

**Introduction à la théorie des dérivateurs**  
**et**  
**Structure triangulée sur les catégories de coefficients**  
**de dérivateurs triangulés**

**Georges MALTSINIOTIS**

Exposés au Groupe de travail “Algèbre et topologie homotopiques” (2001)

(Notes prises par **D.-C. Cisinski**)



# Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck) (7-2-01)

1. Historique
2. Problématique
3. Prédéivateurs
4. Déivateurs

## 1. Historique.

- A. Grothendieck "Poursuite des champs" (1983) et "Déivateurs" (1990)  
A. Heller "Homotopy theories" (1988)  
B. Keller "Tour de catégories triangulées" (publ. 1991)  
J. Franke "Système de catégories triangulées de diagrammes" 1996.

## 2. Problématique.

On cherche un bon cadre pour l'algèbre homotopique et homologique.

Verdier : les catégories triangulées :

- a) Un diagramme dans une catégorie triangulée ne détermine pas sa colimite homotopique à isomorphisme canonique près. Par exemple, le cône d'un morphisme n'est connu qu'à isomorphisme non-canonique près.
- b) La catégorie dérivée d'une catégorie abélienne vue comme une catégorie triangulée ne satisfait pas à une propriété universelle.

Soit  $A$  une catégorie de Grothendieck, i.e.  $A$  est une catégorie abélienne admettant des petites limites inductives, un petit système de générateurs, et des limites inductives filtrantes exactes. On note  $K(A)$  la catégorie des complexes de  $A$ .

Si  $I$  est une petite catégorie, on note  $D(I)$  la catégorie dérivée de  $\underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, A)$ .

Si  $e$  est la catégorie punctuelle,  $D(e)$  est la catégorie dérivée de  $A$ , i.e.  $D(e) = K(A) [W_{\text{qis}}^{-1}] =: \text{Der } A$ .

En général  $D(I) = K(\underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, A)) [W_I^{-1}]$  où  $W_I$  est la classe des quasi-isomorphismes de  $K \underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, A)$ .

Comme  $K \underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, A) \simeq \underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, K(A))$ ,  $W_I$  s'identifie aux morphismes de pré-faisceaux qui sont des quasi-isomorphismes.

Soit  $I \xrightarrow{P} e$ . On obtient un foncteur  $K(A) \simeq \underline{\text{Hom}}(e, K(A)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(I^{\circ}, K(A))$  d'où  $D(e) \xrightarrow{P^*} D(I)$ . Ce dernier admet un adjoint à gauche noté  $p_!$  et un adjoint à droite  $p_*$ .

$$p_!, p_* : D(I) \rightarrow D(e)$$

$p_!$  associe à un objet de  $D(I)$  sa colimite homotopique.

$p_*$  ————— limite homotopique.

Plus généralement, si  $I \xrightarrow{u} J$  est un foncteur entre petites catégories, on obtient un foncteur  $D(J) \xrightarrow{u^*} D(I)$  admettant des adjoints à gauche et à droite généralisant les notions de limites et de colimites homotopiques.

$$\text{Si on a } I \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{v} \end{array} J \text{ on obtient } v^* \xrightarrow{\alpha^*} u^*.$$

Donc  $I \mapsto D(I)$ ,  $u \mapsto u^*$ ,  $\alpha \mapsto \alpha^*$  définit un 2-foncteur de la catégorie des petites catégories dans la catégorie des catégories.

### 3. Prédérivateurs.

On note  $\text{Cat}$  la 2-catégorie des petites catégories.

On fixe  $\text{Dia}$  une sous-2-catégorie de  $\text{Cat}$  satisfaisant toutes les conditions de stabilité dont on aura besoin.

Exemples:

- $\text{Dia} = \text{Cat}$
- $\text{Dia} =$  la sous-catégorie pleine formée des catégories finies
- $\text{Dia} =$  \_\_\_\_\_ correspondent à des ensembles ordonnés finis.

Un prédérivateur de domaine  $\text{Dia}$  est un 2-foncteur

$$\text{Dia} \xrightarrow{\text{ID}} \text{CAT}$$

(où  $\text{CAT}$  est la 2-catégorie des catégories), ce qui est une façon concise pour dire la chose suivante:

a) à tout objet  $I$  de  $\text{Dia}$ , on associe une catégorie  $\text{ID}(I)$ .

b) à tout morphisme  $I \xrightarrow{u} J$  dans  $\text{Dia}$ , on associe un foncteur  $\text{ID}(J) \xrightarrow{u^*} \text{ID}(I)$

c) à tout morphisme de foncteurs  $I \begin{matrix} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{v} \end{matrix} J$  on associe  $v^* \xrightarrow{\alpha^*} u^*$

les conditions suivantes sont vérifiées:

$$1) I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K \text{ dans } \text{Dia} \Rightarrow (vu)^* = u^* v^* \text{ et } (1_I)^* = 1_{\text{ID}(I)}$$

$$2) I \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \Downarrow \beta \end{matrix} J \Rightarrow (\beta \alpha)^* = \alpha^* \beta^* \text{ et } (1_u)^* = 1_{u^*}$$

$$3) I \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \Downarrow \beta \end{matrix} J \begin{matrix} \xrightarrow{\gamma} \\ \Downarrow \delta \end{matrix} K \Rightarrow (\delta * \alpha)^* = \alpha^* * \beta^*$$

Rem: (3)  $\Leftrightarrow I \xrightarrow{u} J \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \Downarrow \beta \end{matrix} K \Rightarrow (\alpha * u)^* = u^* * \alpha^*$

$$I \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \Downarrow \beta \end{matrix} J \xrightarrow{v} K \Rightarrow (v * \beta)^* = \beta^* * v^*$$

Terminologie: les catégories appartenant à  $\mathcal{B}ia$  s'appellent les catégories d'indice pour  $\mathbb{D}$ . Les catégories  $\mathbb{D}(I)$  sont les catégories de coefficients pour  $\mathbb{D}$ . Les objets de  $\mathbb{D}(I)$  sont les coefficients de type  $\mathbb{D}$  sur  $I$ .

Si  $I \xrightarrow{u} J$  est une flèche de  $\mathcal{B}ia$ ,  $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$  est le foncteur image inverse de  $u$ .

$e$  est la catégorie ponctuelle.

$\mathbb{D}(e)$  est la catégorie fondamentale de  $\mathbb{D}$ .

Les objets de  $\mathbb{D}(e)$  sont les coefficients absolus de type  $\mathbb{D}$ .

Notations:

Pour  $I$  dans  $\mathcal{B}ia$ , on note  $I \xrightarrow{p_I} e$ .

Un coefficient  $F$  de type  $\mathbb{D}$  sur  $I$  est constant s'il existe un coefficient absolu  $M$  tel que  $F \cong p_I^* M$  dans  $\mathbb{D}(I)$ .

Exemple:

Un couple  $(M, W)$  est un localisateur si  $M$  est une catégorie et si  $W \subset \text{FE}(M)$ .

Notation:

$$M(I) = \text{Hom}(I^o, M)$$

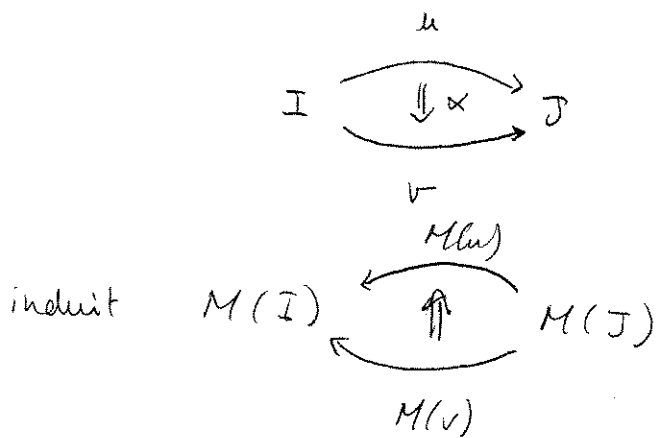
$$W_I = \{ \varphi \in \text{FE } M(I) : \forall i \in \text{ob } I, \varphi_i \in W \}$$

A tout localisateur  $(M, W)$  on peut (modulo des difficultés ensemblistes) associer un préderivateur  $\mathbb{D} := \mathbb{D}_{(M, W)}$  comme suit:

$$\mathbb{D}(I) = M(I) [W_I^{-1}].$$

$I \xrightarrow{u} J$  donne  $M(J) \xrightarrow{M(u)} M(I)$  compatible avec  $W$

i.e.  $M(u) W_J \subset W_I$ , ce qui induit  $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$ .



défini par  $Fv(i) \rightarrow Fu(i)$ .

Le cas le plus fréquent, est:  $M$  est une catégorie de modèles fermée et  $W$  est la classe des équivalences faibles (les problèmes ensemblistes disparaissent). Le cas qu'on a vu dans l'introduction en est un cas particulier (car si  $A$  est une catégorie de Grothendieck,  $KA$  admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes).

$(M, W)$  est un localisateur de Quillen s'il existe une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de  $W$ .

Autre cas particulier:  $\text{Hot}$  est le prédérivateur associé au localisateur de Quillen  $(\text{Top}, W_{\text{Top}})$ .

On fixe un prédérivateur  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Dica}$ .

Proposition 1:

Si  $(u, v)$  est un couple de foncteurs adjoints si  $uv \xrightarrow{\varepsilon} 1, 1 \xrightarrow{\eta} vu$  sont les morphismes d'adjonction (dans  $\text{Dica}$ ), alors  $(u^*, v^*)$  est un couple de foncteurs adjoints et  $u^*v^* \xrightarrow{\eta^*} 1, 1 \xrightarrow{\varepsilon^*} v^*u^*$  sont les morphismes d'adjonction.

Corollaire:

Si  $(u, v)$  est un couple de foncteurs adjoints dans  $\text{Dia}$ , et si  $u$  (resp.  $v$ ) est pleinement fidèle, alors  $v^*$  (resp.  $u^*$ ) est pleinement fidèle.

Définition:

$I \xrightarrow{u} J$  une flèche de  $\text{Dia}$ .

$u$  est une  $\mathbb{D}$ -équivalence si  $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$  induit un foncteur pleinement fidèle sur la sous-catégorie pleine de  $\mathbb{D}(J)$  formée des coefficients constants, i.e.  $\forall M, N \in \text{ob } \mathbb{D}(e)$

$\text{Hom}_{\mathbb{D}(J)}(p_J^* M, p_J^* N) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}_{\mathbb{D}(I)}(p_I^* M, p_I^* N)$   
est une bijection.

Notation:  $W_{\mathbb{D}}$  est la classe des flèches de  $\text{Dia}$  qui sont des  $\mathbb{D}$ -équivalences.

Un objet  $I$  de  $\text{Dia}$  est  $\mathbb{D}$ -asphérique si  $I \xrightarrow{p_I} e \in W_{\mathbb{D}}$ .

Exemple:

Si  $\mathbb{D} = \text{HOT}$  sur  $\text{Cat}$ ,  $W_{\mathbb{D}}$  est la classe des équivalences faibles ordinaires.

Proposition 2:

Le localisateur  $(\text{Dia}, W_{\mathbb{D}})$  est fortement saturé.

On rappelle que  $(\mathcal{M}, W)$  est fortement saturé si en notant

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}[W^{-1}]$$

le foncteur de localisation, et si  $u \in \text{FEM}$ ,  $u \in W$  si et seulement si  $\gamma(u)$  est un isomorphisme.

Démonstration:

$I_0 \xrightarrow{u_0} J_0$  dans  $\text{Dia}$  tel que  $\gamma_{\Delta}(u_0)$  est un isomorphisme  
 à  $\text{Dia} \xrightarrow{\gamma_{\Delta}} \text{Dia}[W_{\Delta}^{-1}]$  est le foncteur de localisation.

Pour  $M, N \in \text{ob } \mathcal{B}(k)$ , on note

$$\phi_{M,N} : \text{Dia} \rightarrow \text{Eus}^{\circ}$$

$$I \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{B}(I)}(P_I^*M, P_I^*N)$$

$\phi_{M,N}$  transforme les  $\mathbb{D}$ -équivalences en bijection et donc on a:

$$\begin{array}{ccc} \text{Dia} & \xrightarrow{\phi_{M,N}} & \text{Eus}^{\circ} \\ \gamma_{\Delta} \downarrow & & \nearrow \overline{\phi_{M,N}} \\ \text{Dia}[W_{\Delta}^{-1}] & & \end{array}$$

On a  $\overline{\phi_{M,N}}(u_0) = \phi_{M,N} \gamma_{\Delta}(u_0)$  et donc  $\overline{\phi_{M,N}}(u_0)$  est une bijection  $\forall M, N \in \text{ob } \mathcal{B}(k)$ , i.e.  $u_0 \in W_{\Delta}$ .

Corollaire:

Le localisateur  $(\text{Dia}, W_{\Delta})$  est faiblement saturé.

On rappelle qu'un localisateur  $(\mathcal{M}, W)$  est faiblement saturé si

a)  $W$  contient les identités

b)  $W$  satisfait l'axiome du 2 sur 3

c)  $X' \xleftarrow{r} X$  dans  $\mathcal{M}$  avec  $r_i = 1_{X'}$ ,  $ir \in W \Rightarrow r \in W$   
 (et donc  $i \in W$ ).

Remarque:  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{Dia}$  est  $\mathbb{D}$ -sphérique si et seulement si  $\mathbb{D}(e) \xrightarrow{P_{\mathcal{I}}^*} \mathbb{D}(\mathcal{I})$  est pleinement fidèle.

Proposition 3:

Si  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{Dia}$  a un objet final (ou initial), alors  $\mathcal{I}$  est  $\mathbb{D}$ -sphérique.

Démonstration:

Soit  $e_{\mathcal{I}}$  un objet final de  $\mathcal{I}$ . On a  $\mathcal{I} \xrightarrow{P_{\mathcal{I}}} e$  et on définit  $e \xrightarrow{S} \mathcal{I}$ ,  $* \mapsto e_{\mathcal{I}}$ . Alors  $(S, P_{\mathcal{I}})$  est un couple de foncteurs adjoints et  $S$  est pleinement fidèle. Le corollaire de la proposition 1 montre que  $P_{\mathcal{I}}^*$  est pleinement fidèle.

Remarque:

Si  $\mathcal{I}$  admet un objet final ou initial,  $\forall \mathcal{J}$  dans  $\mathcal{Dia}$ , la projection  $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{P} \mathcal{J}$  induit un foncteur pleinement fidèle  $\mathbb{D}(\mathcal{J}) \xrightarrow{P^*} \mathbb{D}(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ . En particulier,  $p \in W_{\mathbb{D}}$ .

Rappel:

$A \xrightarrow[u_1]{u_0} B$  dans  $\mathcal{Cat}$ ,  $u_0$  et  $u_1$  sont homotopes s'ils sont dans la même composante connexe de  $\underline{\text{Hom}}(A, B)$ .

Cette relation est la relation d'équivalence engendrée par la relation: " $\exists \Delta_1 \times A \xrightarrow{h} B$  à  $\Delta_1 = \{0 \rightarrow 1\}$

tel que  $u_{\varepsilon} = h \circ i_{\varepsilon}$  pour  $\varepsilon = 0, 1$  à  $A \xrightarrow{g} \Delta_1 \times A$   
 $a \mapsto (\varepsilon, a)$

$A \xrightarrow{f} B$  est un homotopisme si  $\exists B \xrightarrow{g} A$  tel que  $fg$  est homotope à  $1_B$  et  $gf$  est homotope à  $1_A$ .

$A$  est contractile si  $A \rightarrow e$  est un homotopisme.

Lemme d'homotopie :

Soient  $A \xrightarrow[u_1]{u_0} B$  des foncteurs homotopes dans  $\text{Dia}$ .

Alors  $u_0 \in W_{\mathbb{D}} \Leftrightarrow u_1 \in W_{\mathbb{D}}$ .

Démonstration :

On peut supposer que  $\exists \Delta_1 \times A \xrightarrow{h} B$  tel que  $h \circ i_{\varepsilon} = u_{\varepsilon}$ .

On a  $\Delta_1 \times A \xrightarrow{p} A \in W_{\mathbb{D}}$ . Donc  $p \circ i_{\varepsilon} = 1 \Rightarrow i_{\varepsilon} \in W_{\mathbb{D}}$ .

Alors  $u_{\varepsilon} \in W_{\mathbb{D}} \Leftrightarrow h \in W_{\mathbb{D}} \Rightarrow$  le lemme.

Proposition 4 :

Un objet contractile de  $\text{Dia}$  est  $\mathbb{D}$ -asphérique.

Démonstration :

$A$  dans  $\text{Dia}$  contractile.

Donc  $\exists e \xrightarrow{s} A$  tel que  $sp_A$  soit homotope à  $1_A$ .

