

Corrigé de l'examen de Théorie spectrale, automne 2004

Exercice I

On désigne par Q le projecteur orthogonal de $L_2(0, 1)$ sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle, qui est défini par

$$\forall f \in L_2(0, 1), \forall x \in [0, 1], \quad (Qf)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt.$$

On considère l'opérateur $A = QP \in \mathcal{L}(L_2(0, 1))$, où P est défini par

$$\forall f \in L_2(0, 1), \forall x \in [0, 1], \quad (Pf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Diagonaliser l'opérateur hermitien compact $T = A^*A$. Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, calculer son noyau $k(x, y)$ et exprimer ce noyau à partir des fonctions propres.

Solution. On rappelle qu'on a vu en cours que P est compact et injectif. L'opérateur A associe à chaque fonction $f \in L_2(0, 1)$ sa primitive d'intégrale nulle Af . Ensuite on note que Q est un projecteur hermitien, donc $A^*A = P^*Q^*QP = P^*QQP = P^*A$. L'opérateur P^* associe à Af l'opposée de la primitive de Af nulle en 1, donc $(A^*Af)(1) = 0$. Comme l'intégrale de Af était nulle, on a aussi $(A^*Af)(0) = (A^*Af)(1) = 0$, car

$$(A^*Af)(0) - (A^*Af)(1) = \int_0^1 (Af)(t) dt = 0.$$

L'opérateur A^*A est hermitien positif compact (puisque P est compact), injectif car A est injectif : si $A^*Af = 0$, alors $0 = \langle A^*Af, f \rangle = \|Af\|^2$, donc $Af = 0$; si $Af = 0$, c'est que Pf est constante; mais $(Pf)(0) = 0$, donc cette constante est nulle, $Pf = 0$ et on sait que P est injectif; finalement on déduit que $f = 0$, et A est bien injectif.

Il reste à rechercher les vecteurs propres de A^*A pour des valeurs propres $\lambda > 0$: on veut trouver une fonction $\varphi \in L_2(0, 1)$ non nulle telle que

$$A^*A\varphi = \lambda\varphi,$$

ce qui implique que $\varphi = \lambda^{-1}A^*A\varphi$ est continue, puis C^2 , etc... En dérivant deux fois,

$$-\varphi = \lambda\varphi''.$$

La nullité de la fonction $\varphi = \lambda^{-1}A^*A\varphi$ aux deux bords de l'intervalle $[0, 1]$ impose que $\varphi = \sin(\lambda^{-1/2}x)$ avec $\sin(\lambda^{-1/2}) = 0$, ce qui fournit des valeurs propres de la forme $\lambda_m^{-1/2} = m\pi$, $m = 1, 2, \dots$. La plus grande valeur propre est $\lambda_1 = \pi^{-2}$, ce qui donne accessoirement la norme de A ,

$$\|A\| = \|A^*A\|^{1/2} = \lambda_1^{1/2} = \frac{1}{\pi}.$$

Si on veut des fonctions propres de norme 1 dans $L_2(0, 1)$, il faut prendre

$$\varphi_m(x) = \sqrt{2} \sin(m\pi x), \quad m = 1, 2, \dots$$

On vérifie que le noyau $k(x, t)$ de A^*A est égal à $k(x, t) = (1 - x)t$ quand $0 \leq t \leq x \leq 1$ et $k(x, t) = x(1 - t)$ quand $0 \leq x \leq t \leq 1$; en effet la fonction $T_k f$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad (T_k f)(x) = (1 - x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1 - t) f(t) dt$$

est nulle aux deux bords, et (quand f est continue) sa dérivée est égale à

$$(T_k f)'(x) = - \int_0^x t f(t) dt + (1 - x) x f(x) - x(1 - x) f(x) + \int_x^1 (1 - t) f(t) dt$$

