Exercice I.

1. Soit s un paramètre réel > -1 ; démontrer la convergence absolue de la série numérique

$$\sum \Bigl(\frac{1}{n+s} - \ln(1+1/n)\Bigr)_{n\geq 1}.$$

On peut résoudre la question au moyen de deux développements limités,

$$\frac{1}{n+s} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+s/n} = \frac{1}{n}\bigl(1+\mathrm{O}(1/n)\bigr) = \frac{1}{n} + \mathrm{O}(n^{-2}),$$

$$\ln(1+1/n) = \frac{1}{n} + \mathrm{O}(n^{-2}),$$

donc

$$u_n = \frac{1}{n+s} - \ln(1+1/n) = \mathrm{O}(n^{-2})$$

est le terme général d'une série absolument convergente. On pourrait aussi écrire

$$a_n = \frac{1}{n+s} - \frac{1}{n} = \frac{-s}{n(n+s)}$$

dont la valeur absolue est équivalente à $|s|\,n^{-2}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum a_n$ est absolument convergente, puis considérer

$$b_n = \frac{1}{n} - \ln(1+1/n) \sim \frac{1}{2n^2},$$

qui est à nouveau le terme général d'une série convergente (à termes positifs), et conclure avec $u_n = a_n + b_n$. Une méthode plus sophistiquée utilise l'égalité

$$\ln(1+1/n) = \ln(n+1) - \ln(n) = \int_0^1 \frac{1}{n+t}\,dt$$

qui implique que

$$u_n = \int_0^1 \Bigl(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n+t}\Bigr)\,dt = \int_0^1 \frac{t-s}{(n+s)(n+t)}\,dt,$$

et on écrit une majoration convenable de la valeur absolue de cette intégrale, par exemple majoration par $(1+|s|)/(n^2+sn) \sim (1+|s|)\,n^{-2}$.

2. Pour chaque entier $n \geq 1$ on définit une fonction u_n sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ en posant

$$\forall x > -1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n+x} - \ln(1+1/n),$$

et on définit f sur $]-1,+\infty[$ en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x > -1$. Montrer que pour tout $a > -1$, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a,+\infty[$.

On calcule les dérivées,

$$\forall x > -1, \quad u_n'(x) = \frac{-1}{(n+x)^2}.$$

On a alors $|u_n'(x)| = (n+x)^{-2}$ qui est décroissant quand x décrit l'intervalle $[a,+\infty[$, donc

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad |u_n'(x)| \le |u_n'(a)| = \frac{1}{(n+a)^2} =: v_n$$

qui fournit une série majorante convergente $\sum v_n$ pour la série dérivée sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On a vu à la première question que la série $\sum u_n(x)$ converge en tout point x de $]a,+\infty[$, et la série des dérivées converge normalement sur cet intervalle. D'après un théorème du cours (poly, théorème 2.3.2), la fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par la somme de la série dérivée.

3. On fixe un nombre $b > 0$. Vérifier l'encadrement $u_n(0) - u_n(b) \ge u_n(x) - u_n(b) \ge 0$, pour tout $x \in [0,b]$ et tout entier $n \ge 1$. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n()$ converge normalement sur l'intervalle $[0,b]$.

On a vu que la dérivée u_n' est négative sur $[0,+\infty[$, donc $u_n(0) \ge u_n(x) \ge u_n(b)$ lorsque $0 \le x \le b$, donc $u_n(0) - u_n(b) \ge u_n(x) - u_n(b) \ge 0$. Ensuite,

$$\forall x \in [0,b], \quad |u_n(x)| \le |u_n(x) - u_n(b)| + |u_n(b)| \le (u_n(0) - u_n(b)) + |u_n(b)| =: w_n$$

donne une série numérique convergente majorante $\sum w_n$ pour la série de fonctions $\sum u_n()$, sur l'intervalle $[0,b]$ (on utilise aussi le résultat de la première question qui nous dit que $\sum |u_n(b)| < +\infty$ et $\sum |u_n(0)| < +\infty$).

