_{k/k-1} \\
 \uparrow & & \uparrow g_k \circ \varphi^{-1} \\
 A_{k-1} \xrightarrow{f_k} A_k & \xrightarrow{\varphi} & B_k
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & & \uparrow \\
 A'_{k/k-1} & \xrightarrow{1} & A'_{k/k-1} \\
 \uparrow & & \uparrow g'_k \circ (\varphi')^{-1} \\
 A'_{k-1} \xrightarrow{f'_k} A'_k & \xrightarrow{\varphi'} & B'_k
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 & & A_{k+1/k} \\
 & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{k+1/k} \\
 \uparrow & & \uparrow g_{k+1} \\
 A_k \xrightarrow{\varphi} B_k & \xrightarrow{f_{k+1} \circ \varphi^{-1}} & A_{k+1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & A'_{k+1/k} \\
 & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & A'_{k+1/k} \\
 \uparrow & & \uparrow g'_{k+1} \\
 A'_k \xrightarrow{\varphi'} B'_k & \xrightarrow{f'_{k+1} \circ (\varphi')^{-1}} & A'_{k+1}
 \end{array}$$

Finalement, observons que le même resultat est valable aussi si on veut changer le sommet de départ ou d'arrivée du chemin original. Simplement, il faut remplacer homotopie par homotopie libre.

§4.2.2. *Homotopies par somme amalgamée.* Étant données deux flèches de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ avec le même sommet de départ :

$$\alpha = (A \rightarrow B \rightarrow M, A' \rightarrow B' \rightarrow M) \quad \text{et} \quad \alpha' = (A \rightarrow C \rightarrow N, A' \rightarrow C' \rightarrow N)$$

lorsqu'on a choisit de somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & D
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A' & \longrightarrow & C' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \longrightarrow & D'
 \end{array}$$

on peut construire un graphe :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B, B') & & \\
 & \nearrow \alpha & & \searrow \tilde{\alpha} & \\
 (A, A') & \xrightarrow{\mu} & & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & (D, D') \\
 & \searrow \alpha' & & \nearrow \tilde{\alpha}' & \\
 & & (C, C') & &
 \end{array}$$

§4.2.4. *Triangles admissibles.* Étant donné trois flèches α_1 , α_2 et α_3 de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ en formant une boucle :

$$(28) \quad \begin{array}{ccc} & (P_1, P'_1) & \\ \alpha_2 \nearrow & & \searrow \alpha_3 \\ (P_0, P'_0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (P_2, P'_2) \end{array}$$

c'est-à-dire, disons

$$\alpha_1 = \left(P_0 \xrightarrow{f_{0,2}} P_2 \xrightarrow{g_{0,2}} P_{2/0}, P'_0 \xrightarrow{f'_{0,2}} P'_2 \xrightarrow{g'_{0,2}} P_{2/0} \right)$$

$$\alpha_2 = \left(P_0 \xrightarrow{f_{0,1}} P_1 \xrightarrow{g_{0,1}} P_{1/0}, P'_0 \xrightarrow{f'_{0,1}} P'_1 \xrightarrow{g'_{0,1}} P_{1/0} \right)$$

$$\alpha_3 = \left(P_1 \xrightarrow{f_{1,2}} P_2 \xrightarrow{g_{1,2}} P_{2/1}, P'_1 \xrightarrow{f'_{1,2}} P'_2 \xrightarrow{g'_{1,2}} P_{2/1} \right)$$

on appelle le lacet $\tau = (\alpha^{-1} | \alpha_2 | \alpha_3)$ un *triangle admissible* si :

$$f_{1,2} \circ f_{0,1} = f_{0,2} \quad \text{y} \quad f'_{1,2} \circ f'_{0,1} = f'_{0,2}$$

Dans ce cas, comme on l'a déjà fait dans §4.1 on arrive au diagramme commutatif ci-dessous, en complétant par les morphismes en pointillés :

$$(29) \quad \begin{array}{ccc} & P_{2/1} & \\ & \uparrow g & \\ P_{1/0} \xrightarrow{f} & P_{2/0} & \\ \uparrow & \uparrow & \\ P_0 \longrightarrow & P_1 \longrightarrow & P_2, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P_{2/1} & \\ & \uparrow g' & \\ P_{1/0} \xrightarrow{f'} & P_{2/0} & \\ \uparrow & \uparrow & \\ P'_0 \longrightarrow & P'_1 \longrightarrow & P'_2 \end{array}$$

qui encore une fois, forment des suites exactes.

La suite exacte double ainsi obtenue est notée :

$$\ell(\tau) = \left(P_{1/0} \xrightarrow[f']{f} P_{2/0} \xrightarrow[g']{g} P_{2/1} \right)$$

Cela est diagonal si et seulement si le lacet τ est homotopiquement null. Plus généralement, si on pose par $\mu(\tau) = \mu(\ell(\tau))$, alors :

Lemme 4.3. *Les lacets τ et $(P_2, P'_2) \oplus \mu(\tau)$ de base (P_2, P'_2) sont homotopes.*