On a ainsi  $sp_A \in W_{\mathbb{D}}$  et comme  $p_A s = 1_e$  on a  $p_A \in W_{\mathbb{D}}$  (saturation faible).

#### 4. Dérivateurs.

On dit qu'un pré-dérivateur  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Dia}$  est un dérivateur faible à gauche s'il satisfait aux quatre axiomes suivants :

- Der 1) a)  $\forall I, J$  dans  $\text{Dia}$ , en notant  $I \xrightarrow{\alpha} I \amalg J \xleftarrow{\beta} J$   
 les morphismes canoniques,  $\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(\alpha^*, \beta^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$   
 est une équivalence de catégories.
- b)  $\mathbb{D}(e)$  est la catégorie ponctuelle.

Der 2)  $\forall A$  dans  $\mathcal{D}ia$ , la famille de foncteurs

$$\left( \text{ID}(A) \xrightarrow{i_{A,a}^*} \text{ID}(e) \right)_{a \in \text{ob} A}$$

induit par les  $e \xrightarrow{i_{A,a}} A, * \mapsto a$

est conservative.

Terminologie: si  $F$  est un objet de  $\text{ID}(A)$ , on note  $F_a = i_{A,a}^* F$ .

On dit que  $F_a$  est la fibre de  $F$  en  $a$ .

Si  $F \xrightarrow{\varphi} F'$  est une flèche de  $\text{ID}(A)$ , on note  $\varphi_a = i_{A,a}^* \varphi$ , et

$F_a \xrightarrow{\varphi_a} F'_a$  est appelé le morphisme induit dans les fibres en  $a$ .

Der 2 se traduit alors comme suit: tout morphisme de  $\text{ID}(A)$

induisent un isomorphisme dans les fibres en  $a$ ,  $\forall a \in \text{ob} A$ ,

est un isomorphisme.

Der 3 g)  $\forall A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{D}ia$ , le foncteur  $\text{ID}(B) \xrightarrow{u^*} \text{ID}(A)$

admet un adjoint à droite  $\text{ID}(A) \xrightarrow{u_*} \text{ID}(B)$ .

On dit que  $u_*$  est le foncteur image directe cohomologique.

Si  $F$  est un coefficient de type  $\text{ID}$  sur  $A$ , on dit que  $u_* F$

est la cohomologie relative de  $A$  sur  $B$  (par  $u$ ) à coefficients

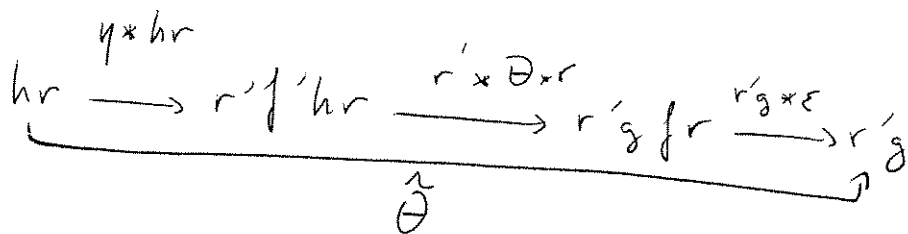
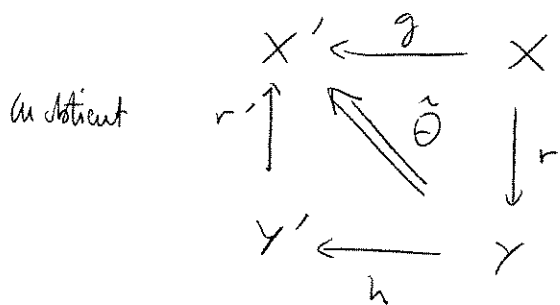
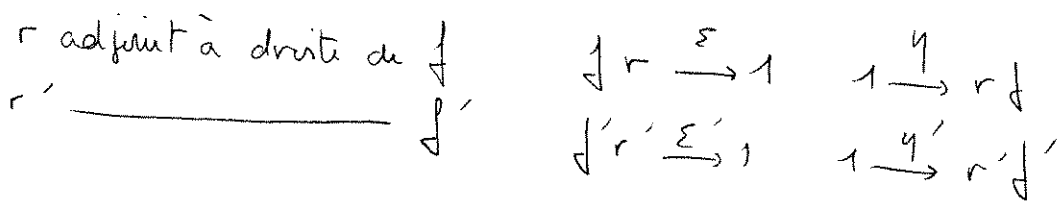
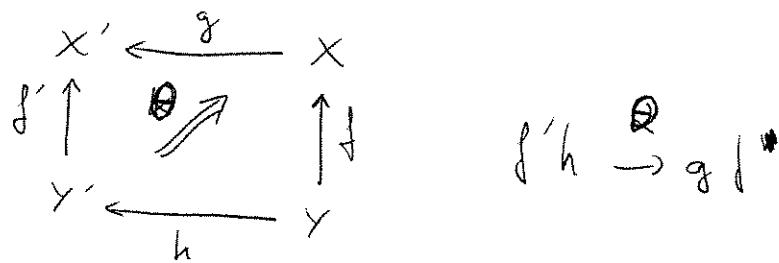
dans  $F$ .

Notation:

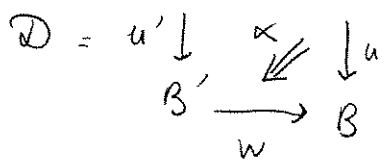
Pour  $F \in \text{ob} \text{ID}(A)$ ,  $H_{\text{ID}}^*(A, F) := P_A^*(F) := \text{holim}_A^* F$ .

Si  $M \in \text{ob} \text{ID}(A)$ , on note  $H_{\text{ID}}^*(A, M) = P_{A,*}^* P_A^* M$

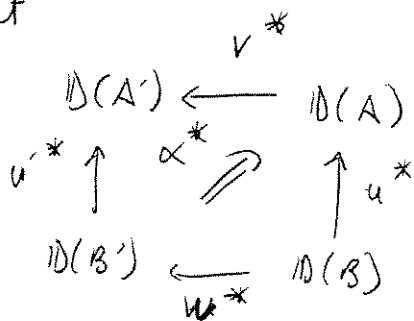
On considère un 2-diagramme dans Cat



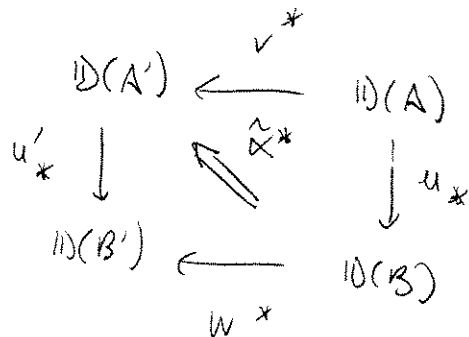
Si on a  $A' \xrightarrow{v} A$  dans  $\mathcal{B}$



on obtient



d'au



$w^* u_* \xrightarrow{\tilde{\alpha}^*} u'_* v^*$  est le morphisme de changement de base pour les images directes relatives à  $\mathcal{D}$ . On note  $\tilde{\alpha}^* = c_{\mathcal{D}}$ .

On se donne  $A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  et  $b \in \text{ob } B$ , d'un

$$\begin{array}{ccc}
 A/b & \xrightarrow{j_{u,b}} & A \\
 P_{A/b} \downarrow & \alpha := \alpha_{u,b} \swarrow & \downarrow u \\
 e & \xrightarrow{\quad} & B \\
 & i_{B,b} & 
 \end{array} = \mathcal{D}_{u,b}$$

$\alpha$  est défini par  $\alpha_j(a, \beta) = u(a) \xrightarrow{\beta} b$ .

Der 4 g) Le morphisme de changement de base

$$i_{B,b}^* u_* \xrightarrow{c_{\mathcal{D}_{u,b}}} P_{A/b}^* j_{u,b}^* \text{ est un}$$

isomorphisme.

Autrement-dit pour  $F \in \text{ob } \mathcal{D}(A)$ ,  $b \in \text{ob } B$ , on a

$$(u_* F)_b \simeq 1_{\mathbb{1}_b}^* (P_{A/b}^* j_{u,b}^* F)$$

Dira sous-2-catégorie de Cat satisfaisant à toutes les conditions de stabilité pertinentes.  
 On prédétermine un 2-foncteur  $\text{Dira} \xrightarrow{\mathbb{D}} \text{CAT}$ .

$\mathbb{D}$  est un dérivateur faible à gauche si

Der 1 a)  $\mathbb{D}(I \amalg J) \rightarrow \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$  est une équivalence de catégories

b)  $\mathbb{D}(A) = e$

Der 2 A dans Dir a  $\varphi \in \text{Fl } \mathbb{D}(A)$ ,  $\forall a \in \text{ob } A \varphi_a \text{ iso} \Leftrightarrow \varphi \text{ iso}$   
 où  $\varphi_a = i_{A,a}^* \varphi$  avec  $e \xrightarrow{i_{A,a}} A, * \mapsto a$ .

Der 3  $\forall A \xrightarrow{u} B \in \text{Dir a}$   $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$  admet un adjoint à droite  
 noté  $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$

Der 4  $A \xrightarrow{u} B$  dans Dir a,  $b \in \text{ob } B$

$$\begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{j_{u,b}} & A \\ P_{A/b} \downarrow & \swarrow \kappa & \downarrow u \\ e & \xrightarrow{i_{B,b}} & B \end{array}$$

induit un isomorphisme  $c_{u,b} : i_{B,b}^* u_* \xrightarrow{\sim} P_{A/b} \kappa^* j_{u,b}^*$

$$\begin{aligned} i.e. (u_* F)_b &\Rightarrow H^*(A/b, j_{u,b}^* F) = H^*(A/b, F|_{A/b}) \\ &= \varprojlim_{A/b} F|_{A/b} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie <sup>admettant</sup> des petites limites projectives.

On pose  $\mathbb{D}(I) = \underline{\text{Hom}}(I^o, \mathcal{M})$ .

Pour  $I \xrightarrow{u} J$   $u^* = \underline{\text{Hom}}(u^o, \mathcal{M}) : \mathbb{D}(J) \rightarrow \mathbb{D}(I)$ .

$$\text{Pour } I \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \kappa \\ \xrightarrow{v} \end{array} J \text{ on a } \mathbb{D}(J) \begin{array}{c} \xrightarrow{u^*} \\ \uparrow \kappa^* \\ \xrightarrow{v^*} \end{array} \mathbb{D}(I)$$

où pour  $J^o \xrightarrow{F} \mathcal{M}$ ,  $i \in \text{ob } I$   $\kappa^*(F)(i) = F(\kappa_i)$

On a  $\mathbb{D}(e) = \mathcal{M}$ .

Der 1 et Der 2 sont immédiats si  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ .

Der 3g: cas particulier:  $A \xrightarrow{P_A} e$  induit  $M \xrightarrow{P_A^*} \underline{\text{Hom}}(A^0, M) = \mathbb{D}(A)$

On pose  $P_{A^*} = \lim_{\leftarrow A^0}$ .

Soit  $A \xrightarrow{u} B$  un morphisme de Cat. On a

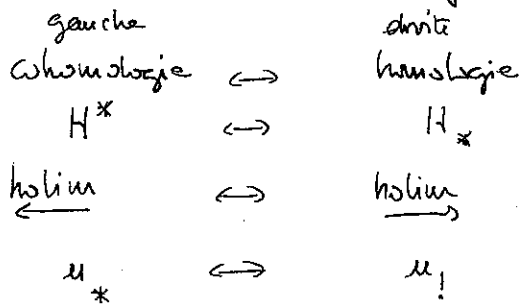
$$\mathbb{D}(B) = \underline{\text{Hom}}(B^0, M) \xrightarrow{u^*} \underline{\text{Hom}}(A^0, M) = \mathbb{D}(A).$$

$u^*$  admet un adjoint à droite  $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$  défini par

$$(u_* F)_b = \lim_{\leftarrow A_b^0} F|_{A_b^0} \text{ pour } F \in \text{ob } \mathbb{D}(A) \text{ et } b \in \text{ob } B.$$

On a aussi Der 4g.

On peut définir la notion duale de dérivateur faible à droite avec la terminologie



Un dérivateur est un pré-dérivateur  $\mathbb{D}$  qui est un dérivateur faible à gauche et à droite.

On fixe un pré-dérivateur  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Dia}$ .

**Proposition 1**

- a) Si  $\mathbb{D}$  satisfait Der 1 a) et Der 3g alors les catégories  $\mathbb{D}(A)$  admettent des produits binaires
- b) Si  $\mathbb{D}$  satisfait Der 1 b) et Der 3g alors les  $\mathbb{D}(A)$  admettent des objets finaux

Démonstration:

a) Il faut montrer que la diagonale  $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{D}(A)}} \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(A)$  admet un adjoint à droite. Or on a une codiagonale  $A \amalg A \xrightarrow{\nabla_A} A$   $\nabla_A = (1_A, 1_A)$

$$d'où \quad \mathbb{D}(A) \xrightarrow{\nabla_A^*} \mathbb{D}(A \amalg A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(A).$$

$\searrow \quad \nearrow$   
 $\Delta_{\mathbb{D}(A)}$

b)  $\mathcal{D}(A) \rightarrow e$  admet un adjoint à droite car c'est  $\alpha^*$  in  $\mathcal{B} \rightarrow A$ .

On définit un foncteur  $\mathcal{D}(A) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{D}(e))$ :

On a  $A \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(e, A)$  d'un

$$A^\circ \rightarrow (\underline{\text{Hom}}(e, A))^\circ \xrightarrow{\text{ID}} \underline{\text{Hom}}(\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(e))$$

$$A^\circ \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(e)) \Leftrightarrow A^\circ \times \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(e)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}(A) \xrightarrow{\text{diag}} \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{D}(e))$$

Si on a  $A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{B}$ , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(B) & \xrightarrow{\text{diag}_B} & \underline{\text{Hom}}(B^\circ, \mathcal{D}(e)) \\ u^* \downarrow & & \downarrow \underline{\text{Hom}}(u^\circ, 1_{\mathcal{D}(e)}) \\ \mathcal{D}(A) & \xrightarrow{\text{diag}_A} & \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{D}(e)). \end{array}$$

En particulier pour  $e \xrightarrow{i_{A,a}} A$  ( $a \in \text{ob } A$ ) on obtient

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(A) & \xrightarrow{\text{diag}_A} & \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{D}(e)) \\ i_{A,a}^* \downarrow & & \downarrow \underline{\text{Hom}}(i_{A,a}^\circ, 1_{\mathcal{D}(e)}) \\ \mathcal{D}(e) & \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} & \underline{\text{Hom}}(e, \mathcal{D}(e)) \end{array}$$

Donc pour  $F \in \text{ob } \mathcal{D}(A)$ ,  $\text{diag}_A(F)(a) = F_a$ .

Si  $a \xrightarrow{u} a' \in \text{FE } A \rightsquigarrow i_{A,a} \xrightarrow{u} i_{A,a'} \rightsquigarrow F_{a'} \xrightarrow{u^*} F_a$ .

Proposition 2:

L'axiome  $\text{Der } 2$  équivaut à demander que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{B}$  les foncteurs  $\text{diag}_A$  sont conservatifs.

Soit  $\mathcal{D}$  un préderivateur satisfaisant Der 3g.

On se donne  $A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{B}$  et  $F \in \text{Ob } \mathcal{D}(B)$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{On veut définir} & H^*(B, F) & \longrightarrow & H^*(A, u^*F) \\ & \parallel & & \parallel \\ & P_{B*} F & & P_{A*} u^*F \end{array}$$

Comme  $P_B u = P_A$  on a  $P_{A*} = P_{B*} u_*$  et  $F \rightarrow u_* u^*F$  induit un isomorphisme.

Si  $M \in \text{Ob } \mathcal{D}(e)$  on obtient  $H^*(B, M) \longrightarrow H^*(A, M)$

$$\begin{array}{ccc} P_{B*} P_B^* M & H^*(B, P_B^* M) & \longrightarrow & H^*(A, P_A^* M) = P_{A*} P_A^* M \\ & \parallel & & \parallel \\ & & \searrow & H^*(A, u^* P_B^* M) \end{array}$$

Proposition 3:

On suppose que  $\mathcal{D}$  satisfait Der 3g. Les assertions suivantes sont équivalentes pour  $A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{B}$ :

- (a)  $u$  est une  $\mathcal{D}$ -équivalence
- (b)  $P_{B*} P_B^* \rightarrow P_{A*} P_A^*$  est un iso
- (c) pour tout coefficient constant  $F$  sur  $B$ ,  $H^*(B, F) \rightarrow H^*(A, u^*F)$

est un isomorphisme.

- (d)  $\forall M \in \text{Ob } \mathcal{D}(e)$   $H^*(B, M) \rightarrow H^*(A, M)$  est un iso.

Démonstration:

(b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d) est tautologique.

