

Corrigé de l'EXAMEN du 6 juin 2002

Exercice 1

1.a. C'est un sous-groupe du groupe des isométries de \mathcal{E} . En effet, il contient l'identité. La composée de deux isométries de F laisse stable F et l'inverse d'une isométrie de F laisse stable F .

1.b. C'est une traduction directe de l'hypothèse **H2**.

1.c. L'ordre de $\text{Isom}(F)$ est la somme des cardinaux des images réciproques par ϕ des éléments de F . Soient $P \in F$ et g une isométrie de F telle que $g(P) = P_0$. On a $\{f \in G/\phi(f) = P\} = \{f \in G/\phi(g \circ f) = P_0\}$. Puisque G est un groupe la composition par g est une bijection. L'ensemble $\{f \in G/\phi(f) = P_0\}$ et l'image réciproque par ϕ de tout élément de F ont donc même cardinaux.

2. Tout élément de F appartient à une face pentagonale. Comme chaque face pentagonale possède 5 sommets, il y a $60/5 = 12$ faces pentagonales. Tout élément de F appartient à deux faces hexagonales ; il y a donc $60 \times 2/6 = 20$ faces hexagonales.

3. Comme s_O est une isométrie de F , l'ensemble F est invariant par s_O . Le barycentre de F est donc aussi invariant par s_O . Comme O est le seul point fixe de s_O , le barycentre de F coïncide donc avec O .

4.a. Puisque f est une application affine, $f(O)$ est le barycentre de l'ensemble $f(F)$. Comme F est une isométrie de F , on a $f(F) = F$. On a donc $f(O) = O$.

4.b. Le déplacement F admet au moins un point fixe. C'est donc une rotation ou l'identité d'après la classification des isométries de l'espace.

5.a. Comme f est une isométrie de F et comme les points P', Q et R sont les seuls points de F à distance d de P , les points $f(P'), f(Q)$ et $f(R)$ sont les seuls points de F à distance d de $f(P) = P$. On a donc $\{f(P'), f(Q), f(R)\} = \{P', Q, R\}$.

5.b. Supposons qu'on ait $f(P') = P', f(Q) = Q$ et $f(R) = R$. Comme $f(O) = O$, l'application f possède quatre points fixes non coplanaires (à savoir O, P, Q et R) ; c'est donc l'identité. Supposons qu'on ait $f(P') = P', f(Q) = R$ et $f(R) = Q$. Dans ce cas, $f \circ f$ (qui possède O, P, Q et R comme points fixes) est l'identité ; f est donc une symétrie orthogonale ayant P, P' et O comme point fixe et coïncide donc avec $s_{\{P, P'\}}$.

Montrons que les autres cas ne peuvent intervenir. Supposons qu'on ait $f(P') = Q, f(Q) = P'$ et $f(R) = R$. Les segments $[P, Q]$ et $[P, R]$ sont les cotés consécutifs d'un pentagone régulier de coté de longueur d . Les segments $[P, P']$ et $[P, Q]$ (resp. $[P, R]$) sont les cotés consécutifs d'un hexagone (resp. pentagone) régulier de coté de longueur d . On a donc les égalités et inégalités de produits scalaires $(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PR}) \neq (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$. Cela contredit le fait que f , étant une isométrie, préserve le produit scalaire. On exclut de même le cas où $f(P') = R, f(Q) = Q$ et $f(R) = P'$, puis le cas où $f(P') = Q, f(Q) = R$ et $f(R) = P'$ et enfin le cas où $f(P') = R, f(Q) = P'$ et $f(R) = Q$.

6.a. Utilisons la question 1.c. D'après la question 5.b, il y a deux isométries de F qui laissent fixe un point donné de F . Il y a donc $60 \times 2 = 120$ isométries de F .

6.b. Le groupe G comprend l'antidépacement s_O . La composition par s_O définit une bijection entre les déplacements et les antidépacements de G . Il y donc autant de déplacements que d'antidépacements dans G , c'est-à-dire $120/2 = 60$ déplacements.

7.a. L'isométrie f laisse fixe C , puisque C est le barycentre d'un ensemble de points globalement invariant par f . Les points O et C étant fixe par f , la droite (OC) est une droite de points fixes de f . C'est donc l'axe de f .

7.b. Par le même raisonnement qu'en 7.a., on montre que l'axe de f est la droite passant par O et le milieu de l'arête. La mesure de f est alors égale à π .

7.c. On peut démontrer que les rotations suivantes sont des isométries de F : les rotations d'axe (OC) comme dans 7.a. et de mesure $2k\pi/5$ avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le cas pentagonal et de mesure $2k\pi/3$ avec $k \in \{1, 2\}$ dans le cas hexagonal. (Attention dans le cas hexagonal les rotations de mesure $2k\pi/6$ avec $k \in \{1, 3, 5\}$ ne conviennent pas.) Si on prend garde que les axes de ces rotation sont invariants par s_O , on constate qu'il y a 12 faces pentagonales et 20 faces hexagonales, qui sont échangées deux à deux par s_O et donnent donc lieu à $12/2 = 6$ et $20/2 = 10$ axes de rotations distincts. Cela donne $12 \times 4/2 = 24$ rotations issues du cas pentagonal et $20 \times 2/2 = 20$ rotations issues du cas hexagonal.

Par ailleurs, il y a deux types d'arêtes de F . Avec les notations de **H2**, la rotation d'axe (OP'') et de mesure π , où P'' est milieu de $[P, Q]$ ou $[P, R]$ ne convient pas. Il reste la rotation d'axe (OP''') et de mesure π , qui convient. L'encore l'axe de rotation est invariant pas s_O . Il y a $60/2 = 30$ telles arêtes et donc $30/2 = 15$ axes de rotation distincts.