et sa dérivée seconde à

$$(T_k f)''(x) = -x f(x) - (1 - x) f(x) = -f(x).$$

Comme il n'y a qu'une seule fonction g telle que $g'' = -f$ et $g(0) = g(1) = 0$, on conclut que T_k coïncide avec A^*A sur le sous-espace de $L_2(0, 1)$ formé des fonctions continues, qui est dense dans $L_2(0, 1)$, donc $T_k = A^*A$, et k est bien le noyau cherché. On peut donner une expression plus symétrique pour k , sous la forme

$$\forall x, t \in [0, 1], \quad k(x, t) = \min(x, t) - xt.$$

On en déduit que pour $0 \leq t, x \leq 1$,

$$\min(x, t) - xt = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \varphi_m(x) \overline{\varphi_m(t)} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(m\pi x) \sin(m\pi t)}{m^2}.$$

Cette égalité était *a priori* seulement vraie au sens L_2 , mais des considérations habituelles de continuité prouvent qu'elle est vraie pour toutes les valeurs indiquées (attention, la relation n'est plus vraie en dehors de l'intervalle $[0, 1]$).

Exercice II

On désigne par H un espace de Hilbert complexe; si $S \in \mathcal{L}(H)$ et $\|S\| < 1$, on pose

$$P(S) = \text{Id}_H + \sum_{n=1}^{+\infty} S^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (S^*)^n \in \mathcal{L}(H).$$

a. Montrer que

$$P(S) = (\text{Id}_H - S^*)^{-1} (\text{Id}_H - S^* S) (\text{Id}_H - S)^{-1};$$

en déduire que $P(S)$ est un opérateur hermitien positif.

Solution. Puisque $\|S\| = \|S^*\| < 1$ on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S^n = (\text{Id}_H - S)^{-1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (S^*)^n = (\text{Id}_H - S^*)^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(S) &= (\text{Id}_H - S)^{-1} - \text{Id}_H + (\text{Id}_H - S^*)^{-1} \\
&= (\text{Id}_H - S^*)^{-1}(\text{Id}_H - S^*)(\text{Id}_H - S)^{-1} - \text{Id}_H + (\text{Id}_H - S^*)^{-1}(\text{Id}_H - S)(\text{Id}_H - S)^{-1} \\
&= (\text{Id}_H - S^*)^{-1}(\text{Id}_H - S^* - (\text{Id}_H - S^*)(\text{Id}_H - S) + \text{Id}_H - S)(\text{Id}_H - S)^{-1} \\
&= (\text{Id}_H - S^*)^{-1}(\text{Id}_H - S^*S)(\text{Id}_H - S)^{-1}.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu intuitiver directement que

$$(\text{Id}_H - S^*)^{-1}S^*S(\text{Id}_H - S)^{-1} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} (S^*)^m \right) S^*S \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S^n \right) = \sum_{p,q \geq 1}^{+\infty} (S^*)^p S^q$$

et que $P(S)$ est précisément ce qu'il faut ajouter à l'expression précédente pour trouver

$$\sum_{p,q \geq 0}^{+\infty} (S^*)^p S^q = (\text{Id}_H - S^*)^{-1} \text{Id}_H (\text{Id}_H - S)^{-1}.$$

de sorte que

$$P(S) = (\text{Id}_H - S^*)^{-1} \text{Id}_H (\text{Id}_H - S)^{-1} - (\text{Id}_H - S^*)^{-1} S^*S (\text{Id}_H - S)^{-1},$$

d'où le résultat. Il est clair que l'objet $(\text{Id}_H - S^*)^{-1}(\text{Id}_H - S^*S)(\text{Id}_H - S)^{-1}$ est hermitien, car il est de la forme A^*BA , avec $B = \text{Id}_H - S^*S$ hermitien et $A = (\text{Id}_H - S)^{-1}$; de plus

$$\langle (\text{Id}_H - S^*S)x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle Sx, Sx \rangle \geq 0$$

puisque $\|Sx\| \leq \|S\| \|x\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$. Quand B est hermitien positif, il en est de même pour A^*BA , car

$$\langle A^*BAx, x \rangle = \langle BAx, Ax \rangle \geq 0.$$

b. On suppose que $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\|T\| < 1$; soit $Q = \sum_{j=0}^N c_j X^j$ un polynôme à coefficients complexes; montrer que

$$Q(T) = \sum_{j=0}^N c_j T^j = \int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta}) P(e^{-i\theta} T) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : si une suite (f_n) de fonctions continues de $[a, b]$ dans un Banach Y tend vers f uniformément sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f_n(t) dt$ tend vers $\int_a^b f(t) dt$ dans l'espace Y .