$u$  est une  $\mathcal{D}$ -équivalence si et seulement si  $\forall M, N \in \text{Ob } \mathcal{D}(e)$

$\text{Hom}(P_B^* M, P_B^* N) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}(P_A^* M, P_A^* N)$  est une bijection

Or  $\text{Hom}(P_B^* M, P_B^* N) = \text{Hom}(M, P_{B*} P_B^* N)$

et  $\text{Hom}(P_A^* M, P_A^* N) = \text{Hom}(M, P_{A*} P_A^* N)$

d'où (a)  $\Leftrightarrow$  (b).

Lemme

On suppose Ser 3g

$$\begin{array}{ccccc}
 A'' & \xrightarrow{v'} & A' & \xrightarrow{v} & A \\
 u'' \downarrow & \swarrow \alpha' & \downarrow u' & \swarrow \alpha & \downarrow u \\
 B'' & \xrightarrow{w'} & B' & \xrightarrow{w} & B \\
 & \mathcal{D}' & & \mathcal{D} & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A'' & \xrightarrow{v''=vv'} & A \\
 u'' \downarrow & \swarrow \alpha'' & \downarrow u \\
 B'' & \xrightarrow{w''=ww'} & B \\
 & \mathcal{D} \circ \mathcal{D}' & 
 \end{array}$$

en  $\alpha'' = (w \times \alpha')(\alpha * v')$

$$\begin{array}{ccc}
 (ww')^* u_* & \xrightarrow{c_{\mathcal{D} \circ \mathcal{D}'}} & u'_* (vv')^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 w'^* w^* u_* & & u'_* v'^* v_* \\
 \swarrow & & \searrow \\
 w'^* c_{\mathcal{D}} & & c_{\mathcal{D}'} * v_* \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & w'^* u'_* v_* & 
 \end{array}$$

i.e  $c_{\mathcal{D} \circ \mathcal{D}'} = (c_{\mathcal{D}'} * v^*)(w'^* c_{\mathcal{D}})$ .

On dit que  $\mathcal{D}$  satisfait au théorème de changement de base (categorical) si  $c_{\mathcal{D}}$  est un isomorphisme.

Lemme (sur Ser 3g avec les notations ci-dessus).

Si  $\mathcal{D} \circ \mathcal{D}'$  satisfait le théorème de changement de base, il en est de même de  $\mathcal{D}$ .

Lemme (sur Ser 3g)

$A \xrightarrow{u} B$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ . On suppose que  $B$  admet un objet final  $b$ .

$$A = A/b \xrightarrow{j_{u,b}} A$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_{u,b} & \downarrow & \downarrow u \\
 & \swarrow \alpha_{u,b} & \\
 e & \longrightarrow & B \\
 & i_{B,b} & 
 \end{array}$$

Alors  $\mathcal{D}_{u,b}$  satisfait au théorème de changement de base.

Proposition 4 (sur Der 2 et Der 3 g).

Les assertions suivantes sont équivalentes:

a)  $D$  satisfait à Der 4 g (i.e.  $\forall A \xrightarrow{u} B, \forall b \in \text{ob } B, D_{u,b}$  satisfait au théorème de changement de base)

b)  $\forall A \xrightarrow{u} B$  dans  $\text{Dia}$   $\forall b \in \text{ob } B$

$$A/b \rightarrow A$$

$$\downarrow \cong \downarrow^u = D_{u,b}^c$$

$$B/b \rightarrow B$$

$D_{u,b}^c$  satisfait au théorème de changement de base.

Démonstration:

$A \xrightarrow{u} B$  dans  $\text{Dia}$   $b \in \text{ob } B$   $(b', b' \xrightarrow{y} b) \in \text{ob } B/b$

$$A/b' = (A/b)/(b', y) \xrightarrow{j_{u/b, (b', y)}} A/b \xrightarrow{j_{u,b}} A$$

$$P_{A/b'} \quad \downarrow \alpha = \kappa_{u/b, (b', y)} \quad \downarrow^{u/b} \cong \quad \downarrow^b$$

$$e \longrightarrow B/b \longrightarrow B$$

$$i_{B/b, (b', y)} \quad j_{u/b, b}$$

$$D_{u/b, (b', y)} \quad D_{u,b}^c$$

$$\text{ou a} \quad D_{u,b}^c \circ D_{u/b, (b', y)} = D_{u,b'}$$

b)  $\Rightarrow$  a) on prend  $b' = b, y = 1_b$  et le lemme précédent car  $B/b$  a pour objet final  $(b, 1_b)$ .

$$a) \Rightarrow b) \quad \text{ou a} \quad c_{u,b'} = \left( c_{u/b, (b', y)} * j_{u,b} \right) \left( i_{B/b, (b', y)} * c_{D_{u,b}^c} \right)$$

$$\Rightarrow i_{B/b, (b', y)} * c_{D_{u,b}^c} \text{ iso et ce } \forall (b', y) \in \text{ob } B/b.$$

$$\text{Der 2} \Rightarrow c_{D_{u,b}^c} \text{ iso}$$

$$W \subset \text{FR Dia}$$

Definition:

$A \xrightarrow{u} B$  dans Dia est  $W$ -asphérique si  $\forall b \in \text{ob } B \quad A/b \xrightarrow{u/b} B/b \in W$ .  
 On dit que  $u$  est  $W$ -coasphérique si  $u^\circ$  est  $W$ -asphérique i.e si  
 $\forall b \in \text{ob } B \quad b|A \xrightarrow{b|u} b|B \in W$ .

$W_\Delta = \text{ID-équivalences}$ .

$A \xrightarrow{u} B$  est ID-asphérique (resp. ID-coasphérique) si  $u$  est  $W_\Delta$ -asphérique (resp.  $W_\Delta$ -coasphérique).

Dans la suite, on suppose que ID satisfait Der2, Der3<sub>g</sub> et Der4<sub>g</sub>.

Proposition 5:

$A \xrightarrow{u} B$  dans Dia. Les conditions suivantes sont équivalentes

- a)  $u$  est ID-asphérique
- b)  $\forall b \in \text{ob } B \quad A/b$  est ID-asphérique
- c)  $P_B^* \xrightarrow{u_*} P_A^*$  est un isomorphisme.

Démonstration:

(a)  $\Leftrightarrow$  (b) clair.

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) Der2 donne (c)  $\Leftrightarrow \forall b \in \text{ob } B$

$$\begin{array}{ccc}
 i_{B,b}^* P_B^* & \xrightarrow{\quad} & i_{B,b}^* u_* P_A^* \\
 \parallel & & \parallel \text{Der } 3_g \\
 1_{B(b)} & & P_{A/b}^* \downarrow u_{*,b} P_A^* \\
 & & \parallel \\
 & & P_{A/b}^* \times P_{A/b}^*
 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \forall b \in \text{ob } B \quad P_{A/b}^*$  pleinement fidèle

$\Leftrightarrow$  (b).

Proposition

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \downarrow & \xrightarrow{2} & \downarrow w \\ & C & \end{array} \text{ dans Dia - Équivalences:}$$

a)  $\forall c \in \text{ob } C \quad A/c \xrightarrow{u/c} B/c$  D-équivalence

b)  $W_* P_B^* \rightarrow V_* P_A^*$  est un isomorphisme

Corollaire:

Si  $\text{Dia} = \text{Cat}$  alors  $W_D$  est un localisateur fondamental fort.

Définition:

~~$W \in \text{Cat}$  est un~~

Un localisateur fondamental fort est un localisateur  $(\text{Cat}, W)$  tel que

a)  $(\text{Cat}, W)$  est faiblement saturé

b)  $\forall A \in \text{ob } \text{Cat}$  avec objet final  $A \rightarrow e \in W$

c)  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \downarrow & \xrightarrow{2} & \downarrow w \\ & C & \end{array} \text{ dans Cat} \quad \forall c \in \text{ob } C \quad u/c \in W$   
 $\Rightarrow u \in W$

Démonstration:

Il reste à voir c) ce qui résulte de la proposition et du fait que  $(uv)_* = u_* v_*$ .

# Foncteurs propres ou lisses (Georges Mal'cev)

- Propriétés élémentaires des morphismes propres ou lisses
- Morphismes propres et dérivations

$W \subset FL \text{ Cat}$  localisateur fondamental

Proposition 1:

$X \xrightarrow{f} Y \in FL(\text{Cat})$ . Conditions équivalentes

a)  $\forall y \in \text{ob } Y \quad X_y \rightarrow X/y, x \mapsto (x, f(x) \xrightarrow{1_y} y)$   
est coasphérique

b)  $\forall x \in \text{ob } X \quad x \setminus X \rightarrow y \setminus X, y = f(x)$   
est à fibres asphériques

c)  $\forall u_0: y_0 \rightarrow y_1 \in FL(Y), \forall x_0 \in \text{ob}(X)$ , si  $X(x_0, u_0)$  désigne la catégorie dont les objets sont les couples  $(x, u: x_0 \rightarrow x)$  tels que  $f(u) = u_0$  ( $\Leftrightarrow f(x) = y_0$ ) et dont les flèches  $(x, u) \xrightarrow{v} (x', u')$  sont les  $v: x \rightarrow x'$  tels que  $f(v) = 1_{y_0}$  et  $vu = u'$ ,  $X(x_0, u_0)$  est asphérique.

d)  $\forall \Delta_1 \rightarrow X$  (où  $\Delta_1 = \{0 \rightarrow 1\}$ )

$$X' = \Delta_1 \times_X X \rightarrow X$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 & \rightarrow & Y \end{array}$$

$X'_1 \hookrightarrow X$  est coasphérique.

Démonstration:

(a)  $\Leftrightarrow$  (c) si  $(x, f(x) \xrightarrow{u} y) \in \text{ob}(X/Y)$  ou a

$$(x, u) \setminus X_y \cong X(x, u).$$

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) si ~~si~~  $(y', y \xrightarrow{u} y') \in \text{ob}(Y \setminus Y)$ ,  $x \in \text{ob} X_y$

$$(x \setminus X)_{(y', u)} \cong X(x, u)$$

(d)  $\Leftrightarrow$  (c)  $X'_1 \xrightarrow{i} X'$  coasphérique  $\Leftrightarrow \forall x' \in \text{ob} X'$   $x' \setminus X'_1$  asphérique

mais si  $x' \in \text{ob} X'_1$ ,  $x' \setminus X'_1$  admet un objet initial et

donc est asphérique. Donc  $X'_1 \xrightarrow{i} X'$  est coasphérique

si et seulement si  $\forall x' \in \text{ob} X'_1$ ,  $x' \setminus X'_1$  est asphérique.

Or la donnée  $u_0: y_0 \rightarrow y$ ,  $\in \text{FE } Y$  équivaut à la

donnée de  $\Delta_1 \rightarrow Y$  et  $X'_0 = X_{y_0}$ . Pour  $x \in \text{ob} X_{y_0}$

$$x \setminus X'_1 = X(x, u_0).$$

Définition:

On dit qu'une flèche  $X \xrightarrow{f} Y$  ~~est~~ de  $\text{Cat}$  est ~~est~~ propre si elle satisfait aux conditions de la proposition 1.

On dit que  $f$  est lisse si  $X^0 \xrightarrow{f^0} Y^0$  est propre

Remarque:

Comme  $W = W^0$  les résultats sur les propres induisent des résultats sur les lisses.

Exemple: toute précofibration est un foncteur propre. En particulier, toute immersion fermée est propre.

Remarque: l'image d'un foncteur propre est fermée (i.e un cocrible) lorsque  $W$  est non-trivial i.e  $\neq \text{FE}(\text{Cat})$ .

Soit  $X \xrightarrow{f} Y$  un foncteur propre,  $x \in \cup_b X$  et  $f(x) \xrightarrow{u} y \in FLY$ .  
 $X(x, u)$  asphérique  $\Rightarrow X(x, u) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \xrightarrow{v} u' \in FE$   
 1.9  $f(v) = u$ .

### Proposition 2

Les morphismes propres sont stables par image inverse, i.e. pour tout carré cartésien dans  $\text{Cat}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$f$  propre  $\Rightarrow f'$  propre

Démonstration: La condition (d) de la prop. 1 est stable par image inverse.

### Proposition 3:

Un foncteur propre à fibres asphériques est universellement dans  $\mathcal{W}$ .

Démonstration: Les morphismes propres sont stables par images inverses, et la classe de fibres asphériques l'est aussi. Il suffit de montrer que tout morphisme propre à fibres asphériques est asphérique ce qui résulte de la prop. 1. (a).

Lemme

Si  $X \xrightarrow{f} Y$  est propre, alors  $\forall x \in \text{ob } X$ ,  $x \setminus X \rightarrow y \setminus X$   
 (où  $y = f(x)$ ) est un foncteur propre à fibres asphériques.  
 En particulier, il est universellement dans  $\mathcal{W}$ .

Démonstration:

Par la prop. 1 (b) il est à fibres asphériques.

Soit  $(x', x \xrightarrow{u} x')$  un objet de  $x \setminus X$ . Son image dans  $y \setminus X$   
 est  $(y' = f(x'), y \xrightarrow{v=f(u)} y')$ . Il faut montrer que

$(x', u) \setminus (x \setminus X) \rightarrow (y', v) \setminus (y \setminus X)$  est à fibres asphériques.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x' \setminus X & \longrightarrow & y' \setminus Y \end{array}$$

car  $x' \setminus X \rightarrow y' \setminus Y$  est à fibres asphériques par la prop. 1 (b)  
 car  $f$  est propre.

Proposition 4:

Le composé de deux morphismes propres est propre

Démonstration:

Soient  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  deux morphismes propres.

Soit  $x \in \text{ob } X$ . On pose  $y = f(x)$  et  $z = g(y)$ . On obtient

$$\begin{array}{ccccc} x' & \longrightarrow & x \setminus X & \longrightarrow & X \\ \downarrow \text{cart} & & \downarrow & & \downarrow f \\ y' & \longrightarrow & y \setminus Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow \text{cart.} & & \downarrow & & \downarrow g \\ e & \longrightarrow & z \setminus Z & \longrightarrow & Z \end{array}$$

$\forall e \rightarrow z \setminus Z$ ,  $g$  propre  $\Rightarrow Y' \text{ asphérique et } f \text{ propre} \Rightarrow x \setminus X \rightarrow y \setminus Y$   
 est universellement dans  $\mathcal{W}$  (Lemme et prop. 3)  $\Rightarrow X' \rightarrow Y' \in \mathcal{W}$ .

Si  $X$  est asphérique. Par la proposition 1(b),  $gf$  est propre.

Observation:

Si on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

et si  $x \in \text{ob} X$ ,  $y = f(x)$ , on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} x \setminus X' & \longrightarrow & x \setminus X \\ \downarrow & & \downarrow \\ y \setminus Y' & \longrightarrow & y \setminus Y \end{array}$$

Proposition 5

L'image réciproque d'un facteur coasphérique par un morphisme propre est coasphérique.

Démonstration:

Soit  $X' \xrightarrow{f} X$  un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} f' \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

avec  $f$  propre et  $h$  coasphérique. Soit  $x \in \text{ob} X$  et  $y = f(x)$ .

On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 x \setminus X' & \xrightarrow{x \setminus g} & x \setminus X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 y \setminus Y' & \xrightarrow[y \setminus h]{} & y \setminus Y
 \end{array}$$

On a  $y \setminus h \in W$  et les deux flèches verticales sont dans  $W$  et donc  $x \setminus g \in W$ .

Théorème 1:

Soit  $X \xrightarrow{f} Y \in \text{FE Cat}$ . On a l'équivalence

(a)  $f$  est propre

(b) pour tout diagramme de  $\text{Cat}$  formé de deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 Y'' & \xrightarrow{g'} & X' & \xrightarrow{g} & X \\
 f'' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Y'' & \xrightarrow{h'} & Y' & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

$h'$  coasphérique  $\Rightarrow g'$  coasphérique.

Démonstration:

(a)  $\Rightarrow$  (b)  $f$  propre  $\Rightarrow f'$  propre. On conclut par la proposition 5.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Soit  $y \in \text{ob } Y$ . On a deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 X_y & \longrightarrow & X/y & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 e & \longrightarrow & Y/y & \longrightarrow & Y \text{ et } (y, \iota_y) \text{ est coasphérique.}
 \end{array}$$

## Proposition 6

Si  $W$  est un localisateur fondamental fort, pour tout triangle commutatif dans  $\text{Cat}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ P \downarrow & & \swarrow q \\ & S & \end{array}$$

si  $p$  et  $q$  sont propres et si  $f$  induit une équivalence faible dans les fibres, alors  $f$  est une équivalence faible.

## 2. Morphismes propres et dérivateurs

On se fixe un dérivateur  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Cat}$ .

On note  $W = W_{\mathbb{D}}$  l'ensemble des  $\mathbb{D}$ -équivalences.  $W$  est un localisateur fondamental fort.

Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \downarrow & & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif de  $\text{Cat}$ ,  $u$  est asphérique (resp. coasphérique) au-dessus de  $C$  si  $\forall c \in \text{ob} C$ ,  $A/c \xrightarrow{u/c} B/c$  (resp.  $c \setminus A \xrightarrow{c \setminus u} c \setminus B$ ) est une  $\mathbb{D}$ -équivalence.

On a montré que  $u$  est asphérique au-dessus de  $C$  si et seulement si  $W_* P_B \xrightarrow{*} V_* P_A$  est un isomorphisme.

Cela équivaut à dire que  $P_{A!} V^* \rightarrow P_{B!} W^*$  est un isomorphisme.

Dualement (en passant à  $\mathbb{D}^0$ ) on voit que  $u$  est coasphérique si et seulement si  $P_{B*} W^* \rightarrow P_{A*} V^*$  est un isomorphisme.

En particulier  $A \xrightarrow{u} B$  est coasphérique si et seulement si  $P_{B*} \rightarrow P_{A*} u^*$  est un isomorphisme.

Lemme

Soit

$$\begin{array}{ccc}
 & & v \\
 & & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{\quad} & A \\
 u' \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow u \\
 B' & \xrightarrow{\quad} & B \\
 & & w
 \end{array}$$

un 2-carré ( $\alpha: uv \rightarrow wu'$ ).

Alors  $\mathbb{D}$  satisfait à la propriété de changement de base cohomologique (i.e.  $w^* u_* \rightarrow u'_* v^*$  est un isomorphisme) si et seulement si pour tout objet  $b'$  de  $B'$  si on pose  $b = w(b')$

$$\begin{array}{ccc}
 A'/b' & \longrightarrow & A/b \\
 \downarrow j_{u',b'} & \searrow & \swarrow \downarrow j_{u,b} \\
 & & A
 \end{array}$$

$A'/b' \rightarrow A/b$  est coasphérique au-dessus de  $A$ .

Démonstration: on a

$$\begin{array}{ccc}
 A'/b' & \xrightarrow{j_{u',b'}} & A' \\
 P_{A'/b'} \downarrow & \llcorner & \downarrow u' \\
 e & \xrightarrow{i_{B',b'}} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A/b & \xrightarrow{j_{u,b}} & A \\
 P_{A/b} \downarrow & \llcorner & \downarrow u \\
 e & \xrightarrow{i_{B,b}} & B
 \end{array}$$

$W^* u_* \xrightarrow{\sim} u'_* V^*$  est un isomorphisme si et seulement si  $\forall b' \in \text{ob } B'$

$$i_{B',b'}^* W^* u_* \xrightarrow{\sim} i_{B',b'}^* u'_* V^*$$

or  $i_{B',b'}^* W^* u_* = i_{B,b}^* u_* \xrightarrow{\sim} P_{A/b} \times j_{u,b}^*$

et  $i_{B',b'}^* u'_* V^* \xrightarrow{\sim} P_{A'/b'} \times j_{u',b'}^* V^* = P_{A'/b'} \times (V j_{u',b'})^*$

or  $P_{A/b} \times j_{u,b}^* \xrightarrow{\sim} P_{A'/b'} \times (V j_{u',b'})^*$  si et seulement si  $A'/b' \rightarrow A/b$  est coasphérique.

Proposition 7

Si  $A' \xrightarrow{v} A$  est un carré cartésien de Cat

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{v} & A \\
 u' \downarrow & & \downarrow u \\
 B' & \xrightarrow{w} & B
 \end{array}$$

et si  $u$  est propre, ~~il suffit~~  
 $\mathcal{D}$  satisfait la propriété de changement de base cohomologique

Démonstration:

En vertu du lemme, il suffit de montrer que  $\forall b' \in \text{ob } B'$   
 $b = w(b')$   $A'/b' \rightarrow A/b$  est coasphérique. Or on a

$$\begin{array}{ccc} A'_b & \xrightarrow{\text{iso}} & A_b \\ \text{coasphérique} \downarrow & & \downarrow \text{coasphérique} \\ A'/b' & \longrightarrow & A/b \end{array}$$

Théorème 2

Soit  $A \xrightarrow{u} B \in \text{FP}(\text{Cat})$ . On a l'équivalence:

- (a)  $u$  est propre  
 (b) pour tout diagramme  $\mathcal{D}$  formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{v'} & A' & \xrightarrow{v} & A \\ u'' \downarrow & \mathcal{D} & \downarrow u' & & \downarrow u \\ B'' & \xrightarrow{w'} & B' & \xrightarrow{w} & B \end{array}$$

$\mathcal{D}$  satisfait à la propriété de changement de base cohomologique i.e

$$w' \circ u' \circ u'' \xrightarrow{*} u'' \circ v' \circ v$$

est un isomorphisme.

Démonstration:

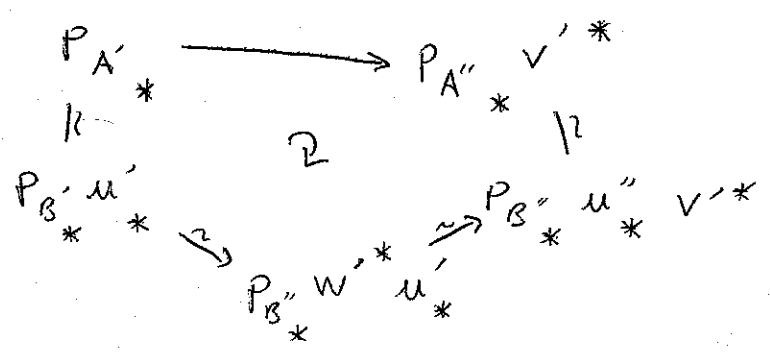
Prop 7  $\Rightarrow$  (a)  $\Rightarrow$  (b).

(b)  $\Rightarrow$  (a).

En vertu du théorème 1, il suffit de montrer  
 que  $w'$  coasphérique  $\Rightarrow v'$  coasphérique.

or  $w'$  coasphérique  $\Rightarrow P_{B'_*} \xrightarrow{\sim} P_{B''_*} W'^*$

on a



Homotopie "dans" un dérivé

G. Mal'nev, 3/05/01

Dérivé (faible) à droite  $\Rightarrow$  groupe de fondamental

$$\begin{array}{c} * \rightarrow X \\ \mathbb{D}(\Delta_1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{groupe } \pi_1 \end{array} \right.$$

Dérivé pointé Der 5, Der 6

$\Rightarrow$  structures triangulées non-additives (à la Quillen)

Dérivé Der 1 - Der 7  $\Rightarrow \forall I \mathbb{D}(I)$  est muni d'une structure de catégorie triangulée canonique.

A petite catégorie.

NA ensemble simplicial  $\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\Delta_n, A)$

$N: \text{Cat} \hookrightarrow \hat{\Delta}$  est pleinement fidèle.

L'image essentielle de  $N$  est décrite par une propriété d'exactitude à gauche.

Soit  $X$  un ensemble simplicial

$$\begin{array}{ccccc} m, n \in \mathbb{N} & & & & \\ \downarrow & \Delta_0 \xrightarrow{\quad} \Delta_m & & \downarrow & k \\ & \downarrow & \text{2} & \downarrow & \\ n & \Delta_n \xrightarrow{\quad} \Delta_{m+n} & \xrightarrow{\quad} & \downarrow & \\ & k \xrightarrow{\quad} k & & & \end{array} \text{ est cocartésien.}$$

$X$  est le nerf d'une catégorie si et seulement si les carrés

$$\begin{array}{ccc} X_{m+n} & \longrightarrow & X_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & X_0 \end{array} \text{ sont cartésiens.}$$

On pourrait donc définir une catégorie comme étant un ensemble simplicial satisfaisant cette propriété.

On définit  $\tilde{\Delta}$  la catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\tilde{\Delta}_n = \{0, \dots, n\}, \quad n \geq 0,$$

sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ens}$ .

On a une inclusion  $\Delta \hookrightarrow \tilde{\Delta}$ .

Proposition:

Soit  $A$  une petite catégorie. Alors  $A$  est un groupoïde si et seulement si  $\mathcal{N}A: \Delta^0 \rightarrow \mathbf{Ens}$  se prolonge en un foncteur  $\tilde{\Delta}^0 \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

Si  $M$  est une catégorie admettant des produits fibrés, on peut définir une notion d'objet catégorie de  $M$ , ou encore, ce qui revient au même, considérer les objets simpliciaux de  $M$  satisfaisant les conditions d'exactitude ci-dessus.

De même, on peut ainsi définir la notion d'objet groupoïde dans  $M$ , i.e. les foncteurs  $\tilde{\Delta}^0 \rightarrow M$  vérifiant la même condition d'exactitude.

Si  $\mathbb{D}$  est un foncteur, une catégorie de  $\mathbb{D}(e)$  (resp. un groupoïde dans  $\mathbb{D}(e)$ ) sera un objet de  $\mathbb{D}(\Delta)$  (resp. de  $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$ ) satisfaisant les propriétés d'exactitude comme ci-dessus mais en terme de carrés homotopiquement cartésiens.

- I - groupoides ordinaires
- II - groupoides dans une catégorie
- III - carrés homotopiquement cartésien
- IV - Groupoides homotopiques

$\Delta$  catégorie des simplexes

objets  $\Delta_m = \{0, \dots, m\}$ , ordonnés par l'ordre naturel,  $m \geq 0$

Fleches applications croissantes

$\delta_m^i : \Delta_{m-1} \rightarrow \Delta_m$   $0 \leq i \leq m$  est l'unique injection croissante dont l'image ne contient pas  $i$ .

$\sigma_m^i : \Delta_{m+1} \rightarrow \Delta_m$   $0 \leq i \leq m$  est l'unique surjection croissante qui prend deux fois la valeur  $i$ .

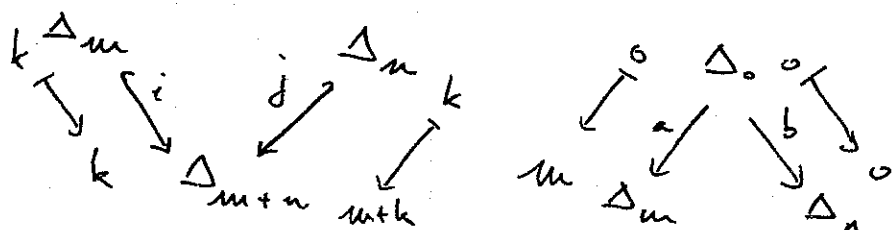
$\hat{\Delta} = \underline{\text{Hom}}(\Delta^0, \text{Ens})$

A petite catégorie  $NA : \Delta_m \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\Delta_m, A)$

$N : \text{Cat} \rightarrow \hat{\Delta}$

N est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des  $X \in \text{ob } \hat{\Delta}$  tels que:

$m, n \geq 1$



$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \xrightarrow{b} & \Delta_n \\
 a \downarrow & & \downarrow j \\
 \Delta_m & \xrightarrow{i} & \Delta_{m+n}
 \end{array}$$

est cocartésien de  $\Delta$ , i.e. un carré cartésien de  $\Delta^\circ$

$$\forall m, n \geq 1 \quad \begin{array}{ccc}
 X_{m+n} & \xrightarrow{X(i)} & X_n \\
 X(j) \downarrow & & \downarrow X(a) \\
 X_m & \xrightarrow{X(b)} & X_0
 \end{array}$$

est un carré cartésien.

Cette condition est équivalente à demander que pour  $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_i: \Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_m & 1 \leq i \leq m \\
 0 & \longmapsto & i-1 & \\
 1 & \longmapsto & 1 &
 \end{array}$$

$\forall m \geq 2$ , l'application

$$X_m \xrightarrow{(\alpha_m^*, \dots, \alpha_1^*)} \underbrace{X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \dots \times_{X_0} X_1}_{m \text{ fois}}$$

est une bijection.

(où  $X_1 \times_{X_0} X_1$  est le produit fibré de  $\begin{array}{ccc} X_1 & & X_1 \\ X(s_i) \searrow & & \swarrow X(s_i') \\ & X_0 & \end{array}$ )

En particulier,  $X_2 \xrightarrow[\sim]{(X(S_2^0), X(S_2^1))} X_1 \times_{X_0} X_1$  i.e.

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{X(S_2^1)} & X_1 \\
 \downarrow X(S_2^0) & & \downarrow X(S_1^0) \\
 X_1 & \xrightarrow{X(S_1^1)} & X_0
 \end{array} \text{ est cartésien.}$$

Si  $X \in \text{ob } \hat{\Delta}$  satisfait ces conditions d'exactitude, on définit une catégorie  $A$  par:

$$\text{Ob } A = X_0$$

$$\text{Fl } A = X_1$$

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{s = (X(S_1^1))} & X_0 \\
 & \xrightarrow{t = (X(S_1^0))} & \\
 & & \text{source} \\
 & & \text{but}
 \end{array}$$

$$X_0 \xrightarrow{X(S_0^0)} X_1 \text{ identité}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{\sim} & X_1 \times_{X_0} X_1 \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 X_1 & & 
 \end{array}$$

composition.

On note  $\tilde{\Delta}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}us$  dont les objets sont les ensembles  $\tilde{\Delta}_m = \{0, \dots, m\}$ ,  $m \geq 0$ .

On a une inclusion évidente  $\Delta \hookrightarrow \tilde{\Delta}$ .

On définit un plongement

$$\mathcal{E}us \hookrightarrow \mathcal{C}at$$

$E \mapsto$  le groupoïde simplement connexe d'ensemble d'objets  $E$  (abusivement noté encore  $E$ )

$$\text{i.e. } \text{Hom}_E(x, y) = \{*\} \quad \forall x, y \in E.$$

$$\text{Alors } \tilde{\Delta}_m = \Delta_m [\text{Fl}(\Delta_m)^{-1}] = \pi_1 \Delta_m.$$

Proposition:

Une petite catégorie  $A$  est un groupoïde si et seulement si le foncteur  $NA : \Delta^0 \rightarrow \mathcal{E}us$  se prolonge en un foncteur  $\tilde{\Delta}^0 \rightarrow \mathcal{E}us$ , et alors ce prolongement est unique.

Dém: Supposons que  $A$  soit un groupoïde, alors

$$\forall n \geq 0 \quad NA_n = \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, A) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(\tilde{\Delta}_n, A).$$

Réciproquement, supposons que  $NA$  se prolonge à  $\tilde{\Delta}$ , et choisissons un tel prolongement, de sorte que pour toute application  $\tilde{\Delta}_m \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Delta}_n$  on ait une application  $NA_n \xrightarrow{\varphi_*} NA_m$ , et ceci fonctoriellement. On note  $\tau$  la transposition  $(0, 1)$  de  $\{0, 1\}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on note  $\tau_i$  la transposition  $(i-1, i)$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

$$\alpha_i: \{0,1\} \longrightarrow \{0, \dots, n\} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$0 \longmapsto i-1$$

$$1 \longmapsto i$$

$$\beta_i: \{0,1\} \longrightarrow \{0, \dots, n\} \quad 1 < i \leq n$$

$$0 \longmapsto i-2$$

$$1 \longmapsto i$$

Soit  $a_0 \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} a_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n} a_n$  un  $n$ -simplexe de  $NA$ ,  
 note  $(g_n, \dots, g_1) \in NA_n$

On a alors  $\alpha_i^*(g_n, \dots, g_1) = g_i$

$$\beta_i^*(g_n, \dots, g_1) = g_i g_{i-1}$$

On a les relations  $\tau_i \alpha_j = \alpha_j$  si  $|j-i| \geq 2$ ,  $1 \leq i, j \leq n$

$$\tau_i \alpha_{i-1} = \beta_i \quad , \quad 1 < i \leq n$$

$$\tau_i \alpha_i = \alpha_i \tau \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\tau_i \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} \quad , \quad 1 \leq i < n$$

On en déduit que

$$\tau_1^*(g_n, \dots, g_1) = (g_n, \dots, g_3, g_2 g_1, \tau^* g_1)$$

$$\tau_i^*(g_n, \dots, g_1) = (g_n, \dots, g_{i+2}, g_{i+1} g_i, \tau^* g_i, g_i g_{i-1}, g_{i-2}, \dots, g_1)$$

$$\tau_n^*(g_n, \dots, g_1) = (\tau^* g_n, g_n g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_1)$$

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer l'unicité de  $\tau^*$ .

$$\text{Pour } n=2, \text{ on a } \tau_1^*(g_2 \cdot g_1) = (g_2 g_1, \tau^* g_1)$$

$$\tau_2^*(g_2 \cdot g_1) = (\tau^* g_2, g_2 g_1)$$

$$\text{et } \tau_1 \beta_1 = \alpha_2, \tau_2 \beta_2 = \alpha_1$$

$$\text{Cela implique que } g_2 g_1 \tau^*(g_1) = g_2 \quad (1)$$

$$\text{et } \tau^*(g_2) g_2 g_1 = g_1 \quad (2)$$

Pour  $g_2 = 1_{a_1}$ , l'égalité (1) donne  $g_1 \tau^*(g_1) = 1_{a_1}$ ,

et (2) donne  $\tau^*(g_2) g_2 = 1_{a_1}$  (si  $g_1 = 1_{a_1}$ ).