Démonstration. En appliquant le procédé du paragraphe §3.1.2 aux flèches α_1 et α_2 on obtient que les lacets τ et $(\alpha_{2,1/0} | \alpha_{1,2/0}^{-1} | \alpha_3)$, où

$$\alpha_{1,2/0} = \left(P_1 \longrightarrow P_1 \oplus_{P_0} P_2 \longrightarrow P_{2/0}, P'_1 \longrightarrow P'_1 \oplus_{P'_0} P'_2 \longrightarrow P'_{2/0} \right)$$

et

$$\alpha_{2,1/0} = (P_2 \longrightarrow P_1 \oplus_{P_0} P_2 \longrightarrow P_{1/0}, P'_2 \longrightarrow P'_1 \oplus_{P'_0} P'_2 \longrightarrow P'_{1/0})$$

sont homotopes :

$$\begin{array}{ccc}
 (P_1, P'_1) & \xrightarrow{\alpha_3} & (P_2, P'_2) \\
 \swarrow \alpha_2 & & \searrow \alpha_1 \\
 & (P_1, P'_1) & \\
 \mu \swarrow & \downarrow & \searrow \mu' \\
 & (P_1 \oplus_{P_0} P_2, P'_1 \oplus_{P'_0} P'_2) & \\
 \alpha_{1,2/0} \swarrow & & \searrow \alpha_{2,1/0}
 \end{array}$$

En appliquant encore une fois le procédé aux flèches α_3 et $\alpha_{1,2/0}$, on obtient maintenant que les lacets τ et $(\alpha_{2,1/0} | \alpha_\tau | \alpha_{2,2/0}^{-1})$ où

$$\alpha_\tau = (P_1 \oplus_{P_0} P_2 \longrightarrow P_2 \oplus_{P_0} P_2 \longrightarrow P_{2/1}, P'_1 \oplus_{P'_0} P'_2 \longrightarrow P'_2 \oplus_{P'_0} P'_2 \longrightarrow P'_{2/1})$$

et

$$\alpha_{2,1/0} = (P_2 \longrightarrow P_2 \oplus_{P_0} P_2 \longrightarrow P_{2/0}, P'_2 \longrightarrow P'_2 \oplus_{P'_0} P'_2 \longrightarrow P'_{2/0})$$

sont homotopes :

$$\begin{array}{ccc}
 (P_2 \oplus_{P_0} P_2, P'_2 \oplus_{P'_0} P'_2) & \xleftarrow{\alpha_{2,1/0}} & (P_2, P'_2) \\
 \swarrow \alpha_\tau & & \swarrow \alpha_3 \\
 & (P_1, P'_1) & \\
 \alpha_{1,2/0} \swarrow & \downarrow & \searrow \mu' \\
 & (P_1 \oplus_{P_0} P_2, P'_1 \oplus_{P'_0} P'_2) & \\
 \alpha_{1,2/0} \swarrow & & \searrow \alpha_{2,1/0}
 \end{array}$$

Enfin, en utilisant les isomorphismes $P_1 \oplus_{P_0} P_2 \simeq P_2 \oplus P_{1/0}$ et $P_2 \oplus_{P_0} P_2 \simeq P_2 \oplus P_{2/0}$, il résulte du paragraphe §4.2.1 que τ et $(P_2, P'_2) \oplus \mu(\tau)$ sont homotopes. \blackstar

Corollaire 4.4. *Si $\tau = (\alpha_1^{-1} | \alpha_2 | \alpha_3)$ est un triangle admissible et $P_2 = P'_2 = X$, alors les lacets $\mu(\tau)$ et $(\ell(X)^{-1} | \alpha_1^{-1} | \alpha_2 | \alpha_3 | \ell(X))$ sont homotopes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\alpha = (\alpha_1^{\varepsilon_1} | \dots | \alpha_n^{\varepsilon_n})$ est un lacet orienté de base $(0, 0)$ et X est un objet de \mathcal{A} , alors α et $(\ell(X)^{-1} | (X, X) \oplus \alpha | \ell(X))$ sont homotopes.

Ceci résulte en considérant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 (X \oplus B_i, X \oplus B'_i) & \xleftarrow{(X, X) \oplus \alpha_i} & (X \oplus A_i, X \oplus A'_i) \\
 \uparrow \mu & & \uparrow \mu' \\
 (B_i, B'_i) & \xleftarrow{\alpha_i} & (A_i, A'_i)
 \end{array}$$

où $\alpha_i = (A_i \rightarrow B_i \rightarrow C, A'_i \rightarrow B'_i \rightarrow C)$ et les 2-simplexes sont donnés par :

$$\mu = \left(\begin{array}{ccc} & & X \\ & C_i \rightarrow X \oplus C_i & \uparrow \\ A_i \rightarrow B_i \rightarrow X \oplus B_i & & \uparrow \\ & & X \oplus C_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & X \\ & C_i \rightarrow X \oplus C_i & \uparrow \\ A'_i \rightarrow B'_i \rightarrow X \oplus B'_i & & \uparrow \\ & & X \oplus C_i \end{array} \right)$$

et

$$\mu' = \left(\begin{array}{ccc} & & C_i \\ & X \rightarrow X \oplus C_i & \uparrow \\ A_i \rightarrow X \oplus A_i \rightarrow X \oplus B_i & & \uparrow \\ & & X \oplus C_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & C_i \\ & X \rightarrow X \oplus C_i & \uparrow \\ A'_i \rightarrow X \oplus A'_i \rightarrow X \oplus B'_i & & \uparrow \\ & & X \oplus C_i \end{array} \right)$$

✠

§4.3. Preuve du théorème principal.

§4.3.1. Montrons d'abord que nous avons bien un morphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{m} & K_1(\mathcal{A}) \\
 \langle \ell \rangle & \longmapsto & m(\ell)
 \end{array}$$

Pour cela il suffit de montrer seulement que les relations **N1** et **N2** de la page 13 sont valables dans $K_1(\mathcal{A})$.