Solution. Par linéarité il suffit de le faire quand $Q = X^m$, m entier ≥ 0 , c'est-à-dire de calculer

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} P(e^{-i\theta} T) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Comme la série de définition de $P(S)$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(H)$, l'intégrale précédente vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} T^n \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{in\theta} (T^*)^n \frac{d\theta}{2\pi} = T^m,$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta} d\theta = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ non nul ; ainsi, le seul terme non nul est celui qui correspond à $n = m$ dans la première série.

c. Soient $x, y \in H$; montrer que la fonction $g(\theta) = \langle P(e^{-i\theta} T) x, x \rangle$ est réelle positive, d'intégrale égale à $\langle x, x \rangle$ par rapport à la mesure $d\theta/(2\pi)$ sur $[0, 2\pi]$; majorer $\langle Q(T) x, y \rangle$ en utilisant Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle P(e^{-i\theta} T) x, y \rangle$, et en déduire que

$$\|Q(T)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|Q\|_{\infty} = \max\{|Q(e^{i\theta})| : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Solution. Il est clair que la fonction g_x définie par $g_x(\theta) = \langle P(e^{-i\theta} T) x, x \rangle$ est réelle positive puisque $P(S)$ est hermitien positif pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$ de norme < 1 ; comme l'intégrale de Riemann vectorielle est limite de sommes de Riemann, on voit que

$$\int_0^{2\pi} \langle P(e^{-i\theta} T) x, x \rangle \frac{d\theta}{2\pi} = \left\langle \left(\int_0^{2\pi} P(e^{-i\theta} T) \frac{d\theta}{2\pi} \right) x, x \right\rangle = \langle \text{Id}_H x, x \rangle.$$

Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle P(e^{-i\theta} T) x, y \rangle| \leq g_x(\theta)^{1/2} g_y(\theta)^{1/2}$$

et

$$\begin{aligned} |\langle Q(T) x, y \rangle| &= \left| \int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta}) \langle P(e^{-i\theta} T) x, y \rangle \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})| g_x(\theta)^{1/2} g_y(\theta)^{1/2} \frac{d\theta}{2\pi} \leq \|Q\|_{\infty} \int_0^{2\pi} g_x(\theta)^{1/2} g_y(\theta)^{1/2} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \|Q\|_{\infty} \left(\int_0^{2\pi} g_x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} g_y(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} \leq \|Q\|_{\infty} \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

d. Montrer le même résultat sous l'hypothèse $\|T\| \leq 1$. En déduire, quand $\|T\| \leq 1$, que l'application $Q \rightarrow Q(T)$ se prolonge en un homomorphisme de $A(D)$ dans $\mathcal{L}(H)$, où $A(D)$ désigne l'algèbre des fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert qui se prolongent en fonction continue sur le disque fermé.

Solution. Si $\|T\| = 1$ et si Q est un polynôme il est évident que $Q(T) = \lim Q(sT)$, quand $s \rightarrow 1$ par valeurs $s < 1$; pour sT le résultat de la question *c* s'applique et

$$\|Q(T)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{s \nearrow 1} \|Q(sT)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|Q\|_{\infty}.$$

Pour terminer il suffit de savoir que les polynômes sont denses dans $A(D)$, munie de la norme uniforme : cela résulte par exemple du théorème de Fejér sur les séries de Fourier des fonctions continues.