Cela prouve à la fois l'unicité de  $\tau^*$  et le fait que  $A$  est un groupoïde.

Pseudo-catégories.

Une pseudo-catégorie est la même chose qu'une catégorie, à ceci près qu'on ne demande pas l'existence d'identités. La notion de morphismes. On note  $ps\text{-Cat}$  la catégorie des petites pseudo-catégories. On a une inclusion fidèle (mais pas pleine)

$$\text{Cat} \hookrightarrow ps\text{-Cat}$$

Exemple: soit  $E$  un ensemble muni d'une relation transitive  $R$ . On définit une pseudo-catégorie par

$$\text{Ob} = E \text{ et } \text{Hom}(x, y) = \begin{cases} * & \text{si } x R y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple: On note  $\Delta'_n = \{0, 1, \dots, n\}$  l'ensemble à  $n+1$  éléments muni de la "relation d'ordre" strict  $<$ .

On note  $\Delta'$  la sous-catégorie pleine de  $\text{ps-Cat}$  formée des objets  $\Delta'_n$ ,  $n \geq 0$ . Les morphismes de  $\Delta'$  sont les applications strictement croissantes. On a un foncteur perf

$$N' : \text{ps-Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta'}$$

défini par  $N'_n A = \text{Hom}_{\text{ps-Cat}}(\Delta'_n, A)$ .

On vérifie que  $N'$  est pleinement fidèle et que son image essentielle est caractérisée par les mêmes conditions d'exactitudes que dans le cas des catégories.

On a une inclusion  $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ .

### Proposition

Une petite pseudo-catégorie  $A$  est une catégorie si et seulement si  $N'A : \Delta'^{\circ} \longrightarrow \text{Ens}$  se prolonge en un foncteur de  $\Delta^{\circ}$  vers  $\text{Ens}$ , et alors ce prolongement est unique (Exercice).

## II. Catégories et groupoïdes dans une catégorie.

Soit  $M$  une catégorie admettant des produits fibrés.

On définit une catégorie  $X$  de  $M$  (on dira aussi une  $M$ -catégorie) est la donnée de deux objets  $X_0$  et  $X_1$  de  $M$ , et de deux flèches

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_0$$

et  $X_0 \xrightarrow{y} X_1$ , ainsi que  $(X_1)_s \times_{X_0} (X_1)_t \xrightarrow{\mu} X_1$

de telle manière que pour tout objet  $T$  de  $M$ ,

$\text{Hom}_M(T, X_0)$ ,  $\text{Hom}_M(T, X_1)$ , etc... soit une catégorie, notée  $X(T)$

Par le lemme de Yoneda, cela équivaut aux formules suivantes:

$$s \eta = 1_{X_0} = t \gamma$$

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{pr_1} & X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{pr_2} & X_1 \\ \downarrow t & \circlearrowleft & \downarrow \mu & \circlearrowright & \downarrow s \\ X_0 & \xleftarrow{t} & X_1 & \xrightarrow{s} & X_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{1_{X_0} \times \mu} & X_1 \times_{X_0} X_1 \\ \downarrow \mu \times 1_{X_0} & \circlearrowright & \downarrow \mu \\ X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\mu} & X_1 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\gamma \times 1_{X_1}} & X_1 \times_{X_0} X_1 & \xleftarrow{1_{X_1} \times \gamma} & X_1 \times_{X_0} X_0 \\ \downarrow \mu & \circlearrowright & \downarrow \mu & \circlearrowleft & \downarrow \mu \\ X_1 & & X_1 & & X_1 \end{array}$$

On définit un foncteur nerf

$$N: \mathcal{M}\text{-Cat} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta^{\circ}, \mathcal{M})$$

défini par 
$$NX_n = \underbrace{X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1}_n$$

Si  $X$  est une  $\mathcal{M}$ -catégorie, et si  $T \in \text{ob } \mathcal{M}$ , on vérifie que  $NX(T) = (NX)(T)$ .

On en déduit par le yoga de Yoneda que le foncteur

$$N: \mathcal{M}\text{-Cat} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta^{\circ}, \mathcal{M})$$

est pleinement fidèle, et que son image est caractérisée par les propriétés d'exactitude habituelles.

On dit qu'une  $\mathcal{M}$ -catégorie  $X$  est un  $\mathcal{M}$ -groupoïde si pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{M}$ ,  $X(T)$  est un groupoïde. Par le lemme de Yoneda, cela équivaut encore à demander qu'il existe un morphisme  $S: X_1 \rightarrow X_1$  tel que  $sS = t$  et  $tS = s$

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1)_{s \times_{X_0}} (X_1) & \xrightarrow{1_{X_1} \times_{X_0} S} & (X_1)_{s \times_{X_0} t} (X_1) \\
 \Delta_s \uparrow & & \downarrow \mu \\
 X_1 & \xrightarrow{t} & X_0 \xrightarrow{q} X_1 \\
 & & \uparrow \eta \\
 X_1 & \xrightarrow{s} & X_0 \xrightarrow{q} X_1 \\
 \Delta_t \downarrow & & \uparrow \mu \\
 (X_1)_{t \times_{X_0}} (X_1) & \xrightarrow{S \times 1_{X_1}} & (X_1)_{s \times_{X_0} t} (X_1)
 \end{array}$$

La proposition caractérisant les groupoïdes en fonction de leurs  
 nœuds se généralise au cas des  $M$ -groupoïdes.

III-VI. On se fixe un préderivateur  $\mathbb{D}$  de domaine  $\mathcal{D}ia$

$$\mathbb{D}: \mathcal{D}ia^0 \longrightarrow \text{CAT}$$

Satisfaisant à Der 2, Der 3g, Der 4g

Der 2 Pour tout  $A$  dans  $\mathcal{D}ia$ ,  $a \in \text{ob} A$ ,  $i_{A,a}: e \longrightarrow A$   
 $* \longmapsto a$

La famille de foncteurs  $i_{A,a}^*: \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$ ,  $a \in \text{ob} A$   
 est conservative.

Variante: Pour toute famille de flèches de  $\mathcal{D}ia$

$$u_k: A_k \longrightarrow A$$

surjective sur les objets de  $A$ , la famille de foncteurs

$u_k^*: \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(A_k)$  est conservative.

Der 3g Pour toute flèche  $u: A \longrightarrow B$  de  $\mathcal{D}ia$ , le foncteur  
 $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$  admet un adjoint à droite  $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$ .

Der 4g pour toute flèche  $u: A \longrightarrow B$  de  $\mathcal{D}ia$ ,  $\forall b \in \text{ob} B$

$$A/b \xrightarrow{j_{A,b}} A$$

$$\begin{array}{ccc}
 P = PA/b & \downarrow & \leftarrow \downarrow u \\
 & e & \longrightarrow B \\
 & & \uparrow i_{B,b}
 \end{array}$$

$$i_{B,b}^* u_* \xrightarrow{\cong} P_* j_{A,b}^*$$

On note  $\square = \Delta_1^0 \times \Delta_1^0$

$\perp$  la sous-catégorie pleine de  $\square$  dont les objets sont  $(1,0), (1,1), (0,1)$ .

$i_{\perp} : \perp \rightarrow \square$  l'inclusion.

On dit qu'un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\square)$  est homotopiquement cartésien si le morphisme d'adjonction  $X \rightarrow i_{\perp*} i_{\perp}^* X$  est un isomorphisme.

Soit  $A = \Delta', \Delta, \tilde{\Delta}$ , et  $A_m = \Delta'_m, \Delta_m, \tilde{\Delta}_m$ .

Pour  $p, q \geq 1$ , on note  $i_{p,q} : \square \rightarrow A$  le foncteur défini par

$$\begin{array}{ccc}
 (0,0) \leftarrow (0,1) & & k \ A_{p+q} \leftarrow A_q \ 0 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (1,0) \leftarrow (1,1) & \mapsto & k \ A_p \leftarrow A_0 \ 0 \\
 & & \uparrow \\
 & & P \leftarrow 0
 \end{array}$$

Définition:

Une  $\mathbb{D}$ -pseudo-catégorie (resp. une  $\mathbb{D}$ -catégorie, resp. un  $\mathbb{D}$ -groupoïde) et un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\Delta')$  (resp. de  $\mathbb{D}(\Delta)$ , resp. de  $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$ ) tel que  $\forall p, q \geq 1, i_{p,q}^* X$  soit un carré homotopiquement cartésien.

### Proposition 1:

Soit  $u: A \rightarrow B$  une flèche de  $\text{Dia}$  admettant un adjoint à gauche. Alors le morphisme canonique

$$P_{B*} \longrightarrow P_{A*} u^* = P_{B*} u_* u^*$$

est un isomorphisme.

En particulier, si  $C$  est un objet de  $\text{Dia}$  admettant un objet final, alors  $i_{C,C}^* \simeq P_{C*}$ .

Démonstration:

Soit  $v: B \rightarrow A$  un adjoint à gauche de  $u$ . Alors  $v^*$  est un adjoint à gauche de  $u^*$ , i.e.  $v^* \simeq u$ , et  $u^* = v_*$ .

On obtient ainsi  $P_{A*} u^* \simeq P_{A*} v_* \simeq (P_{A*} v)_* = P_{B*}$ .

### Lemme

Soit  $A \xrightarrow{u} B$  une flèche de  $\text{Dia}$ , pleinement fidèle.

Alors  $\forall a \in \text{ob } A$ ,  $b = u(a)$ , le morphisme canonique

$$i_{B,b}^* u \longrightarrow i_{A,a}^* \quad , \quad \text{induit par } u^* u_* \longrightarrow 1_{\text{ob}(A)}$$

est un isomorphisme.

Démonstration:

Cela résulte de Der 4g et du fait que  $\forall a \in \text{ob } A$ ,  $b = u(a)$

$A/a \rightarrow A/b$  est un isomorphisme, et  $(a, 1_b)$  est un objet final de  $A/b$ .

## Proposition 2

Si  $A \xrightarrow{u} B$  est un foncteur pleinement fidèle dans  $\mathcal{D}ia$ , alors le foncteur  $D(A) \xrightarrow{u_*} D(B)$  est pleinement fidèle.

Démonstration:

Il suffit de montrer que  $u^* u_* \rightarrow 1_{D(A)}$  est un isomorphisme. Le lemme ci-dessus et l'axiome  $\mathcal{D}er 2$  permettent de conclure.

$\mathcal{D}: \text{Bia}^{\circ} \rightarrow \text{CAT}$  préderivateur satisfaisant  $\text{Der } 2, \text{Der } 3g, \text{Der } 4g$

$$\square = \Delta_1^{\circ} \times \Delta_1^{\circ} = \begin{array}{ccc} (0,0) & \longrightarrow & (0,1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (1,0) & \longrightarrow & (1,1) \end{array}$$

$\mathcal{J}$  = sous-catégorie pleine de  $\square$  ayant pour objets  $(1,0), (1,1)$  et  $(0,1)$

$\mathcal{J} \xrightarrow{i_{\mathcal{J}}} \square$  est l'inclusion

$X \in \text{ob } \mathcal{D}(\square)$  est homotopiquement cartésien (h-cart) si  $X \rightarrow i_{\mathcal{J},x} i_{\mathcal{J},x}^* X$  est une bijection.

### Proposition 1

Si  $X \xrightarrow{f} Y$  est un morphisme de  $\mathcal{D}(\square)$  entre objets h-cart alors  $f$  est un isomorphisme ssi  $i_{\mathcal{J},x}^* f$  est un isomorphisme

Dém:  $i_{\mathcal{J},x}$  est pleinement fidèle et donc conservatif.

### Proposition 2

Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{D}(\mathcal{J})$  alors  $i_{\mathcal{J},x} X$  est un objet h-cart de  $\mathcal{D}(\square)$ .

Dém: cela résulte de la pleine fidélité de  $i_{\mathcal{J},x}$ .

### Proposition 3

Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{D}(\square)$ .

Alors  $X$  est homotopiquement cartésien si et seulement si

$$i_{\square,(0,0)}^* X \rightarrow P_{\mathcal{J}} i_{\mathcal{J},x}^* X \text{ est un isomorphisme.}$$

Dém: Par Der 2,  $X$  est  $h$ -cart ssi

$$i_{\perp}^* X \rightarrow i_{\perp}^* i_{\perp * } i_{\perp}^* X \text{ et } i_{\square, (0,0)}^* X \rightarrow i_{\square, (0,0)}^* i_{\perp * } i_{\perp}^* X$$

sont des isomorphismes.

Or  $i_{\perp}^* X \rightarrow i_{\perp}^* i_{\perp * } i_{\perp}^* X$  est toujours un isomorphisme.

Comme  $(0,0)$  est un objet final de  $\square$ , on a  $i_{\square, (0,0)}^* = P_{\square * }$   
 et  $P_{\square * } i_{\perp * } = P_{\perp * }$ .

Lemme:

Soient  $A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{\ell} C$  dans  $\mathcal{B}$  tels que

$$\forall a \in \text{ob } A \quad \forall b \in \text{ob } B$$

$$\text{Hom}_B(k(a), b) \rightarrow \text{Hom}_C(\ell k(a), \ell(b))$$

soit une bijection.

Alors  $\ell^* \ell_* k_* \rightarrow k_*$  est un isomorphisme.

Dém: C'est un iso. ssi  $\forall b \in \text{ob } B$

$$i_{B,b}^* \ell^* \ell_* k_* \xrightarrow{i_{B,b}^*} i_{B,b}^* k_* \text{ est un iso.}$$

$$i_{C, \ell(b)}^* \ell_* k_* \cong i_{C, \ell(b)}^* (\ell k)_*$$

$$\begin{array}{ccc} A/e(b) & \xrightarrow{d_{\ell k, \ell(b)}} & A \\ \downarrow P_{A/e(b)} & \swarrow & \downarrow \\ e & \longrightarrow & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{d_{k,b}} & A \\ \downarrow P_{A/b} & \swarrow & \downarrow k \\ e & \longrightarrow & B \end{array}$$

$$\text{donc } i_{C, \ell(b)}^* (\ell k)_* \cong P_{A/e(b)}^* d_{\ell k, \ell(b)} \text{ et } i_{B,b}^* k_* \cong P_{A/b}^* d_{k,b}$$

Lemme

Soient  $A \xrightarrow{u} B$  et  $\square \xrightarrow{v} B$  dans Dia tels que  $b = \sigma(0,0)$  ne soit pas dans l'image de  $u$ , ni dans celle de  $v$ .

On suppose qu'il existe une sous-catégorie  $B'$  (non nécessairement pleine) de  $B$  satisfaisant les conditions suivantes:

- a)  $u$  et  $v$  se factorisent par  $B'$
- b) Le foncteur  $\tilde{v}: \square \rightarrow B' - \{b\} / b$  induit par  $v$  admet un adjoint à gauche.
- c) Si on note  $A \xrightarrow{u} B$  la factorisation induite

$$\begin{array}{ccc} u' \downarrow & & \uparrow k \\ & B' - \{b\} & \end{array}$$

$$\forall a \in \text{ob } A, \forall b' \in \text{ob } B' - \{b\}$$

$$\text{Hom}_{B' - \{b\}}(u'(a), b') \rightarrow \text{Hom}_C(u(a), k(b'))$$

est bijective.

Alors pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}(A)$ ,  $v^* u_* X$  est homotopiquement cartésien.

Dém: En vertu du lemme précédent et du point (c), on a

$$k^* k_* u'_* \simeq u'_*$$

$$\square \xrightarrow{\tilde{v}} B' - \{b\} / b \xrightarrow{j = \text{incl}} B' - \{b\} \xrightarrow{k} B$$

$$kj\tilde{v} = vj \quad \text{ou } a(b) \Rightarrow (P_{B' - \{b\} / b})_* \xrightarrow{\sim} P_{\square} \tilde{v}^*$$

$$u_* X \simeq k_* u'_* X = k k^* k_* u'_* X \simeq k_* k^* u_* X$$

$$\begin{aligned} i_{\square, (0,0)}^* v^* u_* X &\simeq i_{B,b}^* k_* k^* u_* X \simeq (P_{B' - \{b\} / b})^* j^* k^* u_* X \\ &\stackrel{(b)}{\simeq} P_{\square} \tilde{v}^* j^* k^* u_* X \\ &\simeq P_{\square} i_{\square}^* v^* u_* X \end{aligned}$$

Lemme: Soit  $v: I \rightarrow J$  une application croissante entre ensembles ordonnés.

Alors  $v$  admet un adjoint à gauche si et seulement si  $\forall j \in J$  l'ensemble  $I_j = \{i \in I \mid j \leq v(i)\}$  admet un minimum. Le cas échéant,  $u(j) = \min I_j$ .

Machine à fabriquer des carrés homotopiquement cartésiens.