Propriété N1 :

Cette propriété est une conséquence directe du fait que la réalisation géométrique de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est contractile. Explicitement, si ℓ est la suite exacte :

$$\ell = \left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} C \right)$$

on a donc une homotopie :

$$\begin{array}{ccc}
 (A, A) & \xrightarrow{\ell} & (B, B) \\
 \ell(A) \swarrow & \mu & \searrow \ell(B) \\
 & (0, 0) &
 \end{array}
 \quad \text{où } \mu = \left(\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \uparrow \varphi \\ & A \xrightarrow{f} B & \\ 1 \uparrow & & 1 \uparrow \\ 0 \rightarrow & A \xrightarrow{f} B, & 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \end{array} \right)$$

Propriété N2 :

On va montrer que pour tout hexagone exact double (19), les chemins composés

$$(30) \quad \mu(\ell_B)^{-1}\mu(\ell')^{-1}\mu(\ell_A)\mu(\ell) \quad \text{et} \quad \mu(\ell'')\mu(\ell_C)^{-1}$$

sont homotopes. On aura l'égalité cherché dans $K_1(\mathcal{A})$:

$$m(\ell') - m(\ell) + m(\ell'') = m(\ell_A) - m(\ell_B) + m(\ell_C)$$

car la composition de chemins et l'addition de lacets donné à §3.2.1 sont égaux à homotopie près.

Pour commencer appliquons le procédé du paragraphe §3.1.2 aux flèches ℓ_A et ℓ' , obtenant un graphe :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A, A) & & \\
 & \nearrow \ell_A & & \searrow \ell_2 & \\
 (A', A') & \xrightarrow{\mu} & & & (D_1, D_2) \\
 & \searrow \ell' & & \nearrow \ell_1 & \\
 & & (B', B') & &
 \end{array}$$

Alors, $\mu(\ell_B)^{-1}\mu(\ell')^{-1}\mu(\ell_A)\mu(\ell)$ et $(\ell(B)|\ell_B^{-1}|\ell_1|\ell_2^{-1}|\ell|\ell(B)^{-1})$ sont des lacets homotopes.

En considérant maintenant la flèche des deux hexagones exacts de (19), qu'on a construit dans §3.1.2,

$$\ell_D = (D_1 \xrightarrow{d_1} B \xrightarrow{p_1} C'', D_2 \xrightarrow{d_2} B \xrightarrow{p_2} C''),$$

il résulte alors que $\mu(\ell_B)^{-1}\mu(\ell')^{-1}\mu(\ell_A)\mu(\ell)$ et :

$$(\ell(B)|\ell_B^{-1}|\ell_1|\ell_D|\ell(B)^{-1})(\ell(B)|\ell_B^{-1}|\ell_2|\ell_D|\ell(B)^{-1})^{-1}$$

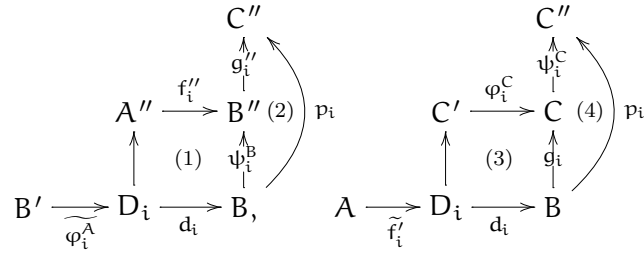
sont des lacets de base $(0, 0)$ homotopes.

Ce qu'on cherche est conséquence du corollaire 4.4 et du Lemme ci-dessous.

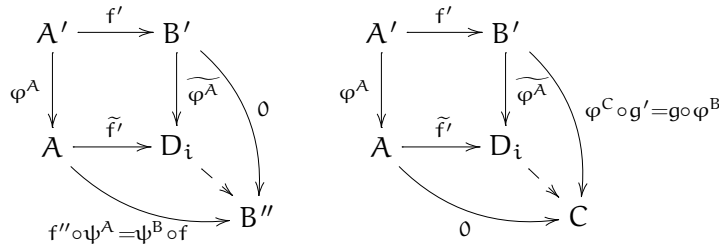
Lemme 4.5. *Les lacets $\tau' = (\ell_B^{-1}|\ell_1|\ell_D)$ et $\tau = (\ell_B^{-1}|\ell_2|\ell_D)$ sont des triangles admissibles et les suites exactes doubles associées sont ℓ'' et ℓ_C , respectivement.*

Démonstration. Les lacets sont des triangles admissibles par la commutativité du diagramme (12) de la construction des suites exactes de ℓ_D .

Pour montrer l'affirmation concernant les suites exactes doubles associées à τ et τ' , en se rappelant de la construction de §4.2.4, on voit qu'il suffit de montrer seulement la commutativité des diagrammes :



La commutativité des (2) et (4) est la définition du morphisme p_i . Cela de (1) et (3) est conséquence de la partie d'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée, en notant que les deux compositions possibles complètent le diagramme :