Exercice III

On désigne par A une algèbre de Banach unitaire complexe, et on suppose donné un idempotent $p \in A$, $p = p^2$. On lui associe les sous-ensembles

$$C_p = \{a \in A : ap = pa\}; \quad A_p = \{a \in A : ap = pa = a\}.$$

a. Vérifier que A_p peut être considérée comme une algèbre de Banach unitaire dont l'unité est p .

Solution. Il y a une petite erreur dans l'énoncé, par rapport aux conventions adoptées dans le cours. En effet, on a imposé en cours que l'unité soit de norme 1 ; on aurait dû ajouter dans l'énoncé :

$$\text{on suppose que } \|p\| = 1$$

et aussi $\|q\| = 1$ à la question suivante. Cela dit, si $a, b \in A_p$, on a

$$abp = apb = pab = ab,$$

donc A_p est stable par produit, et il est évident que p agit comme unité. De plus A_p est fermée dans A par continuité du produit, donc c'est une algèbre de Banach, unitaire.

On pose $q = 1_A - p$ et pour $a \in C_p$ on définit $a_p = pa$, $a_q = qa$.

b. Soit $b \in C_p$; montrer que b est inversible dans A si et seulement si b_p et b_q sont inversibles, respectivement dans A_p et A_q . Si $a \in C_p$, en déduire que le spectre de a est la réunion des spectres de a_p et a_q .

Solution. Supposons que c soit l'inverse de b dans l'algèbre A ; alors c commute avec p , car $cp = cpbc = cbpc = pc$. On a

$$b_p c_p = b p p c = b p c = p b c = p,$$

et de même pour l'autre côté, donc c_p est l'inverse de b_p dans A_p , et de la même façon c_q est l'inverse de b_q dans A_q . Inversement, on note que $pq = qp = p - p^2 = 0$; si $u \in A_p$ et $v \in A_q$, alors $uv = upqv = 0$; si $u \in A_p$ et $v \in A_q$ sont les inverses de b_p et b_q on aura

$$b(u + v) = (b_p + b_q)(u + v) = b_p u + b_q v = p + q = 1_A,$$

et de même pour l'autre côté, $(u + v)b = 1_A$. Si on applique ceci à $b = a - \lambda 1_A$, si on note que $b_p = a_p - \lambda p$, on obtient que λ est dans le résolvant de a si et seulement s'il est dans les deux résolvants de a_p et a_q , relatifs à A_p et A_q respectivement.

c. Maintenant A est une C^* -algèbre et $a \in A$ est un élément normal, dont le spectre est égal à la réunion de deux compacts disjoints non vides P et Q du plan complexe ; on désigne par $p = \mathbf{1}_P(a)$ l'image de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_P$ par le calcul fonctionnel associé à a . Montrer que le spectre de a_p est P , et celui de a_q est Q . Montrer que le calcul fonctionnel associé à a_p est donné par

$$\Phi(f) = \tilde{f}(a)p,$$

où \tilde{f} est n'importe quel prolongement de $f \in C(\sigma(a_p))$ en une fonction continue sur $\sigma(a)$.

Solution. Posons $K = \sigma(a) = P \cup Q$. On note que

$$f(a)p = (f\mathbf{1}_P)(a) = (\mathbf{1}_P f)(a) = pf(a),$$

donc $f(a) \in C_p$; si la fonction f est nulle sur P , il en résulte que $f\mathbf{1}_P = 0$ sur K , donc $f(a)p = f(a)p = 0$, ce qui montre que $f(a)p$ ne dépend que de la restriction de f à l'ensemble P : si f_1 et f_2 coïncident sur P , alors $f_1(a)p - f_2(a)p = (f_1 - f_2)(a)p = 0$. Prenons une fonction $f = \lambda\mathbf{1}_P + \mu\mathbf{1}_Q$, avec $\lambda \notin P$ et $\mu \notin Q$; la fonction $f - \zeta_K$ ne s'annule pas sur $\sigma(a) = P \cup Q$, donc son image $f(a) - a$ est inversible dans A , donc $f(a)p - a_p$ est inversible dans A_p . Mais f coïncide sur P avec la fonction constante λ , donc $f(a)p = \lambda p$, et $a_p - \lambda p$ est inversible dans A_p , ce qui montre que $\sigma(a_p) \subset P$, et de même $\sigma(a_q) \subset Q$; comme la réunion des deux est le spectre de a , égal à $P \cup Q$, il en résulte que nos deux inclusions sont des égalités.