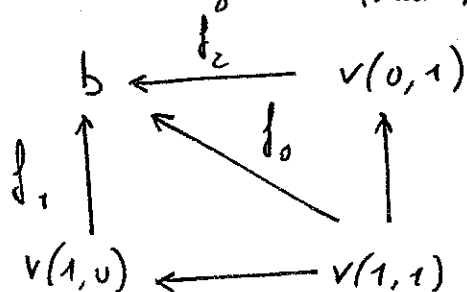
Lemme: Soit  $v: \square \rightarrow B$  un foncteur tel que  $b = v(0,0)$  ne soit pas dans l'image de  $v_i$ , et tel que toute flèche de  $B$  de but  $b$  et de source  $b' \neq b$  soit un monomorphisme.

Alors le foncteur  $\tilde{v}: \square \rightarrow B - \{b\} / \sim$  admet un adjoint à gauche si et seulement si

a) toute flèche  $b' \rightarrow b$ , vérifiant  $b' \neq b$ , se factorise par  $f_1$  ou par  $f_2$

b) toute flèche  $b' \rightarrow b$ , vérifiant  $b' \neq b$ , se factorisant par  $f_1$  et par  $f_2$ , se factorise aussi par  $f_0$

on a le diagramme (dans  $B$ ):



Retour aux  $\mathbb{D}$ -groupoïdes.

$p, q \geq 1$  On a  $i_{p,q}: \square \hookrightarrow \tilde{\Delta}$  défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Delta}_{p+q} & \longleftarrow & \tilde{\Delta}_q \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \tilde{\Delta}_p & \longleftarrow & \tilde{\Delta}_0
 \end{array} \quad (*)$$

Rappel: un  $\mathbb{D}$ -groupoïde est un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$  tel que  $\forall p, q \geq 1$   
 $i_{p,q}^* X$  soit h-cart.

Soit  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(e)$ .

$$\text{On a } i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0}^*: e \longrightarrow \tilde{\Delta}$$

Proposition  $i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0}^* X$  est un  $\mathbb{D}$ -groupoïde qu'on  
 notera  $\pi_1 X$ .

On l'appellera le groupoïde fondamental de  $X$ .

Dém: Soit  $B_{p,q}$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Delta}$  dont les objets sont  $\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_p, \tilde{\Delta}_q$  et dont les flèches sont toutes les flèches dans  $\tilde{\Delta}$   
 de  $\tilde{\Delta}_0$  vers un objet de  $B_{p,q}$  - les flèches de  $(*)$ .

La machine à fabriquer des carrés h-cart appliquée à  $B := B_{p,q}$   
 montre que  $\forall p, q \geq 1$   $i_{p,q}^* i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0}^* X$  est h-cart.

Lemme: Soit  $C$  la sous-catégorie pleine de  $\Delta_2^0 \times \Delta_1^0$  dont les objets sont  $(2,0), (0,1), (1,1), (2,1)$  et soit

$$\delta_\varepsilon = \delta_2^\varepsilon \times 1_{\Delta_1^0} : \square \longrightarrow \Delta_2^0 \times \Delta_1^0 \quad \varepsilon=0,1,2.$$

Si  $C \hookrightarrow \Delta_2^0 \times \Delta_1^0$  désigne l'inclusion, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}(C)$  et pour tout  $\varepsilon=0,1,2$ ,  $\delta_\varepsilon^* X$  est homotopiquement cartésien.

Dém: pour  $\varepsilon=0,2$  on applique la machine pour  $B' = \Delta_2^0 \times \Delta_1^0$ .

Pour  $\varepsilon=1$  on a

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 (0,1) & & (0,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (1,1) & & (1,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (2,0) \leftarrow (2,1) & & (2,0) \leftarrow (2,1)
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 (0,0) \leftarrow (0,1) & & (0,0) \leftarrow (0,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (1,1) & & (1,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (2,0) \leftarrow (2,1) & & (2,0) \leftarrow (2,1)
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 (0,0) \leftarrow (0,1) & & (0,0) \leftarrow (0,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (1,0) \leftarrow (1,1) & & (1,0) \leftarrow (1,1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (2,0) \leftarrow (2,1) & & (2,0) \leftarrow (2,1)
 \end{array} \\
 C & B' & \Delta_2^0 \times \Delta_1^0
 \end{array}$$

on considère la sous-catégorie pleine  $B'$  de  $\Delta_2^0 \times \Delta_1^0$  formée des objets  $(0,0), (2,0), (0,1), (1,1)$  et  $(2,1)$ , puis on applique la machine.

Proposition: En gardant les notations du lemme, soit  $X \in \mathcal{D}(\Delta_2^0 \times \Delta_1^0)$  tel que  $\delta_0^* X$  soit h-cart. Alors  $\delta_1^* X$  est h-cart. si et seulement si  $\delta_2^* X$  l'est.

Dém:

au mot  $D$  la sous-catégorie de  $\Delta_2^0 \times \Delta_1^0$

$$\begin{array}{ccc} & & (0,1) \\ & & \uparrow \\ (1,0) & \longleftarrow & (1,1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (2,0) & \longleftarrow & (2,1) \end{array}$$

au mot  $C \xrightarrow{k} D \xrightarrow{l} \Delta_2^0 \times \Delta_1^0$  les inclusions.  $u = lk$ .

Par le lemme, pour  $\varepsilon = 0, 1, 2$ ,  $\delta_\varepsilon^* u_* u^* X$  est h-cart.

Il suffit donc de montrer que  $X \rightarrow u_* u^* X$  est un isomorphisme si  $\delta_1^* X$  ou  $\delta_2^* X$  est h-cart.

Or  $\delta_0^* X$  h-cart  $\Rightarrow l^* X \xrightarrow{\sim} l^* u_* u^* X$ , i.e. de manière équivalente (grâce à  $\text{Der } 2$ )

$$k^* l^* X \xrightarrow{\sim} k^* l^* u_* u^* X$$

$$\text{et } \delta_0'^* l^* X \xrightarrow{\sim} \delta_0'^* l^* u_* u^* X$$

$$\text{à } \square \xrightarrow{\delta_0} \Delta_2^0 \times \Delta_1^0$$

$$\begin{array}{ccc} \delta_0' & \searrow & \nearrow l \\ & D & \end{array}$$

Or  $k^* l^* = u^*$  et  $u^* X \xrightarrow{\sim} u_* u^* X$  car  $u_*$  est pleinement fidèle. Or  $\delta_0'^* l^* = \delta_0^*$  et  $\delta_0^* l^* X$  et  $\delta_0^* u_* u^* X$  sont h-cart. Par la prop. 1 il suffit de montrer que

$$i_{\downarrow}^* \delta_0^* X \xrightarrow{\sim} i_{\downarrow}^* \delta_0^* u_* u^* X.$$

ce qui se calcule directement.

Soit  $\varepsilon = 0, 1$ , et supposons que  $\delta_\varepsilon^* X$  soit h-cart. En vertu de Ser 2, pour montrer que  $X \xrightarrow{\sim} u_* u^* X$ , il suffit de montrer que  $l^* X \xrightarrow{\sim} l^* u_* u^* X$  et que

$$\delta_\varepsilon^* X \xrightarrow{\sim} \delta_\varepsilon^* u_* u^* X.$$

Or on sait que  $l^* X \xrightarrow{\sim} l^* u_* u^* X$ . On a

$$\begin{array}{ccc} \lrcorner & \xrightarrow{\delta_\varepsilon i_\lrcorner} & \Delta_2^0 \times \Delta_1^0 \\ & \searrow \delta_\varepsilon' & \nearrow l \\ & D & \end{array}$$

Il suffit de montrer que  $i_\lrcorner^* \delta_\varepsilon^* X \xrightarrow{\sim} i_\lrcorner^* \delta_\varepsilon^* u_* u^* X$  (prop. 1), i.e que

$$\delta_\varepsilon'^* l^* X \xrightarrow{\sim} \delta_\varepsilon'^* l^* u_* u^* X.$$

ce qui a été montré ci-dessus.

Remarques:  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(e)$

$e \xrightarrow{i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0}} \tilde{\Delta}$  est l'adjoint à droite de  $\tilde{\Delta} \xrightarrow{p_{\tilde{\Delta}}} e$ .

On définit  $\pi X := i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0}^* X = p_{\tilde{\Delta}}^* X$ .

On remarque que  $\pi X$  est un groupoïde. En effet  $i_{p, q}^* p_{\tilde{\Delta}}^* X$  est h-cart, car on a un isomorphisme

$$X = i_{\square, (0,0)}^* p_{\square}^* X \xrightarrow{\sim} p_{\perp}^* i_{\perp}^* p_{\square}^* X \simeq p_{\perp}^* p_{\perp}^* X$$

dû au fait que  $\perp$  est  $\mathbb{D}$ -sphérique.

$\pi X$  sera le groupoïde fondamental de  $X$ .

Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie admettant des produits finis.

Une catégorie enrichie par  $\mathcal{M}$  est une donnée

$$A = (\text{ob } A, \underline{\text{Hom}}, \gamma, \mu)$$

où  $\text{ob } A$  est un ensemble et  $\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \in \text{ob } \mathcal{M}$  pour

$a_1, a_2 \in \text{ob } A$ ,  ~~$\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \in \text{ob } \mathcal{M}$~~

$\ast \xrightarrow{\gamma_a} \underline{\text{Hom}}(a, a) \in \text{FP } \mathcal{M}$  (où  $\ast$  est l'objet final de  $\mathcal{M}$ )

$\mu_{a_3 a_2 a_1} : \underline{\text{Hom}}(a_2, a_3) \times \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(a_1, a_3) \in \text{FP } \mathcal{M}$

tel que  $\forall T \in \text{ob } \mathcal{M}$  il existe une catégorie  $A(T)$  définie

par  $\text{ob } A(T) = \text{ob } A$ ,  $\text{Hom}_{A(T)}(a_1, a_2) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(T, \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2))$   
 les identités étant déterminées par  $\gamma$  et la composition par  $\mu$ .

On dit que  $A$  est un groupoïde enrichi par  $M$  si pour tout  $T \in \text{ob } M$ ,  $A(T)$  est un groupoïde.

Cela équivaut à l'existence d'une famille (alors unique) de flèches  $I_{a_2, a_1} : \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(a_2, a_1) \in \text{FPM}$   
 $a_1, a_2 \in \text{ob } A$  telles que  $\forall T \in \text{ob } M$   $I_{a_2, a_1}(T)$  corresponde à l'application  $f \mapsto f^{-1}$ .

Soit  $M$  une catégorie admettant des produits fibrés ~~et un~~  
~~objet~~ final et un objet final (pour définir  $X_0 \times X_0 \dots$ )

Une  $M$ -catégorie (resp.  $M$ -groupoïde)

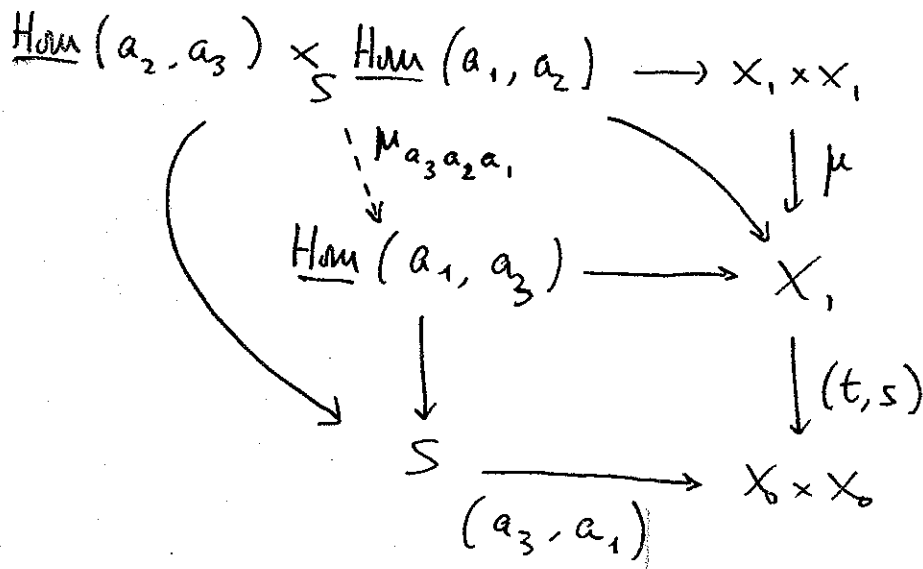
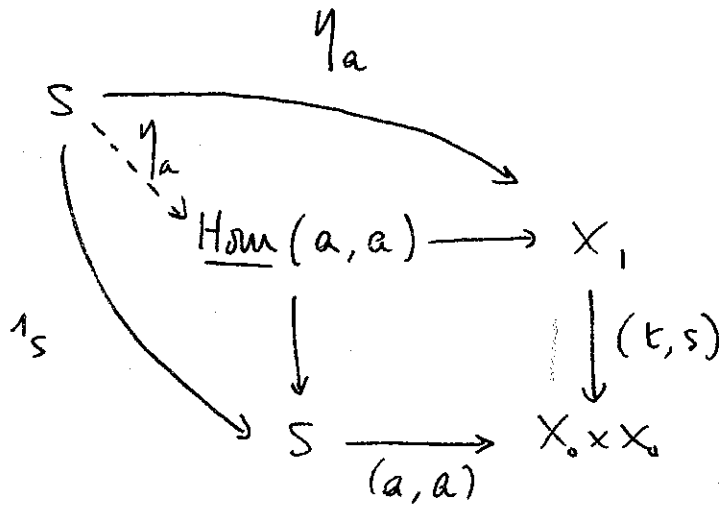
$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_0 \quad X_0 \xrightarrow{y} X_1 \quad (X_1)_s \times_{X_0} (X_1)_t \xrightarrow{\mu} X_1$$

$S$  objet de  $M$ ,  $E \subset \underline{\text{Hom}}(S, X_0) \mapsto$  catégorie (resp. groupoïde)  $A$ , enrichi (e) par  $M/S$  ( $M/S$  admet des produits finis).

$$A = (\text{ob } A, \underline{\text{Hom}}, \gamma, \mu)$$

$\text{ob } A = E$   $\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2)$   $a_1, a_2 \in E$  est défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow (t, s) \\ S & \xrightarrow{(a_2, a_1)} & X_0 \times X_0 \end{array}$$



Cas particulier important.

$S = *$  un objet final de  $M$ .

$E \subset \text{Hom}(*, X_0) =$  "ensemble de points de  $X_0$ "

$M/S \cong M$ .

Alors  $A$  est une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par  $M$ .

Soit  $\mathcal{M}$  admettant des produits finis.

$$A = (\text{Ob } A, \underline{\text{Hom}}(\cdot, \cdot), \gamma, \mu)$$

ob  $A$  ensemble

$$\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \in \text{ob } \mathcal{M}$$

$$* \xrightarrow{\gamma_a} \underline{\text{Hom}}(a, a) \in \text{FP } \mathcal{M}$$

$$\underline{\text{Hom}}(a_2, a_3) \times \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \xrightarrow{\mu_{a_3 a_2 a_1}} \underline{\text{Hom}}(a_1, a_3)$$

$\mathcal{M} \hookrightarrow \hat{\mathcal{M}}$  plongement de Yoneda.

$$X_0 = \coprod_{\text{ob } A} * \text{ dans } \hat{\mathcal{M}}. \text{ ob } A \times \xrightarrow{\varepsilon_a} X_0 \text{ pour } a \in \text{ob } A$$

$$X_1 = \coprod_{a_1, a_2 \in \text{ob } A} \underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \text{ dans } \hat{\mathcal{M}}$$

$$\uparrow \varepsilon_{a_2, a_1}$$

$$\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \longrightarrow *$$

$\rho_{a_2, a_1}$

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_0$$

$$s \varepsilon_{a_2, a_1} = \varepsilon_{a_1} \rho_{a_2, a_1}$$

$$t \varepsilon_{a_2, a_1} = \varepsilon_{a_2} \rho_{a_2, a_1}$$

$$X_0 \xrightarrow{\gamma} X_1$$

$$\gamma \varepsilon_a = \gamma_a \varepsilon_{a, a}$$

$$(X_1)_s \times_{(X_0)_t} (X_1) \xrightarrow{\mu} X_1$$

$$\mu \varepsilon_{a_3 a_2 a_1} = \varepsilon_{a_3 a_1} \mu_{a_3 a_2 a_1}$$

$$\text{à } \underline{\text{Hom}}(a_2, a_1) \times \underline{\text{Hom}}(a_1, a_3) \xrightarrow{\varepsilon_{a_3 a_2 a_1}} (X_1)_s \times_{(X_0)_t} (X_1)$$

Lemme:  $(\text{Ob } A, \text{Hom}, \eta, \mu)$  est une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par  $M \iff (X_0, X_1, s, t, \eta, \mu)$  est une  $\hat{M}$ -catégorie

Enfinement:

Si  $X_1 \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} X_0 \quad X_0 \xrightarrow{\eta} X_1 \quad X_1 \times_{X_0} X_1 \longrightarrow X_1$   
est une  $\hat{M}$ -catégorie élé que

a)  $X_0$  ait une somme de copies de  $*$

$$\text{(i.e. } X_0 = \coprod_{\text{Hom}(*, X_0)} * \text{)}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{b) } X_{a_2 a_1} & \longrightarrow & X_1 \\ & \downarrow \text{Cart.} & \downarrow (\eta, s) \\ * & \xrightarrow{(a_2, a_1)} & X_0 \times X_0 \end{array} \quad \forall a_2, a_1: * \longrightarrow X_0$$

$X_{a_2 a_1}$  ait représentable.