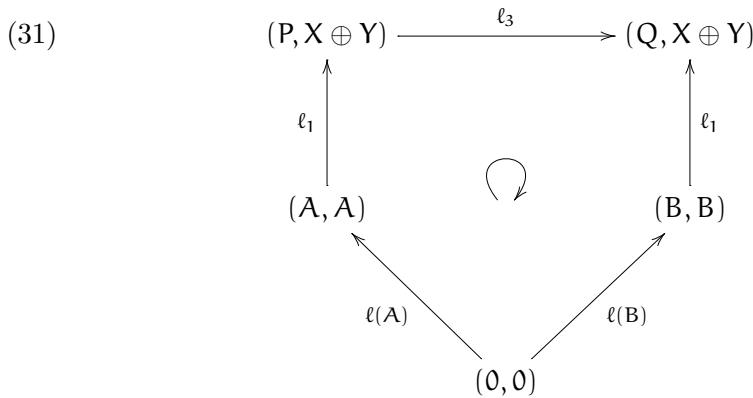


✠

§4.3.2. m est surjective. Étant donnée deux suites exactes et un isomorphisme :

$$A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\gamma} C, \quad B \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\delta} D, \quad \text{et} \quad P = A \oplus Y \oplus C \xrightarrow{\theta} X \oplus B \oplus D = Q$$

considérons le lacet de base $(0, 0)$:



où ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont les flèches :

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= \left(A \longrightarrow A \oplus Y \oplus C \longrightarrow C \oplus Y, \quad A \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow C \oplus Y \right) \\
 \ell_2 &= \left(B \longrightarrow A \oplus B \oplus D \longrightarrow X \oplus D, \quad B \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow X \oplus D \right)
 \end{aligned}$$

$$\ell_3 = \left(P \xrightarrow{\theta} Q \longrightarrow 0, X \oplus Y \xrightarrow{1} X \oplus Y \longrightarrow 0 \right)$$

Sherman a montré dans [She98] le résultat suivant :

Théorème 4.6. *Tout élément de $K_1(\mathcal{A})$ est la classe d'homotopie d'un lacet du type (31).*

Pour montrer alors que le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\mathbf{m}} K_1(\mathcal{A}) \\ \langle \ell \rangle &\longmapsto \mathbf{m}(\ell) \end{aligned}$$

est surjectif, on va montrer que un lacet du type (31) est homotope au lacet $\mu(\langle \ell \rangle)$ associé à la suite exacte double :

$$\ell = \left(A \oplus B \xrightarrow[\mathbf{g}]{\theta \circ f} Q \xrightarrow[\mathbf{q}]{\mathbf{p} \circ \theta^{-1}} P_{2/1} \right)$$

$$\text{où } f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Première partie de la preuve :

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} (P, X \oplus Y) & \xrightarrow{\ell_3} & (Q, X \oplus Y) & & \\ \uparrow \ell_1 & \swarrow (s_1, s) & \nearrow (s_2, s) & & \uparrow \ell_1 \\ (A, A) & \xrightarrow{\mu_2} & (A \oplus B, A \oplus B) & \xleftarrow{\mu_1} & (B, B) \\ \swarrow \ell(A) & \uparrow \mu_4 & \uparrow \ell(A \oplus B) & \searrow \mu_3 & \nearrow \ell(B) \\ (0, 0) & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{où } s &= A \oplus B \xrightarrow{\alpha \oplus \beta} X \oplus Y \xrightarrow{\gamma \oplus \delta} C \oplus D, \\ s_1 &= A \oplus B \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p} C \oplus D \quad \text{et} \\ s_2 &= A \oplus B \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{q} C \oplus D. \end{aligned}$$

et les 2-simplexes μ_1 et μ_2 sont donnés par :

$$\mu_1 = \left(\begin{array}{ccc} & & C \oplus D \\ & & \uparrow 1 \oplus \delta \\ & B \longrightarrow & C \oplus Y \\ & \uparrow & \uparrow \\ A \longrightarrow & A \oplus B \xrightarrow{f} & A \oplus Y \oplus C, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & C \oplus D \\ & & \uparrow 1 \oplus \delta \\ & B \longrightarrow & C \oplus Y \\ & \uparrow & \uparrow \gamma \oplus 1 \\ A \longrightarrow & A \oplus B \xrightarrow{\alpha \oplus \beta} & X \oplus Y \end{array} \right)$$

et

$$\mu_2 = \left(\begin{array}{ccc} & & C \oplus D \\ & & \uparrow \gamma \oplus 1 \\ & A \longrightarrow & X \oplus D \\ & \uparrow & \uparrow \\ B \longrightarrow & A \oplus B \xrightarrow{g} & X \oplus B \oplus D, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & C \oplus D \\ & & \uparrow \gamma \oplus 1 \\ & A \longrightarrow & X \oplus D \\ & \uparrow & \uparrow 1 \oplus \delta \\ B \longrightarrow & A \oplus B \xrightarrow{\alpha \oplus \beta} & X \oplus Y \end{array} \right)$$

Alors le lacet (31) est homotope au lacet :

$$\left(\ell(A \oplus B) \Big|_{(s_1, s)} \Big|_{\ell_3} \Big|_{(s_2, s)^{-1}} \Big|_{\ell(A \oplus B)^{-1}} \right).$$

Seconde partie de la preuve :