Pour chaque f continue sur P , considérons le prolongement particulier \tilde{f}_0 obtenu en posant $\tilde{f}_0 = 0$ sur Q . Il est clair que $f \rightarrow \tilde{f}_0$ est un *-homomorphisme de $C(P)$ dans $C(K)$ (mais pas unitaire !) et si on propose

$$\Phi(f) = \tilde{f}_0(a)p \in A_p,$$

il est facile de vérifier que ce candidat est un homomorphisme qui a toutes les bonnes propriétés.

Exercice IV

Dans cet exercice les fonctions sont réelles. On notera pour abrégé, quand $f \in L_1(\mathbb{R})$

$$\int f = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

On dira qu'une fonction h continue sur \mathbb{R} admet une dérivée généralisée h' , si h' est mesurable, intégrable sur tout intervalle borné, et vérifie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$h(y) - h(x) = \int_x^y h'(t) dt.$$

On utilisera la formule d'intégration par parties (IPP) démontrée en cours : si les fonctions h et k admettent des dérivées généralisées, on a pour tous $a < b$

$$\int_a^b h(t)k'(t) dt = [hk]_a^b - \int_a^b h'(t)k(t) dt.$$

Dans le cas où $k = \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cette formule implique que

$$\int h\varphi' = - \int h'\varphi.$$

On fixera une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $] -2, 2[$, telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur $[-1, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définira θ_n par $\theta_n(x) = \theta(x/n)$. Par abus de notation,

on notera x la fonction identité $x \in \mathbb{R} \rightarrow x$, par exemple xf sera la fonction $x \rightarrow xf(x)$. Par $\|f\|_2$ on désignera la norme de f dans $L_2(\mathbb{R})$.

a. Dans cette question préliminaire, $\varepsilon = \pm 1$ est fixé; on va montrer que si h admet une dérivée généralisée h' , si h et $h' + \varepsilon xh$ sont dans $L_2(\mathbb{R})$, alors h' est dans $L_2(\mathbb{R})$, et plus précisément : il existe une constante C , indépendante de h , telle que

$$\|h'\|_2 \leq C (\|h\|_2 + \|h' + \varepsilon xh\|_2).$$

a1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| \int xh \theta_n h' \right| \leq (1 + \|x\theta'\|_\infty) \int \frac{h^2}{2}.$$

Solution. On vérifie avec (IPP) que f^2 admet $2ff'$ pour dérivée généralisée, donc

$$\int xh \theta_n h' = \int (x\theta_n) h h' = - \int (x\theta_n)' \frac{h^2}{2}$$

et la dérivée de $x\theta_n$ vaut $\theta_n(x) + (x/n)\theta'_n(x/n)$, quantité majorée par $1 + \|x\theta'\|_\infty$.

a2. Montrer qu'il existe une constante $\tau > 0$, indépendante de la fonction h , telle qu'en posant $y = \|h\|_2 + \|h' + \varepsilon xh\|_2$, on ait pour tout entier $n \geq 1$

$$\int \theta_n^2 h'^2 \leq \int \theta_n h'^2 = \langle h', \theta_n h' \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \leq \tau y^2 + y \|\theta_n h'\|_2.$$

En déduire que $\|\theta_n h'\|_2 \leq (1 + \tau)y$, puis déduire le résultat annoncé à la question a.