La construction ci-dessus fournit une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par  $\hat{M}$  (mais en fait par  $M$ )

Conclusion:

Se donner une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par  $M$  revient à se donner une  $\hat{M}$ -catégorie (resp. un  $\hat{M}$ -groupoïde) satisfaisant aux conditions a) et b).

- Une méthode "cumpliquée" pour construire une catégorie (resp. un groupoïde) enrichie(e) par  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$  étant une catégorie admettant des produits finis)

Données :

- Un ensemble  $E$

- $\varphi: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow E$  application

$X_\varphi$  objet de  $\mathcal{M}$

- $\psi: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$  croissante

$X_\varphi \xrightarrow{\psi^*} X_{\varphi\psi}$  morphisme de  $\mathcal{M}$ .

- functorialité:

$\psi': \{0, \dots, n'\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  croissante

$$\psi'^* \psi^* = (\psi \psi')^*$$

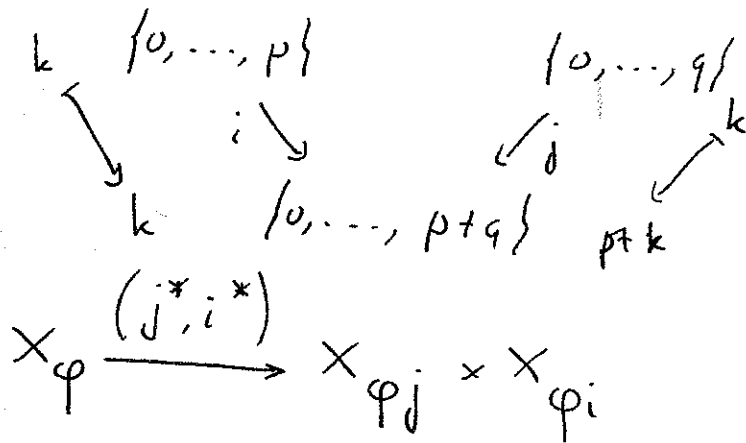
$$1_{\{0, \dots, n\}} = 1_{X_\varphi}$$

Cela revient à se donner un foncteur

$$(\mathbb{A}/E)^\circ \xrightarrow{X} \mathcal{M}$$

( $\mathbb{A}$  étant vu comme le groupoïde simplement connexe associé).

- On demande en outre que
- $\varphi: \{0\} \rightarrow E \Rightarrow X_\varphi = *$
  - $\forall p, q \geq 1 \quad \forall \varphi: \{0, \dots, p+q\}$



ait un isomorphisme.

Théorème:

Il existe une catégorie enrichie par  $\mathcal{M}, A$ , unique telle que

a)  $\text{ob } A = E$

b)  $a_0, a_1 \in E \quad \underline{\text{Hom}}(a_0, a_1) = X_{\underline{a}} \quad \begin{array}{l} \underline{a}: \{0, 1\} \rightarrow E \\ 0 \mapsto a_0 \\ 1 \mapsto a_1 \end{array}$

c)  $a \in E \quad \eta_a = (\sigma_0^0)^* \quad \begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{\sigma_0^0} & \{0\} \xrightarrow{\underline{a}} E \\ & & 0 \mapsto a \end{array}$

$= \left( * \rightarrow \underline{\text{Hom}}(a, a) \right)$

$\underline{\text{Hom}}(a_1, a_2) \times \underline{\text{Hom}}(a_0, a_2) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(a_0, a_2)$

$X_{\underline{a}\delta_2^0} \times X_{\underline{a}\delta_2^1} \xleftarrow{\eta} X_{\underline{a}} \xrightarrow{(\delta_2^1)^*} X_{\underline{a}\delta_2^1}$

où  $\underline{a}: \{0, 1, 2\} \rightarrow E \quad i \mapsto a_i$

De plus  $A$  est un groupoïde enrichi par  $M$  si et seulement si l'action  $\eta \mapsto \psi^*$  s'étend aux applications arbitraires, i.e. si  $(\mathbb{D}/E)^\circ \rightarrow M$  s'étend en un foncteur

$$(\hat{\mathbb{D}}/E)^\circ \rightarrow M.$$

Esquisse de dém.:

On a  $\mathbb{D}/E \xrightarrow{u} \mathbb{D}$  le foncteur d'oubli.

Les conditions a) et b) impliquent que  $u, X$  est le noyau d'une catégorie (dans  $\hat{M}$ ) où  $M \times \hat{\mathbb{D}}/E \xrightarrow{u!} M \times \hat{\mathbb{D}}$  est l'adjoint à gauche de  $M \times \hat{\mathbb{D}} \xrightarrow{u^*} M \times \mathbb{D}/E$ .

On se fixe à présent un dérivateur faible à gauche

$$D: \mathbb{D} \rightarrow \text{CAT}.$$

On sait que pour tout  $A$  objet de  $D: \mathbb{D}$ ,  $\mathbb{D}(A)$  admet des produits finis, et en particulier un objet final.

•  $\emptyset \xrightarrow{P_\emptyset} e$  induit  $e = \mathbb{D}(\emptyset) \xrightarrow{P_{\emptyset*}} \mathbb{D}(e)$  qui est l'objet final en question, note  $*$ .

$$\begin{array}{ccc} e & & \\ & \searrow^{i_1} & \\ & & e \amalg e \xrightarrow{P_{e \amalg e}} e \\ & \nearrow_{i_2} & \\ e & & \end{array}$$

Pour  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(e \amalg e)$   $P_{e \amalg e*} X \simeq i_1^* X \times i_2^* X$ .

Lemme 1:

$$k: e \amalg e \longrightarrow \perp \quad \left( k i_1 = i_{\perp, (1,0)}, k i_2 = i_{\perp, (0,1)} \right)$$

$$X \in \text{ob } \mathcal{D}(\perp).$$

$X \longrightarrow k_* k^* X$  est un isomorphisme si et seulement si  $i_{\perp, (1,1)}^* X = X_{1,1}$  est un objet final de  $\mathcal{D}(e)$ .

Dém:  $k$  est pleinement fidèle. Donc  $X \xrightarrow{\sim} k_* k^* X$  si et seulement si  $X_{1,1} \xrightarrow{\sim} (k_* k^* X)_{1,1}$ .

Or  $(k_* k^* X)_{1,1} \simeq *$ , ce qu'on voit via le 2. diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \phi = e \amalg e /_{(1,1)} & \longrightarrow & e \amalg e \\ \downarrow & \searrow & \downarrow k \\ e & \xrightarrow{\quad} & \perp \text{ en utilisant } \text{ser } 4g. \\ & i_{\perp, (1,1)} & \end{array}$$

Lemme 2:

Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{D}(\perp)$ , et soit  $\text{dia } X =$

$$\begin{array}{ccc} & & X_{01} \\ & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X_{11} \end{array}$$

So  $X_{11} = *$ , alors  $P_{\perp, *} X \simeq X_{10} \times X_{01}$ .

Proposition:

Soit  $X \in \text{ob } \mathcal{D}(\square)$ .

$$\text{dia } X = \begin{array}{ccc} X_{00} & \longrightarrow & X_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X_{11} \end{array}$$

On suppose que  $X_{11} = *$ .

Alors  $X$  est  $h$ -cart.  $\Leftrightarrow X_{00} \rightarrow X_{10} \times X_{01}$  iso.

Dém: cela résulte du lemme 2 car  $X$  est  $h$ -cart.

$$\text{ssi } X_{00} \xrightarrow{\sim} p_{\perp *} i_{\perp}^* X.$$

$X \in \text{ob } \mathcal{D}(e)$ .

Il s'agit d'introduire une notion d'ensemble de points base, et d'associer un groupoïde enrichi par  $\mathcal{D}(e)$  à cette situation.

Il n'est pas raisonnable de dire qu'un ensemble de points base est un ensemble de flèches de la forme  $* \rightarrow X$ , ni même un ensemble d'objets  $Y$  de  $\mathcal{D}(\Delta_1^0)$  tels que  $\text{dia } Y = * \rightarrow X$ . En effet, on peut montrer que si  $Z \in \mathcal{D}(\perp)$  vérifie

$$\text{dia } Z = \begin{array}{ccc} & * & \\ & \downarrow & \\ * & \rightarrow & X \end{array}$$

il peut y avoir des automorphismes non-triviaux de  $Z$  induisant l'identité dans  $\mathbb{D}(\Delta_i^0) \times \mathbb{D}(\Delta_i^1)$ .

Soit  $E$  un ensemble. On note  $C(E)$  la catégorie obtenue comme une catégorie discrète en adjoignant un objet final noté  $\omega$ , i.e.  $C(E) = \int (\text{dis } E \rightarrow e)$ . On obtient ainsi un foncteur  $E_{\text{us}} \xrightarrow{c} \text{Cat}$ .

On note  $C_m = C(\{0, \dots, m\})$ , et  $C^0(E) = (C(E))^0$ .

Définition:

Soient  $E$  un ensemble, et  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(e)$ . Une ~~collection~~<sup>famille</sup> de points base de  $X$  indexé par  $E$  est un objet  $\tilde{X}$  de  $\mathbb{D}(C^0(E))$  tel que

$$a) \forall x \in E \quad \tilde{X}_x \underset{C^0(E), x}{=} i \quad * \quad \tilde{X} \underset{C^0(E), x}{\simeq} *$$

$$b) \tilde{X}_\omega \underset{C^0(E), \omega}{=} i \quad * \quad \tilde{X} \underset{C^0(E), \omega}{\simeq} X \text{ (via un isomorphisme drapé)}.$$

$$i.e. \text{ dia } \tilde{X} = \begin{array}{c} * \quad * \quad \dots \quad * \\ \searrow \downarrow \swarrow \\ X \end{array}$$

On va définir un groupoïde  $V_{en}$  <sup>enrichi par  $\mathbb{D}(e)$</sup>  utilisant la définition compliquée et une famille de points base  $E$  de  $X$ .

$$\{0, \dots, m\} \xrightarrow{\varphi} E \rightsquigarrow C_m^{C(\varphi)} \rightarrow C(E)$$

$$X_\varphi = P_{C_m^*} C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

$\{0, \dots, n\} \xrightarrow{\psi} \{0, \dots, m\}$  application

$$\begin{array}{ccc}
 X_\varphi = P_{C_m^*} C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} & \longrightarrow & P_{C_n^*} C^\circ(\psi)^* C^\circ(\psi)^* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \\
 \searrow \psi^* & & \parallel \\
 & & P_{C_n^*} C^\circ(\varphi\psi)^* \tilde{X} \\
 & & \parallel \\
 & & X_{\varphi\psi}
 \end{array}$$

La fonctionnalité est évidente.

a)  $\{0\} \xrightarrow{\varphi} E \quad C^\circ = \begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ \omega \end{matrix} \text{ et}$

$$X_\varphi = P_{C_0^*} C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} = \tilde{X}_{\varphi(\omega)}$$

d'où  $X_\varphi \simeq *$ .

b) on définit  $u: C_{p+q}^\circ \longrightarrow \perp$

$$k \longmapsto (0, 1) \text{ si } 0 \leq k < p$$

$$k \longmapsto (1, 0) \text{ si } p < k \leq p+q$$

on fixe  $\{0, \dots, p+q\} \xrightarrow{\varphi} E \quad k \longmapsto u(\omega) = u(p) = (1, 1)$

$$X_\varphi = P_{C_{p+q}^*} C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} = P_{\perp^*} u^* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_{p+q}^{\circ} / (\alpha, \beta) & \xrightarrow{j_{u, (\alpha, \beta)}} & C_{p+q}^{\circ} \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow u \\
 P C_{p+q}^{\circ} / (\alpha, \beta) & \xrightarrow{i_{\perp, (\alpha, \beta)}} & \perp
 \end{array}$$

$$(u_* C^{\circ}(\varphi)^* \tilde{X})_{(\alpha, \beta)} \simeq (P C_{p+q}^{\circ} / (\alpha, \beta))_* j_{u, (\alpha, \beta)}^* C^{\circ}(\varphi)^* \tilde{X}$$

$(\alpha, \beta) = (0, 1) \Rightarrow C_{p+q}^{\circ} / (\alpha, \beta) = C_p^{\circ}$  et  $j_{u, (0, 1)}$   
 s'identifie à  $c(\tilde{\Delta}_p \xrightarrow{\varphi_i} \tilde{\Delta}_{p+q})$ ,  $k \mapsto k$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } (u_* C^{\circ}(\varphi)^* \tilde{X})_{(0, 1)} &\simeq (P C_p^{\circ})_* C^{\circ}(\varphi_i)^* \tilde{X} \\
 &\simeq X_{\varphi_i}
 \end{aligned}$$

De même si  $\tilde{\Delta}_q \xrightarrow{j} \tilde{\Delta}_{p+q}$   $k \mapsto k+p$

$$(u_* C^{\circ}(\varphi)^* \tilde{X})_{(1, 0)} \simeq X_{\varphi_j}$$

$$\text{et } (u_* C^{\circ}(\varphi)^* \tilde{X})_{(1, 1)} \simeq *.$$

Le lemme 2 implique que  $X_{\varphi} \simeq X_{\varphi_j} \times X_{\varphi_i}$ .

Exemple:  $\mathbb{D} = \text{HOT}$ .

$X$  esp. top. (in cas. simp., en catégorie).

$E$  ensemble de points de  $X$  (resp.  $E \subset X_0$ , ou  $E \subset \text{ob } X$ ).

$\leadsto C^\circ(E) \xrightarrow{\tilde{X}} \text{Top}$  (resp. ...)

et donc  $\tilde{X} \in \text{HOT}(C^\circ(E))$ .

le groupoïde associé est défini par

$$\underline{\text{Hom}}(x_0, x_1) = P_{C^\circ, *}(C^\circ(E) \xrightarrow{\tilde{X}} \text{Top}) = P_{\square, *} \left( \begin{array}{c} * \\ \downarrow \\ * \rightarrow X \end{array} \right)$$

$\underline{\text{Hom}}(x_0, x_1)$  a le type d'homotopie de l'espace des chemins de  $x_0$  vers  $x_1$ , i.e si  $x_0$  et  $x_1$  ne sont pas dans la même composante connexe,  $\underline{\text{Hom}}(x_0, x_1) = \emptyset$

et  $\underline{\text{Hom}}(x_0, x_1) \simeq \Omega(X, x_0) \simeq \Omega(X, x_1)$  dans  $\text{Hot}$  linéar.

On a donc  $\pi_0 \tilde{X}$  (in  $\pi_0: \text{HOT} \rightarrow \text{Ens}$  commutatif aux produits) i.e  $\pi_0 \tilde{X}$  (qui est un groupoïde enrichi par  $\text{Ens}$  i.e un groupoïde) et le groupoïde fondamental  $\pi_1 X$  de  $X$ ....