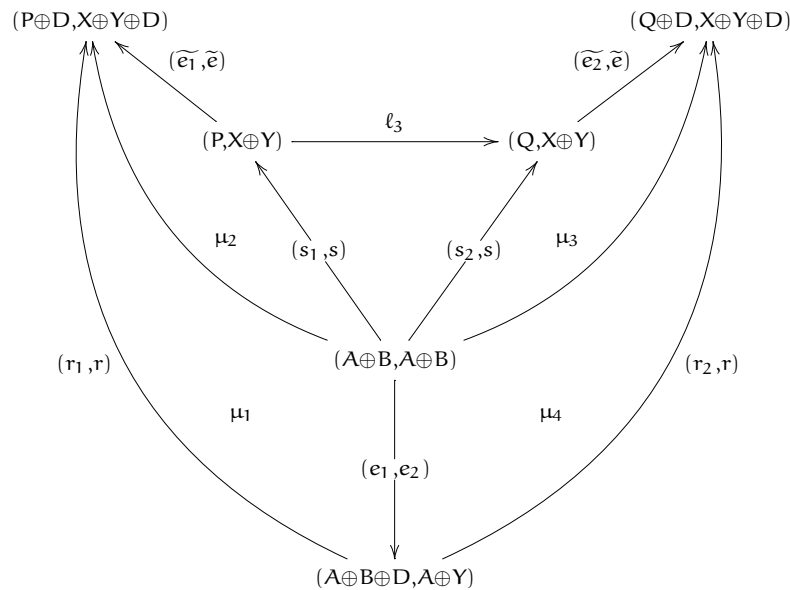
Considerons d'abord la flèche :

$$(A \oplus B, A \oplus B) \xrightarrow{(e_1, e_2)} (A \oplus B \oplus D, A \oplus Y)$$

$$\text{où } e_1 = A \oplus B \longrightarrow A \oplus B \oplus D \longrightarrow D,$$

$$e_2 = A \oplus B \xrightarrow{1 \oplus \beta} A \oplus Y \longrightarrow D$$

On peut construire alors par le procédé de §4.2.2 un diagramme :



où les suites exactes sont données par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc}
 & s_1 & & r_1 & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 e_1 = & A \oplus B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & A \oplus B \oplus D & \xrightarrow{(0,0,1)} & D \\
 & \downarrow f & & \downarrow f \oplus 1 & & \parallel \\
 \tilde{e}_1 = & P & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & P \oplus D & \xrightarrow{(0,1)} & D \\
 & \downarrow p & & \downarrow (p,0) & & \\
 & C \oplus D & \xlongequal{\quad} & C \oplus D & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & s & & r & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 e_2 = & A \oplus B & \xrightarrow{1 \oplus \beta} & A \oplus Y & \xrightarrow{(0,\delta)} & D \\
 & \downarrow \alpha \oplus \beta & & \downarrow & & \parallel \\
 \tilde{e} = & X \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & X \oplus Y \oplus D & \xrightarrow{(0,0,1)} & D \\
 & \downarrow \gamma \oplus \delta & & \downarrow & & \\
 & C \oplus D & \xlongequal{\quad} & C \oplus D & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & s_2 & & r_2 & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 e_1 = & A \oplus B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & A \oplus B \oplus D & \xrightarrow{(0,0,1)} & D \\
 & \downarrow g & & \downarrow g \oplus 1 & & \parallel \\
 \tilde{e}_2 = & Q & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Q \oplus D & \xrightarrow{(0,1)} & D \\
 & \downarrow q & & \downarrow (q,0) & & \\
 & C \oplus D & \xlongequal{\quad} & C \oplus D & &
 \end{array}$$

En appliquant encore une fois le procédé de la somme amalgamée, maintenant aux lacets ℓ_3 et (\tilde{e}_1, \tilde{e}) on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(r_3, r_4)} & \\
 (P \oplus D, X \oplus Y \oplus D) & & (Q \oplus D, X \oplus Y \oplus D) \\
 \swarrow (\tilde{e}_1, \tilde{e}) & \mu'_5 & \searrow (\tilde{e}_2, \tilde{e}) \\
 (P, X \oplus Y) & \xrightarrow{\ell_3} & (Q, X \oplus Y)
 \end{array}$$

où les suites exactes sont données par :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{e}_1 & & \tilde{e}_2 & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 & P & \xrightarrow{\theta} & Q & \longrightarrow O \\
 & \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \binom{1}{0} & \parallel \\
 r_2 = & P \oplus D & \xrightarrow{\theta \otimes 1} & Q \oplus D & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (0,1) & & \downarrow (0,1) & \\
 & D & \xlongequal{\quad} & D &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{e} & & \tilde{e} & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 & X \oplus Y & \xrightarrow{1} & X \oplus Y & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \binom{1}{0} & \parallel \\
 r_4 = & X \oplus Y \oplus D & \xrightarrow{1} & X \oplus Y \oplus D & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (0,1) & & \downarrow (0,1) & \\
 & D & \xlongequal{\quad} & D &
 \end{array}$$

Dès ce qui précède on a que les lacets :

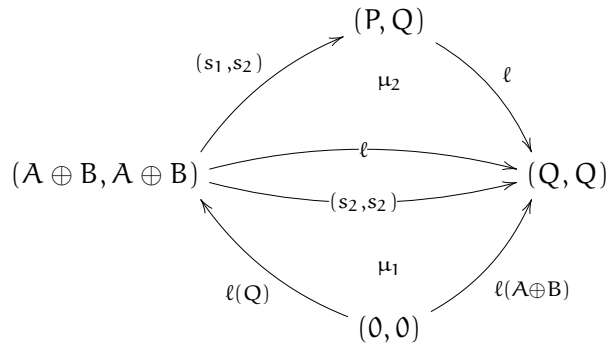
$$\left((s_1, s) \middle| \ell_3 \middle| (s_2, s)^{-1} \right) \quad \text{et} \quad \left((e_1, e_2) \middle| (r_1, r) \middle| (r_3, r_4) \middle| (r_2, r)^{-1} \middle| (e_1, e_2)^{-1} \right)$$

sont homotopes. Donc, par la première partie le lacet (31) est homotope au lacet :

$$(32) \quad \left(\ell(A \oplus B) \middle| (e_1, e_2) \middle| (r_1, r) \middle| (r_3, r_4) \middle| (r_2, r)^{-1} \middle| (e_1, e_2)^{-1} \middle| \ell(A \oplus B)^{-1} \right)$$