4. On définit une fonction F sur $[0,+\infty[$ en posant $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \ge 0$. Exprimer F sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

On pose pour tout $n \ge 1$ et tout x réel

$$g_n(x) = (n+1)^{-x} \, \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n!}.$$

Montrer que $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe pour tout $x \ge 0$, en comparant $\ln g_n(x)$ à des sommes partielles de la série qui définit $\mathrm{F}(x)$.

Puisque la série de fonctions $\sum u_n()$ converge normalement sur $[0,x]$, on peut l'intégrer terme à terme. On a

$$\int_0^x u_n(t)\,dt = \ln(n+x) - \ln(n) + x\ln(1+1/n),$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(n+x) - \ln(n) - x\ln(1+1/n)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(1+x/n) - x\ln(1+1/n)\Big).$$

Si on remarque que $\ln(1+1/k) = \ln(k+1) - \ln(k)$, on voit que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k) = \ln(n+1).$$

On obtient alors pour la somme partielle s_n d'ordre n de la série qui définit $\mathrm{F}(x)$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+x) - \ln(k) - x\ln(1+1/k)\big) = \ln\Big((x+1)\dots(x+n)\Big) - \ln(n!) - x\ln(n+1)$$

qui est égal à $\ln g_n(x)$. Puisque s_n converge vers $\mathrm{F}(x)$, on en déduit que $\ln g_n(x)$ converge, donc $g_n(x)$ converge aussi (on peut même préciser que la limite de $g_n(x)$, égale à $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(x)}$, est non nulle).

Exercice II.

On désigne par m un paramètre réel et on considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & m-1 & -m-1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On désigne par a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que m est valeur propre de a et déterminer, en fonction de m, une base du sous-espace propre de a correspondant à la valeur propre m.

Pour déterminer le noyau de $a - m\,\mathrm{Id}$, on cherche à résoudre le système de trois équations $(\mathrm{A} - m\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, où $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ce qui donne

$$\begin{aligned} -(m+1)x + y - z &= 0 \\ -x - y - (m+1)z &= 0 \\ -x - y - (m+1)z &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont identiques, ce qui montre que le système est de rang < 3, donc le noyau est différent de $\{0\}$ et m est bien une valeur propre de a ; il reste deux équations

$$\begin{aligned} -(m+1)x + y - z &= 0 \\ -x - y - (m+1)z &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant 2×2 du coin gauche vaut $(m+1)+1$; il est non nul quand $m \neq -2$. Dans ce cas la dimension de l'espace des solutions est 1 ; en additionnant les deux équations on trouve $(m+2)(x+z) = 0$, donc $x + z = 0$. On peut prendre le vecteur

$$(1, m, -1)$$

comme base du sous-espace propre E_m dans le cas $m \neq -2$. Lorsque $m = -2$ il ne reste plus qu'une équation, $x + y - z = 0$ et la dimension du sous-espace propre est 2, avec pour base par exemple les deux vecteurs

$$(1, m, -1) = (1, -2, -1), \quad (1, -1, 0).$$

2. Trouver toutes les valeurs propres de a. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'endomorphisme a est diagonalisable.

On calcule le polynôme caractéristique,

$$\chi_a = (-1 - \mathrm{X})(m - \mathrm{X})(-2 - \mathrm{X}).$$

Si $m \notin \{-1, -2\}$ on a trois racines simples réelles pour χ_a, donc a est diagonalisable. Si $m = -2$, on a $\lambda = -1$ racine simple et $\lambda = -2$ racine double de χ_a, mais on a vu que la dimension de $\mathrm{E}_{-2} = \mathrm{E}_m$ est 2 dans ce cas, donc a est encore diagonalisable.

Finalement si $m = -1$, la racine -1 est double mais la dimension de $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{E}_m$ est égale à 1 quand $m = -1$, donc a n'est pas diagonalisable lorsque $m = -1$.

