

Table des matières

I. Le groupe linéaire	
1. Groupes topologiques	1
2. Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$	3
3. Exemples de sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$	5
4. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{R})$	7
5. Le groupe orthogonal	11
6. Décomposition de Gram	12
7. Exercices	14
II. L'application exponentielle	
1. Exponentielle d'une matrice	19
2. Logarithme d'une matrice	26
3. Exercices	30
III. Groupes de Lie linéaires	
1. Sous-groupes à un paramètre	39
2. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire	41
3. Les groupes de Lie linéaires sont des sous-variétés	45
4. Formule de Campbell-Hausdorff	47
5. Exercices	51
IV. Algèbres de Lie	
1. Définitions et exemples	53
2. Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles	59
3. Algèbres de Lie semi-simples	65
4. Exercices	72

V. La mesure de Haar	
1. Mesure de Haar	79
2. Quand le groupe est un ouvert d'un espace affine	82
3. Mesure de Haar sur un produit	84
4. Quelques rappels de calcul différentiel	86
5. Champs de vecteurs invariants et mesure de Haar	91
6. Exercices	95
VI. Représentations des groupes compacts	
1. Représentations unitaires	101
2. Opérateurs autoadjoints compacts	104
3. Relations d'orthogonalité de Schur	110
4. Théorème de Peter-Weyl	113
5. Caractères et fonctions centrales	121
6. Convergence uniforme des séries de Fourier	123
7. Opérateur de Casimir	125
8. Exercices	129
VII. Les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$	
1. Représentation adjointe de $SU(2)$	133
2. Mesure de Haar de $SU(2)$	136
3. Le groupe $SO(3)$	139
4. Angles d'Euler	141
5. Représentations irréductibles de $SU(2)$	143
6. Représentations irréductibles de $SO(3)$	148
7. Exercices	154
VIII. Analyse sur le groupe $SU(2)$	
1. Séries de Fourier sur $SO(2)$	163
2. Fonctions de classe \mathcal{C}^k	165
3. Opérateur de Laplace sur le groupe $SU(2)$	168
4. Séries de Fourier sur le groupe $SU(2)$	172
5. Équation de la chaleur sur $G = SO(2)$	176
6. Équation de la chaleur sur $SU(2)$	181
7. Exercices	187

IX. Analyse sur la sphère et l'espace euclidien	
1. Formules d'intégration	191
2. Le laplacien	195
3. Harmoniques sphériques	199
4. Polynômes sphériques	205
5. Théorème de Funk-Hecke	209
6. Relations de Bochner-Hecke	213
7. Problème de Dirichlet et noyau de Poisson	217
8. Une transformation intégrale	225
9. Équation de la chaleur	229
10. Exercices	232
X. Analyse sur des espaces de matrices	
1. Formules d'intégration	236
2. Partie radiale du laplacien	242
3. Équation de la chaleur et intégrale orbitale	246
4. Transformées de Fourier des fonctions invariantes	249
5. Exercices	250
XI. Représentations irréductibles de $U(n)$	
1. Le théorème du plus haut poids	254
2. Formules de Weyl	257
3. Représentations holomorphes de $GL(n, \mathbb{C})$	263
4. Représentations polynomiales de $GL(n, \mathbb{C})$	267
5. Exercices	273
XII. Analyse sur le groupe unitaire	
1. Opérateur de Laplace	279
2. Convergence uniforme des séries de Fourier	281
3. Développements en séries de fonctions centrales	284
4. Séries de Taylor généralisées	289
5. Partie radiale du laplacien sur le groupe unitaire	294
6. Équation de la chaleur sur le groupe unitaire	297
7. Exercices	302
Bibliographie	305
Index	307