Troisième partie de la preuve :

Considérons le diagramme :



où $\ell' = (P \xrightarrow{\theta} Q \rightarrow 0, Q \xrightarrow{1} Q \rightarrow 0)$ et μ_2 est le 2-simplexe :

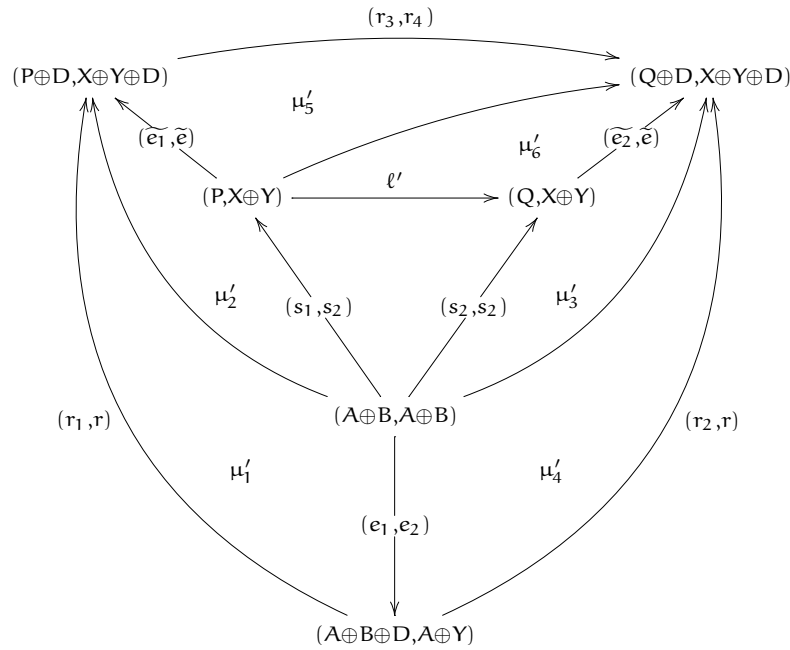
$$\mu_2 = \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \uparrow \\ & C \oplus D & \xrightarrow{1} C \oplus D \\ & \uparrow & \uparrow p \circ \theta^{-1} \\ A \oplus B & \xrightarrow{f} P & \xrightarrow{\theta} Q, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \uparrow \\ & C \oplus D & \xrightarrow{1} C \oplus D \\ & \uparrow & \uparrow q \\ A \oplus B & \xrightarrow{g} Q & \xrightarrow{1} Q \end{array} \right)$$

Donc, le lacet $\mu(\ell)$ est homotope au lacet :

$$\left(\ell(A \oplus B) \Big| (s_1, s_2) \Big| \ell' \Big| (s_2, s_2)^{-1} \Big| \ell(A \oplus B)^{-1} \right)$$

Quatrième partie de la preuve :

En procédant comme dans la seconde partie, on arrive au diagramme :



où les suites exactes sont donnés par les diagrammes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} & e_1 & & \tilde{e}_1 & \\ & \parallel & & \parallel & \\ s_1 = & A \oplus B & \xrightarrow{1 \oplus \beta \oplus 0} & P & \xrightarrow{G} & C \oplus D \\ & \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \binom{1}{0} & & \parallel \\ r_1 = & A \oplus B \oplus D & \longrightarrow & P \oplus D & \longrightarrow & C \oplus D \\ & \downarrow (0,0,1) & & \downarrow (0,1) & & \\ & D & \xlongequal{\quad} & D & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& e_2 & \tilde{e} \\
& \parallel & \parallel \\
s_2 = & A \oplus B \xrightarrow{\alpha \oplus 1 \oplus 0} Q \longrightarrow C \oplus D \\
& \downarrow 1 \oplus \beta & \downarrow 1 \oplus \beta \oplus 1 \\
r = & A \oplus Y \xrightarrow{\alpha \oplus 1 \oplus 0} X \oplus Y \oplus D \longrightarrow C \oplus D \\
& \downarrow (0, \delta) & \downarrow \\
& D \xlongequal{\quad\quad\quad} D
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& e_1 & \tilde{e}_2 \\
& \parallel & \parallel \\
s_2 = & A \oplus B \xrightarrow{\alpha \oplus 1 \oplus 0} Q \longrightarrow C \oplus D \\
& \downarrow 1 \oplus 1 \oplus 0 & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
r_2 = & A \oplus B \oplus D \xrightarrow{\alpha \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0} Q \oplus D \longrightarrow C \oplus D \\
& \downarrow (0, 0, 1) & \downarrow \\
& D \xlongequal{\quad\quad\quad} D
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& r_3 & r_4 \\
& \parallel & \parallel \\
\tilde{e}_1 = & \begin{array}{ccccc}
P & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & P \oplus D & \xrightarrow{(0, 1)} & D \\
\downarrow \theta & & \downarrow \theta \oplus 1 & & \parallel \\
Q & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Q \oplus D & \xrightarrow{\gamma} & D \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \xlongequal{\quad\quad\quad} & 0 & & 0
\end{array} & & \begin{array}{ccccc}
Q & \xrightarrow{1 \oplus \beta \oplus 1} & X \oplus Y \oplus D & \longrightarrow & D \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
Q & \xrightarrow{-1 \oplus \beta \oplus 1} & X \oplus Y \oplus D & \longrightarrow & D \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \xlongequal{\quad\quad\quad} & 0 & & 0
\end{array}
\end{array}$$

Alors, les lacets $\left((s_1, s_2) \middle| \ell' \middle| (s_2, s_2)^{-1} \right)$ et

$$\left((e_1, e_2) \middle| (r_1, r) \middle| (r_3, r_4) \middle| (r_2, r)^{-1} \middle| (e_1, e_2)^{-1} \right)$$

sont homotopes. Donc, par la seconde et troisième parties, $\mu(\ell)$ est homotope au lacet 31.