Solution. La première inégalité est claire : puisque $0 \leq \theta_n \leq 1$, on a $\theta_n^2 \leq \theta_n$. L'égalité avec un produit scalaire est claire, et

$$\langle h', \theta_n h' \rangle = \langle h' + \varepsilon xh, \theta_n h' \rangle - \langle \varepsilon xh, \theta_n h' \rangle$$

qui se majore par

$$\|h' + \varepsilon xh\|_2 \|\theta_n h'\|_2 + \frac{1}{2} (1 + \|x\theta'\|_\infty) \|h\|_2^2 \leq y \|\theta_n h'\|_2 + \tau y^2,$$

où on peut prendre $\tau = 1/2 + \|x\theta'\|_\infty/2$. Posons $\|\theta_n h'\|_2 = uy$; on a

$$u^2 y^2 \leq uy^2 + \tau y^2,$$

donc $u^2 \leq u + \tau$. Si $s := u - \tau$ était > 1 , on aurait

$$u^2 = \tau^2 + 2\tau s + s^2 > (2\tau + s)s > 2\tau + s = u + \tau$$

donc on doit avoir $s \leq 1$, c'est-à-dire $u \leq \tau + 1$. Pour tout entier n , on a ainsi

$$\int \theta_n^2 h'^2 \leq (\tau + 1)^2 y^2,$$

ce qui implique par le lemme de Fatou que

$$\int h'^2 \leq (\tau + 1)^2 y^2.$$

On a obtenu le résultat annoncé, avec $C = \tau + 1 = 3/2 + \|x\theta'\|/2$.

b. On considère l'espace H des fonctions f admettant une dérivée généralisée f' , telles que f , xf et f' soient dans $L_2(\mathbb{R})$. On le munit de la norme $\|f\|_H$ définie par

$$\|f\|_H^2 = \int (f'^2 + (1 + x^2)f^2).$$

On définit un opérateur (non borné) T sur $L_2(\mathbb{R})$ de la façon suivante : son domaine est H , et pour toute fonction $f \in \text{dom}(T) = H$ on pose $Tf = f' + xf$. Montrer que T est densément défini et fermé. Montrer que H est un espace de Hilbert.

Solution. Le domaine de T contient $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc il est dense dans $L_2(\mathbb{R})$. Si $(f_n, f'_n + xf_n)$ converge vers une limite (f, h) , on voit que $(f_n - f_m)' + x(f_n - f_m)$ tend vers 0 dans $L_2(\mathbb{R})$ quand $m, n \rightarrow \infty$, donc $(f_n - f_m)'$ tend vers 0 dans $L_2(\mathbb{R})$ d'après les préliminaires de la question *a*, et f'_n tend dans $L_2(\mathbb{R})$ vers une fonction g . Alors

$$f_n(y) - f_n(x) = \langle \mathbf{1}_{(x,y)}, f'_n \rangle \rightarrow \int_x^y g(t) dt$$

permet de voir (comme dans le cours) que $g = f'$. Par différence xf_n converge dans L_2 , et la limite ne peut être que xf . Finalement $h = f' + xf$ et le graphe de T est fermé. La norme de $f \in H$ est équivalente à la norme de (f, Tf) dans le graphe de T , qui est un fermé du Hilbert $L_2 \times L_2$, donc H lui-même est un espace de Hilbert.

c. On suppose que f, g sont deux fonctions telles que $f, f', g, g' \in L_2(\mathbb{R})$; montrer que la suite $(\theta_n g)'$ tend vers g' dans $L_2(\mathbb{R})$ et en déduire que

$$\int f g' = - \int f' g.$$

*Déterminer l'adjoint de T ; montrer ensuite que le domaine de T^*T est égal à*

$$E = \{f : f, x^2 f, f', x f', f'' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Solution. Avec (IPP) on voit que

$$(\theta_n g)' = \theta'_n g + \theta_n g',$$

qui tend vers g' dans $L_2(\mathbb{R})$, car la suite $\theta'_n g$ tend vers 0 dans $L_2(\mathbb{R})$ (on note que $\|\theta'_n\|_\infty = O(1/n)$), et $\int |g' - \theta_n g'|^2$ tend vers 0 par Lebesgue dominé. On en déduit que

$$\int f g' = \lim_n \int f(\theta_n g)' = - \lim_n \int f' \theta_n g = - \int f' g.$$