Si on tient compte de l'identité, on a trouvé $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ déplacements de F .

Les antidéplacements de F sont obtenus en composant ces déplacements avec s_O .

Exercice 2

1.a. Pour tout $\vec{v} \in P$, le cercle $t_{\vec{v}}(\mathcal{C})$ a pour centre $t_{\vec{v}}(O)$. Pour que $t_{\vec{u}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, il est donc nécessaire de prendre $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$. Cette condition est suffisante puisque $t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$ et \mathcal{C}' ont même rayon (à savoir le rayon de \mathcal{C} une translation et une symétrie orthogonale sont des isométries).

1.b. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe \mathcal{D} . Les points A et B étant sur \mathcal{D} , ils sont invariants par σ ; comme ils sont sur \mathcal{C} , leurs images par σ (à savoir eux-mêmes) sont sur $\mathcal{C}' := \sigma(\mathcal{C})$. Enfin, $t_{(-\vec{u})}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}' = t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$. Par définition de \vec{u} , de E et de F , on a $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{FB}$, ce qui fait déjà de $ABFE$ un parallélogramme. En outre, puisque $O' = \sigma(O)$, la droite (OO') est perpendiculaire à \mathcal{D} ; il en est donc de même pour les droites (AE) et (BF) : le quadrilatère $ABFE$ est un rectangle.

2. On a également $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OO'}$, donc aussi $(MN) \perp \mathcal{D}$.

3.a. Puisque $N = t_{\vec{u}}(M)$, que $\mathcal{C}' = t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$ et que $M \in \mathcal{C}$, on a $N \in \mathcal{C}'$. On sait que $\sigma^{-1} = \sigma$; de là $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}')$, étant donné que $\mathcal{C}' = \sigma(\mathcal{C})$. Comme $Q = \sigma(N)$ et que $N \in \mathcal{C}'$, on obtient $Q \in \mathcal{C}$.

3.b. (i) \iff (ii) Dans tous les cas, $OO'NM$ est un parallélogramme et \mathcal{D} est la médiatrice du segment $[OO']$. Par ailleurs, on a $Q = M$ ssi $\sigma(N) = M$, c'est-à-dire ssi \mathcal{D} est la médiatrice de $[MN]$. De ces remarques, il résulte que $Q = M$ si et seulement si $OO'NM$ est un rectangle (parallélogramme et trapèze isocèle).

(ii) \iff (iii) Le parallélogramme $OO'NM$ est un rectangle si et seulement si les droites (OO') et (OM) sont perpendiculaires, c'est-à-dire ssi $(OM) = \mathcal{D}'$.

4.a. Puisque σ est un antidéplacement, que $\sigma(A) = A$, que $\sigma(B) = B$ et que $\sigma(N) = Q$, on a $\widehat{QAB} = -\widehat{NAB} = \widehat{BAN}$.

4.b. Par définition de A, B, M et d'après 3.a. , on a $\widehat{AQ}, \widehat{AB} = \widehat{MQ}, \widehat{MB}$ pour cause de cocyclicité sur \mathcal{C} .

4.c. Du 4.a. résulte l'égalité d'angles de droites $\widehat{AQ}, \widehat{AB} = \widehat{AB}, \widehat{AN}$, valide dans tous les cas.

Si $Q = M$, on sait (cf. 3.b.) que $M = U$ ou $M = V$. Or (MN) est perpendiculaire à \mathcal{D} , donc à \mathcal{D}' : ainsi (MN) est la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} en M (et, d'ailleurs, à \mathcal{C}' en N). On connaît alors l'égalité $\widehat{AB}, \widehat{AM} = \widehat{MB}, \widehat{\mathcal{T}}$. On obtient donc en reportant $\widehat{AB}, \widehat{AN} = \widehat{AQ}, \widehat{AB} = \widehat{AM}, \widehat{AB} = \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{MB} = \widehat{MN}, \widehat{MB}$.

Si $Q \neq M$, on peut (cf. 4.b.) écrire $\widehat{AB}, \widehat{AN} = \widehat{AQ}, \widehat{AB} = \widehat{MQ}, \widehat{MB}$. En outre, les droites (NQ) (par définition de Q) et (MN) (cf. 2.) sont toutes deux perpendiculaires à \mathcal{D} : les points M, N, Q sont donc alignés et on obtient bien $\widehat{AB}, \widehat{AN} = \widehat{MQ}, \widehat{MB} = \widehat{MN}, \widehat{MB}$

5.a. Récrivant $\widehat{AB}, \widehat{AN} = \widehat{MN}, \widehat{MB}$ sous la forme $\widehat{AB}, \widehat{AN} + \widehat{MB}, \widehat{MN} = \widehat{0}$, on obtient $\widehat{MB}, \widehat{AN} = \widehat{MB}, \widehat{MN} + \widehat{MN}, \widehat{AB} + \widehat{AB}, \widehat{AN} = \widehat{MN}, \widehat{AB}$. Or on sait (cf. 2. de nouveau) que ce dernier angle est droit.

5.b. Du 5.a. et du 2. il résulte que B est l'orthocentre du triangle AMN . La troisième hauteur de celui-ci est donc (BN) , d'où $(BN) \perp (AM)$.

6. Si $M = A$, le point N est diamétralement opposé à B sur \mathcal{C}' . Le triangle AMN dégénère et se réduit au segment $[AN]$.

Si $M = B$, le point N est diamétralement opposé à A sur \mathcal{C}' . L'orthocentre du triangle AMN , rectangle en M , est bien $B = M$.

Si $M = E$, on a $N = A$ et AMN dégénère en segment $[AE]$.

Si $M = F$, on a $N = B$; AMN est rectangle en N , d'orthocentre $B = N$.