§4.3.3. Montrons maintenant que le morphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathbf{m}} & K_1(\mathcal{A}) \\
\langle \ell \rangle & \longmapsto & \mathbf{m}(\ell)
\end{array}$$

est injectif. Pour cela, on va construire un morphisme de groupes \mathbf{b} de $K_1(\mathcal{A})$ vers $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que $\mathbf{b} \circ \mathbf{m} = \text{id}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, comme suit.

Étant donné un chemin orienté $\alpha = (\alpha_1^{\varepsilon_1} | \dots | \alpha_n^{\varepsilon_n})$ où

$$\alpha_i = (P_i \xrightarrow{f_i} P'_i \xrightarrow{\varphi_i} N, Q_i \xrightarrow{g_i} Q'_i \xrightarrow{\psi_i} N),$$

considérons la somme des flèches

$$\sum \alpha = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i = (P(\alpha) \xrightarrow{f} P'(\alpha) \xrightarrow{\varphi} N(\alpha), Q(\alpha) \xrightarrow{g} Q'(\alpha) \xrightarrow{\psi} N(\alpha))$$

Nous avons alors les égalités :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \bigoplus_{i=1}^n \begin{cases} P_i & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ Q_i & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases} & Q(\alpha) &= \bigoplus_{i=1}^n \begin{cases} Q_i & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ P_i & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases} \\ P'(\alpha) &= \bigoplus_{i=1}^n \begin{cases} P'_i & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ Q'_i & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases} & Q'(\alpha) &= \bigoplus_{i=1}^n \begin{cases} Q'_i & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ P'_i & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases} \\ \text{et } N(\alpha) &= \bigoplus_{i=1}^n N_i \end{aligned}$$

En particulier, l'objet $P(\alpha) \oplus Q(\alpha)$ noté $A(\alpha)$ est la somme pour tout i des objets du sommet de départ de α_i .

De plus, si α est un lacet, alors $P'(\alpha) \oplus Q(\alpha)$ et $P(\alpha) \oplus Q'(\alpha)$ sont à permutation près, $B(\alpha)$ définie comme la somme des objets de chaque sommet de α .

Pour montrer cette affirmation, il suffit compter les objets des deux sommes par i et $i+1$ au même temps, c'est-à-dire, par des paires de flèches consécutives. Par exemple, dans le cas $P'(\alpha) \oplus Q(\alpha)$ chaque fois on ajouterait à la somme les objets :

$$(, *) \xrightarrow{\alpha_i^{\varepsilon_i}} (*, *) \xrightarrow{\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}} (*,)$$

qui changent de nom d'après l'orientation de flèches.

Si α est un lacet, nous avons alors une suite exacte double :

$$\left(\begin{array}{ccc} A(\alpha) & \xrightarrow{\tilde{f}} & B(\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & N(\alpha) \\ & \xrightarrow{\tilde{g}} & & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \end{array} \right)$$

où à permutation près les suites sont définies par

$$P(\alpha) \oplus Q(\alpha) \xrightarrow{f \oplus 1} P'(\alpha) \oplus Q(\alpha) \xrightarrow{(\varphi, 0)} N(\alpha)$$

et

$$P(\alpha) \oplus Q(\alpha) \xrightarrow{1 \oplus g} P(\alpha) \oplus Q'(\alpha) \xrightarrow{(0, \psi)} N(\alpha)$$

De cette manière, on a une fonction additive :

$$\begin{aligned} \{ \text{Lacets de } \mathcal{G}(\mathcal{A}) \} &\xrightarrow{\tilde{b}} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ \alpha &\longmapsto \langle \ell(\alpha) \rangle \end{aligned}$$

Montrons que cette fonction induit un morphisme de groupes :

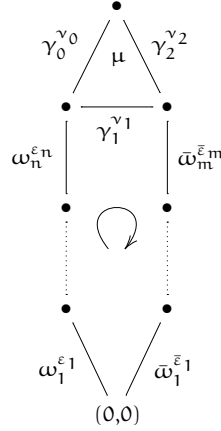
$$K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathfrak{b}} \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Pour cela, il suffit montrer que si α et β sont deux lacets du type :

$$\alpha = (\omega_1^{\varepsilon_1} | \dots | \omega_n^{\varepsilon_n} | \gamma_1^{\gamma_1} | \bar{\omega}_m^{\bar{\varepsilon}_m} | \dots | \bar{\omega}_1^{\bar{\varepsilon}_1})$$

et

$$\beta = (\omega_1^{\varepsilon_1} | \dots | \omega_n^{\varepsilon_n} | \gamma_0^{\gamma_0} | \gamma_2^{\gamma_2} | \bar{\omega}_m^{\bar{\varepsilon}_m} | \dots | \bar{\omega}_1^{\bar{\varepsilon}_1})$$



où μ est un 2-simplexe, alors $\langle \ell(\alpha) \rangle = \langle \ell(\beta) \rangle$.