3. Dans cette question on suppose que $m = -1$. *Trouver un polynôme* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, *de degré* 1 *et tel que* $(\mathrm{X}+1)^2 + (\mathrm{X}+2)\mathrm{Q} = 1$. *Montrer que la matrice* $\mathrm{B} = -\mathrm{A}(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)$ *vérifie les équations*

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2\,\mathrm{B} = 0, \quad (\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)\,(\mathrm{I}_3 - \mathrm{B}) = 0.$$

On voit que

$$(\mathrm{X}+1)^2 + (\mathrm{X}+2)(-\mathrm{X}) = 1.$$

On prend donc $\mathrm{Q} = -\mathrm{X}$. On en déduit, par le passage aux polynômes de matrices, la relation

$$\mathrm{I}_3 = (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2 - (\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)\mathrm{A} = (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2 + \mathrm{B},$$

c'est-à-dire que $\mathrm{I}_3 - \mathrm{B} = (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2$. Puisque $m = -1$, on a $\chi_\mathrm{A} = -(\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}+2)$; d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $0 = -\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)$. On en déduit

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2\mathrm{B} = -(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)\mathrm{A} = \chi_\mathrm{A}(\mathrm{A})\,\mathrm{A} = 0$$

et

$$(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)(\mathrm{I}_3 - \mathrm{B}) = (\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2 = -\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0.$$

4. Dans cette question on suppose encore que $m = -1$. *Déterminer la solution* Y *du système différentiel* $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\mathrm{Y}(t)$ *qui vérifie la condition initiale* $\mathrm{Y}(0) = (1, -1, 1)$.

Quand $m = -1$ l'endomorphisme a n'est pas diagonalisable : la racine $\lambda = -1$ est double mais l'espace propre est de dimension 1. L'espace caractéristique correspondant est $\ker(a + \mathrm{Id})^2$, et il est de dimension 2. L'autre racine $\lambda = -2$ est simple, avec espace propre de dimension 1.

On peut utiliser B et $\mathrm{I}_3 - \mathrm{B}$ pour décomposer le vecteur donné $\mathrm{V} = (1, -1, 1)$ suivant les espaces caractéristiques de a. D'après la question précédente, on a $(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)(\mathrm{I}_3-\mathrm{B})\mathrm{V} = 0$, ce qui signifie que le vecteur $\mathrm{V}_{-2} = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{B})\mathrm{V} = \mathrm{V} - \mathrm{B}\mathrm{V}$ est dans l'espace propre E_{-2}, et $(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2\mathrm{B}\mathrm{V} = 0$, donc $\mathrm{V}_{-1} = \mathrm{B}\mathrm{V}$ est dans l'espace caractéristique de la valeur propre $\lambda = -1$. On a

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A}(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{V}_{-1} = (1, -3, -1)$ et $\mathrm{V}_{-2} = \mathrm{V} - \mathrm{V}_{-1} = (0, 2, 2)$.

On a $(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2\mathrm{V}_{-1} = 0$, ce qui implique

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{V}_{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathrm{I}_3 + t(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)}\,\mathrm{V}_{-1} = \mathrm{e}^{-t}\big(\mathrm{I}_3\mathrm{V}_{-1} + t(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\mathrm{V}_{-1} + 0\big).$$

Finalement

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{V} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{V}_{-1} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{V}_{-2} = \mathrm{e}^{-t}\big(\mathrm{V}_{-1} + t(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\mathrm{V}_{-1}\big) + \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{V}_{-2} =$$

$$\mathrm{e}^{-t}\big((1, -3, -1) + t(-2, 2, 2)\big) + \mathrm{e}^{-2t}(0, 2, 2)$$

ou encore en écrivant les fonctions coordonnées y_1, y_2, y_3 de la solution Y,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1 - 2t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ y_2(t) &= (-3 + 2t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ y_3(t) &= (-1 + 2t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,. \end{aligned}$$