Si g est dans le domaine de T^* , la forme linéaire

$$f \in H \rightarrow \langle Tf, g \rangle$$

est L_2 -continue; en particulier, en restreignant aux fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}$, et en utilisant le langage des distributions, on voit que la forme linéaire

$$\varphi \rightarrow \langle T\varphi, g \rangle = \int (\varphi' + x\varphi)g = (-g' + xg, \varphi)_{\mathcal{D}},$$

où g' désigne la dérivée distribution, est L_2 -continue. On en déduit qu'il existe une fonction $h \in L_2(\mathbb{R})$ qui représente la distribution $-g' + xg$; comme xg est une fonction intégrable sur tout intervalle borné, il en est de même pour g' ; ceci implique que g' est la dérivée généralisée de g , au sens de l'énoncé. D'après le préliminaire, $g \in L_2(\mathbb{R})$ et $g' - xg$ dans $L_2(\mathbb{R})$ entraînent que $g' \in L_2(\mathbb{R})$, $xg \in L_2(\mathbb{R})$. Il est facile de voir que réciproquement, ces deux dernières conditions impliquent que $g \in \text{dom}(T^*)$, donc

$$\text{dom}(T^*) = H, \quad T^*g = -g' + xg.$$

Le domaine de T^*T est formé des $f \in H$ tels que $Tf \in H$, c'est-à-dire $f, xf, f' \in L_2$, et $f' - xf \in H$, donc $f' - xf, xf' - x^2f, f'' - f - xf' \in L_2$. On a par combinaison que $f', f'' - xf' \in L_2$, donc $f'' \in L_2$ par le préliminaire. On termine la caractérisation de $\text{dom}(T^*T)$ par additions et soustractions. On note que

$$T^*Tf = -(Tf)' + x(Tf) = -(f' + xf)' + x(f' + xf) = -f'' + (x^2 - 1)f.$$

d. Pour tout entier n on considère l'application qui associe à $f \in H$ la fonction $\theta_n f$. Montrer que cette application, vue comme application de H dans $H_0^1([-2n, 2n])$, est bornée de H dans H_0^1 . En déduire que $f \rightarrow \theta_n f$, vue comme application de H dans $L_2(\mathbb{R})$, est compacte de H dans $L_2(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\|f - \theta_n f\|_2^2 \leq \frac{1}{n^2} \int x^2 f^2.$$

En déduire que l'injection de H dans $L_2(\mathbb{R})$ est compacte.

Solution. La norme H^1 de $\theta_n f$ est donnée par la norme L_2 de $\theta_n f$, qui est plus petite que celle de f puisque $|\theta| \leq 1$, et celle de la dérivée

$$(\theta_n f)' = \theta'_n f + \theta_n f'$$

qui est plus petite que $\|\theta'\|_\infty \|f\|_2 + \|f'\|_2$, quantité contrôlable par un multiple convenable de la norme $\|f\|_H$. Il en résulte que $f \rightarrow \theta_n f$ est continue de H dans $H^1(\mathbb{R})$.

On peut aussi considérer que $\theta_n f \in H_0^1(]-2n, 2n[)$ puisque la fonction θ_n est à support dans l'intervalle ouvert $]-2n, 2n[$. Désignons par $S_n \in \mathcal{L}(H, H_0^1(]-2n, 2n[))$ cette application. L'opérateur $V_n : f \rightarrow \theta_n f$, vu de H dans $L_2(\mathbb{R})$, s'obtient en composant S_n avec l'injection de $H_0^1(]-2n, 2n[)$ dans $L_2(\mathbb{R})$, qui est compacte d'après le cours, puisque l'ouvert est borné; on voit donc que $V_n \in \mathcal{L}(H, L_2(\mathbb{R}))$ est compact.