D'ailleurs, on peut supposer qu'on a les orientations $\varepsilon_n = 1$ et $\bar{\varepsilon}_m = -1$ en ajoutant des flèches du type :

$$\left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \end{array} A \rightrightarrows 0 \right) \quad \text{et} \quad \left(0 \rightrightarrows A \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \end{array} A \right)$$

car par §4.1.4 les suites exactes doubles qu'on obtient ainsi sont égales dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Pour fixer les idées supposons qu'on a aussi les orientations :

$$\begin{array}{ccc} & (X_1, Y_1) & \\ d_2(\mu)=\gamma_0 \nearrow & \mu & \searrow d_0(\mu)=\gamma_2 \\ (X_0, Y_0) & \xrightarrow{d_1(\mu)=\gamma_1} & (X_2, Y_2) \end{array}$$

$$\text{où } \gamma_0 = \left(X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{\varphi_0} N_0, Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{\psi_0} N_0 \right)$$

$$\gamma_1 = \left(X_0 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_1} N_1, Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_2 \xrightarrow{\psi_1} N_1 \right)$$

$$\text{et } \gamma_2 = \left(X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_2, Y_1 \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{\psi_2} N_2 \right)$$

Alors, $\tilde{\mathfrak{b}}(\alpha)$ et $\tilde{\mathfrak{b}}(\beta)$ sont les suites exactes doubles :

$$A \oplus X_0 \oplus Y_0 \xrightarrow[\delta]{\gamma} I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow[\sigma]{\rho} N \oplus N_1$$

et

$$A \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 \xrightarrow[\delta']{\gamma'} I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 \oplus X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow[\sigma']{\rho'} N \oplus N_1$$

respectivement, où les morphismes sont de la forme :

$$\gamma = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & f_1 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

$$\rho' = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 \end{pmatrix}$$

Si plus généralement, nous supposons que μ est un triangle admissible avec :

$$\ell(\mu) = \left(N_0 \xrightarrow[h_2]{h_1} N_1 \xrightarrow[p_2]{p_1} N_2 \right),$$

alors, en considérant les hexagones exacts :

$$\begin{array}{ccccc} A \oplus X_0 \oplus Y_0 & \xrightarrow{\gamma} & I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_2 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\rho} & N \oplus N_1 \\ \downarrow i & & \downarrow \xi' \downarrow \zeta' & & \downarrow i \\ A \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 & \xrightarrow{\zeta} & I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_2 \oplus Y_2 \oplus X_2 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\rho} & N \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus N_2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \kappa' \downarrow \lambda' & & \downarrow \pi \\ X_1 \oplus Y_1 & \xrightarrow{f_2 \oplus g_2} & X_2 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\varphi_2 \oplus \psi_2} & N_2 \oplus N_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} A \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 & \xrightarrow{\gamma'} & I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 \oplus X_2 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\rho'} & N \oplus N_0 \oplus N_2 \\ \downarrow & & \downarrow 1 \oplus f_2 \oplus g_2 \oplus 1 & & \downarrow a_2 \downarrow a_1 \\ A \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_1 \oplus Y_1 & \xrightarrow{\zeta} & I \oplus X_0 \oplus Y_0 \oplus X_2 \oplus Y_2 \oplus X_2 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\rho} & N \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus N_2 \\ \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow b_2 \downarrow b_1 \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & N_2 \oplus N_2 & \xrightarrow{\quad} & N_2 \oplus N_2 \end{array}$$

où les morphismes sont donnés par :

$$\zeta = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 \end{pmatrix},$$

$$\zeta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b}_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On arrive à l'égalité :

$$(33) \quad \tilde{\mathfrak{b}}(\beta) = \tilde{\mathfrak{b}}(\alpha) + \langle \ell(\mu) \rangle$$

puisque la suite verticale au centre du premier hexagone s'annule par §4.1.4 et §4.1.6,

Nous concluons que si μ est un 2-simplexe, alors $\tilde{\mathfrak{b}}(\beta) = \tilde{\mathfrak{b}}(\alpha)$ et donc on a bien un morphisme de groupes :

$$K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathfrak{b}} \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Finalement, notons que si ℓ est une suite exacte double de $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ vers $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, en considérant les lacets :

$$\alpha = (\ell(\mathcal{B})|\ell(\mathcal{B})^{-1}) \quad \text{et} \quad \alpha = (\ell(\mathcal{A})|\ell|\ell(\mathcal{B})^{-1})$$

on a par l'égalité (33) que $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{m} = \text{id}$, car dans ce cas $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{m}(\langle \ell \rangle) = \tilde{\mathfrak{b}}(\beta)$, $\tilde{\mathfrak{b}}(\alpha) = 0$ et $\langle \ell(\mu) \rangle = \langle \ell \rangle$.

En particulier, \mathfrak{m} est bien injectif.

RÉFÉRENCES

- [GG87] H. Gillet and D. Grayson, *On the loop space of the Q-construction*, Ill J. Math **31** (1987), no. 4, 574–597.
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.
- [MA02] S. Gitler et C. Prieto M. Aguilar, *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Nen96] A. Nenashev, *Double short exact sequences produce all elements of Quillen's K_1* , Contemporary Mathematics **199** (1996), 151–160.
- [Nen98] ———, *K_1 by generators and relations*, Journal of pure and applied algebra **131** (1998), 195–212.
- [Qui73] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory : I; Algebraic K-theory I*, Lecture Note in Math (New York), vol. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85–147.
- [Ros94] Jonathan M. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, vol. 147, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [She98] C. Sherman, *On K_1 of an Exact Category*, K-theory **14** (1998), 1–22.