

**EXAMEN du 18 juin 2010**

**Durée : 3 h**

*L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.*

**Problème**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3. Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$ . Soient  $D_1, D_2$  et  $D_3$  trois droites de  $\mathcal{E}$  qui sont orthogonales deux à deux et qui passent par  $O$ . Soit  $P_1$  un point de  $\mathcal{E}$ , distinct de  $O$  et qui est situé à égales distances  $d$  des droites  $D_1, D_2$  et  $D_3$ . Notons  $P_3, P_5$  et  $P_7$  les symétriques orthogonaux de  $P_1$  par rapport à  $D_1, D_2$  et  $D_3$  respectivement. Notons  $P_6, P_4, P_2$  et  $P_8$  les symétriques par rapport à  $O$  de  $P_3, P_5, P_7$  et  $P_1$  respectivement. On notera d'ailleurs  $s$  la symétrie centrale par rapport à  $O$ .

Posons  $C = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ ,  $T_1 = \{P_1, P_3, P_5, P_7\}$  et  $T_2 = \{P_2, P_4, P_6, P_8\}$ .

On appelle *isométrie* d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{E}$  une isométrie de  $\mathcal{E}$  qui induit une bijection de  $A$ .

0. Faire un dessin.

1. Démontrer que  $C$  est l'ensemble des sommets d'un cube. Quelle est la longueur d'un côté de ce cube ?
2. Démontrer que  $T_1$  et  $T_2$  sont les ensembles des sommets de deux tétraèdres réguliers. Quelle est la longueur des côtés de ces tétraèdres ?
3. Quels sont les isobarycentres de  $C, T_1$  et  $T_2$  ?
4. Démontrer que toute isométrie de  $C$  admet  $O$  comme point fixe.
5. Soit  $f$  une isométrie de  $C$ . Démontrer que si  $f(P_1) \in T_1$  alors  $f$  est une isométrie de  $T_1$ . Démontrer ensuite que si  $f(P_1) \in T_2$ , on a  $f(T_1) = T_2$ .
6. Soit  $f$  une isométrie de  $T_1$ . Démontrer que  $f$  est une isométrie de  $C$ .
7. Soit  $f$  une isométrie de  $\mathcal{E}$  telle que  $f(T_1) = T_2$ . Démontrer que  $s \circ f$  est une isométrie de  $T_1$ . En déduire que  $f$  est une isométrie de  $C$ .
8. Soit  $f$  une isométrie de  $T_1$  ayant trois points fixes au moins dans  $T_1$ . Démontrer que  $f$  est l'identité.
9. Soit  $f$  une isométrie de  $T_1$  ayant deux points fixes exactement dans  $T_1$ . Démontrer que l'ensemble des points fixes de  $f$  est un plan, puis que  $f$  est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.
10. Soit  $f$  une isométrie de  $T_1$  ayant un point fixe exactement dans  $T_1$ . Notons  $P$  ce point fixe. Démontrer que la droite  $(OP)$  est formée de points fixes pour  $f$ . Démontrer que le plan passant par les trois points de  $T_1$  distincts de  $P$  est stable par  $f$  puis que  $f$  y admet  $O$  comme seul point fixe. En déduire que  $f$  est une rotation dont on précisera l'axe et la mesure.
11. Soit  $f$  une rotation de  $\mathcal{E}$  qui est une isométrie de  $T_1$ , sans point fixe dans  $T_1$  et d'axe  $\mathcal{D}$ . Posons  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$  etc. Démontrer que, pour tout point  $P$  de  $T_1$ , les points  $P, f(P), f^2(P), \dots$  sont dans un même plan orthogonal à  $\mathcal{D}$ . En déduire que  $f$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{D}$ . Quelles sont les situations possibles pour l'axe  $\mathcal{D}$  ?
12. Soit  $f$  une symétrie orthogonale par rapport à un plan  $\mathcal{P}$  qui est une isométrie de  $T_1$  et qui n'a pas de point fixe dans  $T_1$ . Démontrer que, pour tout point  $P$  de  $T_1$ , les points  $P$  et  $f(P)$  sont dans une même droite orthogonale à  $\mathcal{P}$ . En déduire qu'il n'existe pas de symétrie orthogonale telle que  $f$ .
13. Quelles sont les isométries de  $T_1$  ? On indiquera lesquelles sont des déplacements.
14. Quelles sont les isométries de  $C$  ? On indiquera encore lesquelles sont des déplacements.