On voit que la fonction $1 - \theta_n$ est nulle sur l'intervalle $[-n, n]$, puisque $\theta = 1$ sur $[-1, 1]$, et on a partout $|1 - \theta_n| \leq 1$. Il en résulte que

$$\int (1 - \theta_n)^2 f^2 = \int_{|x| \geq n} (1 - \theta_n)^2 f^2 \leq \int_{|x| \geq n} \frac{x^2}{n^2} (1 - \theta_n)^2 f^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \int x^2 f^2.$$

Si on note V l'injection de H dans $L_2(\mathbb{R})$, on voit que $\|Vf - V_n f\|_2 \leq n^{-1} \|f\|_H$; ceci implique que

$$\|V - V_n\|_{\mathcal{L}(H, L_2(\mathbb{R}))} \leq 1/n,$$

et montre que V est limite en norme d'opérateur d'une suite d'opérateurs compacts, donc l'injection V est compacte de H dans $L_2(\mathbb{R})$.

e. Montrer que $S : f \rightarrow -f'' + x^2 f$ est une bijection de E sur $L_2(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe une suite (λ_n) et une base orthonormée (φ_n) de $L_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n, \quad -\varphi_n'' + x^2 \varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Solution. L'opérateur proposé est de la forme $\text{Id} + T^*T$; d'après le cours, c'est une bijection de $\text{dom}(T^*T) = E$ sur $L_2(\mathbb{R})$, dont l'inverse B est continue de $L_2(\mathbb{R})$ dans $L_2(\mathbb{R})$, et de plus on a

$$\forall f \in E, \quad \langle (\text{Id} + T^*T)f, f \rangle = \|f\|_2^2 + \|Tf\|_2^2.$$

Si on pose $By = f$ quand $(\text{Id} + T^*T)f = y$, on voit en utilisant la question *a* qu'en prenant $C_1 \geq 10C^2$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \|By\|_H^2 &= \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \|xf\|_2^2 \leq C_1 (\|f\|_2^2 + \|f' + xf\|_2^2) \\ &= C_1 \langle By, y \rangle \leq C_1 \|By\|_2 \|y\|_2 \leq C_1 \|By\|_H \|y\|_2, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\|By\|_H \leq C_1 \|y\|_2$, donc B est continue, considérée de $L_2(\mathbb{R})$ dans H . En composant avec l'injection compacte de H dans $L_2(\mathbb{R})$ on obtient que B est compacte de $L_2(\mathbb{R})$ dans $L_2(\mathbb{R})$. On sait d'après le cours que B est un opérateur hermitien positif, de norme ≤ 1 , injectif par définition. On peut le diagonaliser dans une base orthonormée (φ_n) ; les équations $B\varphi_n = \mu_n \varphi_n$, $\mu_n > 0$, se traduisent en $(\text{Id} + T^*T)\varphi_n = \mu_n^{-1} \varphi_n$.

f. Montrer que le résultat de la question précédente subsiste si on perturbe l'opérateur S en $S_v : f \in E \rightarrow -f'' + (x^2 + v)f$, où v est ≥ 0 sur \mathbb{R} et $v(x) = o(x^2)$ à l'infini.

Solution. Il est clair qu'on peut munir E d'une structure d'espace de Hilbert. En raisonnant comme à la question *d*, on voit que l'opérateur $f \rightarrow vf$ est compact de E dans $L_2(\mathbb{R})$, donc son addition à l'isomorphisme $f \in E \rightarrow -f'' + x^2 f \in L_2(\mathbb{R})$ donne un Fredholm T_v d'indice nul. Mais le noyau de T_v est nul à cause de la positivité de v , donc T_v reste un isomorphisme. Vérifions que l'inverse B_v est encore compact. On définit $B_v y_n = f_n$ par le fait que $-f_n'' + (x^2 + v)f_n = y_n$, ce qui donne $-f_n'' + x^2 f_n = B(y_n - v f_n)$. Comme B_v est un isomorphisme, la suite (f_n) est bornée dans E , donc $y_n - v f_n$ est bornée dans L_2 et $B(y_n - v f_n)$ admet des sous-suites convergentes. On se débrouille ensuite pour finir en temps fini...