On se fixe  $ID: \text{Dia}^0 \rightarrow \text{CAT}$  dérivateur à gauche faible

Der 1 Der 2 Der 3g Der 4g

Ensemble  $E$   $C(E)$  catégorie obtenue en adjoignant un objet final  $\omega$  à  $E$  m comme une catégorie discrète

$$E \xrightarrow{\varphi} E' \quad C(\varphi): C(E) \rightarrow C(E')$$

$$x \mapsto \varphi(x) \quad x \in E$$

$$\omega \mapsto \omega$$

$$C_m = C(\{0, \dots, m\})$$

$X$  objet de  $ID(e)$

Une famille de points base de  $X$  indexée par  $E$

$$\tilde{X} \in \text{ob } ID(C^0(E))$$

- a)  $\forall x \in E \quad \tilde{X}_x = i \quad * \quad \tilde{X} \cong * \text{ objet final de } ID(e)$   
 $C^0(E), x$
- b)  $\tilde{X}_\omega \cong X$  par un iso donné

$\pi(X; \tilde{X})$  groupoïde enrichi par  $ID(e)$

dont l'ensemble de points est  $E$

$$x_0, x_1 \in E \quad \alpha: \{0, 1\} \rightarrow E \quad i \mapsto x_i$$

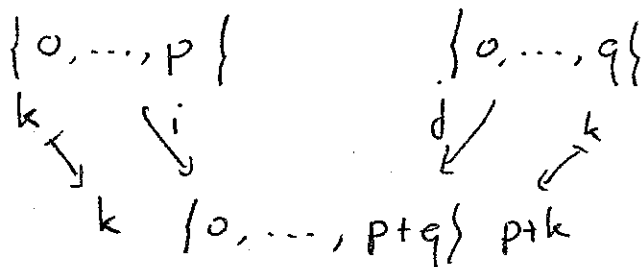
$$\text{Hom}(x_0, x_1) = \left( P_{C^0} \right)_* C^0(\varphi) \quad * \quad \tilde{X} \quad (\varphi = \alpha \dots)$$

Plus généralement,  $\varphi: \{0, \dots, m\} \rightarrow E$

$$\Omega_\varphi := \Omega_\varphi(x, \tilde{X}) = (P_{C_m^0})_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

a)  $\varphi: \{0\} \rightarrow E \Rightarrow \Omega_\varphi = *$

b)  $\forall p, q \geq 1$



$$\begin{array}{c}
 (j^*, i^*) \\
 \Omega_\varphi \xrightarrow{\quad} \Omega_{\varphi_j} \times \Omega_{\varphi_i} \quad \text{iso}
 \end{array}$$

Rappels :  $\psi: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_\varphi = (P_{C_m^0})_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & (P_{C_m^0})_* C^\circ(\psi)_* C^\circ(\psi)^* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \\
 & \searrow^{\psi^*} & \parallel \\
 & & (P_{C_n^0})_* C^\circ(\varphi\psi)^* \tilde{X} \\
 & & \parallel \\
 & & \Omega_{\varphi\psi}
 \end{array}$$

a) unite.  $x \in E$   $\alpha: \{0\} \rightarrow E$   $\{0,1\} \xrightarrow{\sigma_0^0} \{0\}$   
 $0 \mapsto x$

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(x, x) \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_x & \longrightarrow & \Omega_{\varphi \sigma_0^0} \\ & & (\sigma_0^0)^* \end{array}$$

b) composition:  $x_0, x_1, x_2 \in E$

$\alpha: \{0,1,2\} \rightarrow E, i \mapsto x_i$

$$\underline{\text{Hom}}(x_1, x_2) \times \underline{\text{Hom}}(x_0, x_1) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(x_0, x_2)$$

//

//

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{x \delta_2^0} \times \Omega_x & \xleftarrow{\sim} \Omega_x & \xrightarrow{(\delta_2^1)^*} \Omega_{\varphi \delta_2^1} \\ & \xleftarrow{((\delta_2^0)^*, (\delta_2^1)^*)} & \end{array}$$

c) inverse  $x_0, x_1 \in E$   $\alpha: \{0,1\} \rightarrow E$   $i \mapsto x_i$   
 $\tau$  transp.  $(0,1)$  dans  $\{0,1\}$ .

$$\underline{\text{Hom}}(x_0, x_1) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(x_1, x_0)$$

//

//

$$\Omega_x \xrightarrow{\tau^*} \Omega_{x \tau}$$

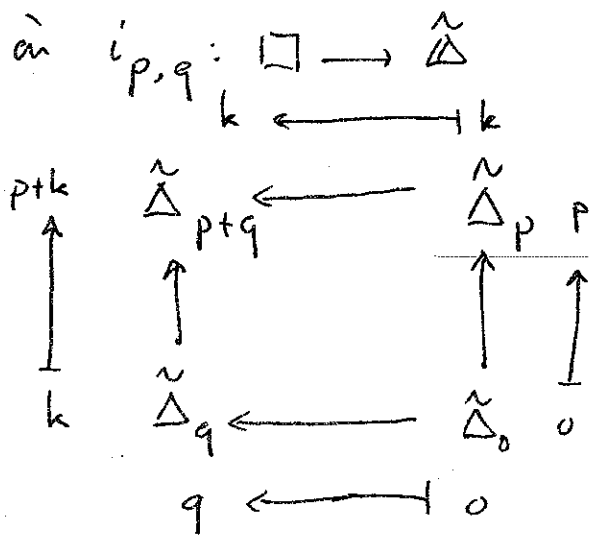
On obtient un groupoïde  $\pi(X, \tilde{X})$ .

$\mathbb{D}$ -groupoïde

$\hat{\Delta}$  sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Eus}$  dont les objets  
sont les  $\hat{\Delta}_m = \{0, \dots, m\}$ ,  $m \geq 0$ .

objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\hat{\Delta})$  t.q.  $\forall p, q \geq 1$

$i_{p,q}^* X$  ait un objet cartésien de  $\mathbb{D}(\square)$



Si  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(e)$  on note  $\pi X = p_{\hat{\Delta}}^* X \in \text{ob } \mathbb{D}(\hat{\Delta})$ .  
C'est un  $\mathbb{D}$ -groupoïde appelé le groupoïde  
fondamental.

$X$   $\mathbb{D}$ -groupoïde

$E$  un ensemble

" Famille de points base de  $X$  indexés par  $E$  "

$\tilde{\Delta}_E$  sous-catégorie pleine de  $C^0(E) \times \tilde{\Delta}$  telle que

$$\text{ob } \tilde{\Delta}_E = \text{ob } C^0(E) \times \tilde{\Delta}_0 \cup \{\omega\} \times \text{ob } \tilde{\Delta}$$

→ un objet  $\tilde{X}$  de  $\mathbb{D}(\tilde{\Delta}_E)$  t. q.

$$C^0(E) \xleftarrow{i} \tilde{\Delta}_E$$

$$\alpha \mapsto (\alpha, \tilde{\Delta}_0)$$

$$\tilde{\Delta} \xleftarrow{j} \tilde{\Delta}_E$$

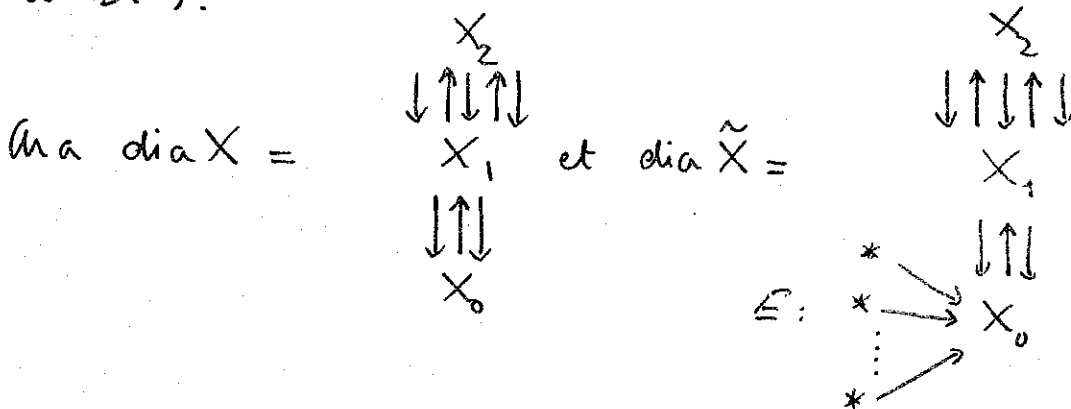
$$\tilde{\Delta}_m \mapsto (\omega, \tilde{\Delta}_m)$$

a)  $j^* \tilde{X} \simeq X$  par un iso donné

b)  $i^* X$  est une "famille de points base" de l'objet

$$X_0 = i^*_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0} X \simeq i^*_{\tilde{\Delta}_E, (\omega, \tilde{\Delta}_0)} \tilde{X}$$

Autrement-dit  $\forall \alpha \in E \quad \tilde{X}_{(\alpha, \tilde{\Delta}_0)} \simeq *$  objet final de  $\mathbb{D}(e)$ .



$$D_m = \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & \dots & (0,m) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (1,0) & (1,1) & \dots & (1,m) \\ & \nearrow d_0 & \nwarrow d_1 & \nearrow d_m \\ & & (m) & \end{array}$$

$$\varphi: \{0, \dots, m\} \rightarrow E.$$

$$j_\varphi: D_m^\circ \rightarrow \tilde{\Delta}_E$$

$$(0, k) \mapsto (\varphi(k), \tilde{\Delta}_0)$$

$$(1, k) \mapsto (\omega, \tilde{\Delta}_0)$$

$$(m) \mapsto (\omega, \tilde{\Delta}_m)$$

$$j_\varphi d_k: (\omega, \tilde{\Delta}_0) \rightarrow (\omega, \tilde{\Delta}_m)$$

induite par  $\tilde{\Delta}_0 \rightarrow \tilde{\Delta}_m$   
 $0 \mapsto k$

$$X_\varphi = (P_{D_m^\circ})_* j_\varphi^* \tilde{X}.$$

Si on a  $\psi: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$ , on définit

$$D_\psi: D_n \rightarrow D_m \quad (\varepsilon, k) \mapsto (\varepsilon, \psi(k)) \quad \text{si } \varepsilon=0,1, \quad 0 \leq k \leq n. \quad \text{On a } j_\varphi D_\psi^\circ = j_\varphi \psi$$

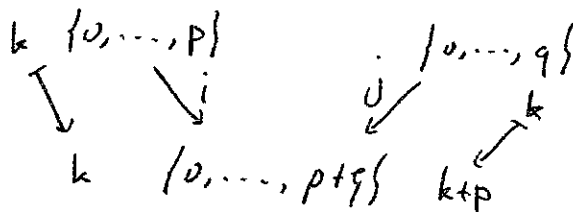
$$X_\varphi = (P_{D_m^\circ})_* j_\varphi^* \tilde{X} \longrightarrow (P_{D_m^\circ})_* (D_\psi^\circ)_* (D_\psi^\circ)^* j_\varphi^* \tilde{X}$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \\ & (P_{D_n^\circ})_* j_\varphi^* \tilde{X} & \\ & \parallel & \\ \psi^* & \searrow & X_{\varphi\psi} \end{array}$$

On définit un groupoïde enrichi "de la manière amplifiée,"  
i.e.

a)  $\varphi: \{0\} \rightarrow E \quad X_\varphi \cong *$  objet final de  $\mathbb{D}(E)$

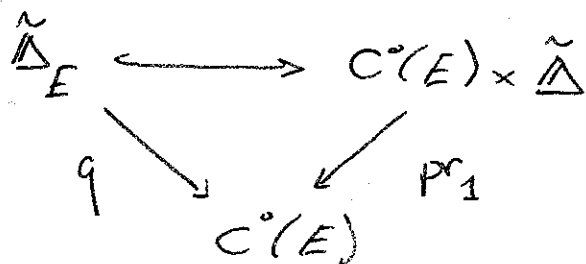
b)  $\forall p, q \geq 1$



$$X_\varphi \xrightarrow{(j^*, i^*)} X_{\varphi_j} \times X_{\varphi_i} \quad \text{iso.}$$

On appelle ce groupoïde enrichi par  $\mathbb{D}(E)$  le  
~~groupoïde~~ groupoïde enrichi par le  $\mathbb{D}$ -groupoïde  $X$  et  
la famille de points base  $\tilde{X}$ .

Soit  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(E)$ ,  $E$  un ensemble,  $\tilde{X}$  une  
famille de points base de l'objet  $X$  ( $\tilde{X} \in \text{ob } \mathbb{D}(C^0(E))$ ).



On vérifie que  $q^* \tilde{X}$  est une famille de points base  
du  $\mathbb{D}$ -groupoïde fondamental  $\pi X = p_{\tilde{\Delta}}^* X$ .

Le groupoïde enrichi  $\pi(X, \tilde{X})$  de  $X$  rel. à  $\tilde{X}$   
 est le groupoïde enrichi défini par le 1D-groupoïde  
 fondamental  $\pi X = p_{\Delta}^* X$  et la famille de  
 points base  $q^* \tilde{X}$ .

## Structure prétriangulée.

- $\mathcal{D}$  dérivateur faible à gauche de domaine  $\mathcal{D}ia$ .

Axiomes: Der 1, Der 2, Der 3g, Der 4g.

Rappel: Si  $u: A \rightarrow B$  dans  $\mathcal{D}ia$  est pleinement fidèle alors  $u_*: \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(B)$  est pleinement fidèle et  $\forall a \in \text{ob } A$ , pour  $X \in \text{ob } \mathcal{D}(A)$ ,  $b = u(a)$

$$(u_* X)_b = i_{B,b}^* u_* X \xrightarrow{\sim} i_{A,a}^* X = X_a.$$

### Proposition 1:

Si  $u: A \rightarrow B$  est une immersion fermée dans  $\mathcal{D}ia$  (i.e. un crible) alors l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle  $u_*$  est formée des  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}(B)$  tels que  $\forall b \in \text{ob } B - \text{ob } A$ ,  $Y_b \simeq *$  objet final de  $\mathcal{D}(c)$ .

Démonstration:

Soit  $X \in \text{ob } \mathcal{D}(A)$ ,  $(u_* X)_b = i_{B,b}^* u_* X$ .

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \llcorner & \downarrow u \\ e & \longrightarrow & B \\ & i_{B,b} & \end{array}$$

Or  $b \notin \text{ob } A \Leftrightarrow A/b = \emptyset$ . Donc si  $b \notin \text{ob } A$  on a  $(u_* X)_b = P_{\emptyset}^*(qqch) \simeq$  objet final.

Réciproquement, soit  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}(B)$  tel que  $\forall b \in \text{ob } B - \text{ob } A$   
 $Y_b \simeq$  objet final. Il suffit de montrer que

$$Y \longrightarrow u_* u^* Y$$

est un isomorphisme. Par Der 2 il suffit de voir que  
 $\forall b \in \text{ob } B - \text{ob } A \quad Y_b \xrightarrow{\sim} (u_* u^* Y)_b$  et que  
 $u^* Y \xrightarrow{\sim} u^* u_* u^* Y$ . La première assertion  
 résulte de ce qui précède, et la seconde de la pleine  
 fidélité.

Proposition 2 :

Soit 
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{k} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{\ell} & B \end{array}$$
 un carré cartésien dans  $\text{Dia}$   
 tel que  $\ell$  soit une immersion  
 ouverte (i.e. un crible).

Alors le morphisme de changement de base

$$\ell^* u_* \longrightarrow u'_* k^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration:

Par Der 2, il suffit de le tester dans les fibres.

Soit  $b' \in \text{ob } B'$  et  $b = \ell(b')$ . Comme  $\ell$  est un crible,

$B'/b' \simeq B/b$ . On a deux carrés cartésiens,

$$\begin{array}{ccccc}
 A'/b' & \rightarrow & A' & \xrightarrow{k} & A \\
 \downarrow & & u' \downarrow & & \downarrow u \\
 B'/b' & \rightarrow & B' & \xrightarrow[e]{} & B
 \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme canonique  $A'/b' \simeq A/b$ .  
 On obtient:

$$\begin{array}{ccc}
 i_{B',b'}^* \ell^* u_* & \longrightarrow & i_{B',b'}^* u'_* k^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 i_{B,b}^* u_* & & (P_{A'/b'})_* j_{u',b'}^* k^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 (P_{A/b})_* j_{u,b}^* & \simeq & (P_{A'/b'})_* (k j_{u',b'})^*
 \end{array}$$

Désormais on supposera que  $\mathbb{D}$  satisfait aussi à l'axiome

Der 6g (a) Si  $u: A \rightarrow B$  est une immersion ouverte dans  $\mathbb{D}$ , alors le foncteur  $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$  admet un adjoint à gauche noté  $u_!$ .

### Proposition 2'

Soit  $A' \xrightarrow{k} A$  un carré cartésien dans  $\text{Dia}$   
 $\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{k} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{\ell} & B \end{array}$  tel que  $u$  soit une immersion ouverte.

Alors le morphisme de changement de base

$$k_! u'^* \rightarrow u^* \ell_! \text{ est un isomorphisme.}$$

Démonstration:

Cela résulte de la proposition 2 par transposition.

### Proposition 3

Soit  $u: A \rightarrow B$  une immersion ouverte. Alors le foncteur  $u_!: \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(B)$  est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}(B)$  tels que  $\forall b \in \text{ob } B - \text{ob } A$   $Y_b$  soit un objet initial de  $\mathcal{D}(e)$ .

Remarque: Der 6 g a) implique que pour tout objet  $I$  de  $\text{Dia}$ ,  $\mathcal{D}(I)$  admet un objet initial, à savoir  $\mathcal{J}_I(*)$  où  $\mathcal{J}_I: * \rightarrow I$  est l'inclusion canonique, et  $*$  l'unique objet de  $\mathcal{D}(B) = e$  ( $\mathcal{J}$  étant une immersion ouverte).

Démonstration de la prop. 3. Soit  $X \in \text{Ob } \mathbb{D}(A)$ .

Pour  $b \in \text{Ob } B$  on a :

$$\begin{array}{ccc}
 A_b & \xrightarrow{k} & A \\
 P_{A_b} \downarrow & \text{cart.} & \downarrow u \\
 e & \xrightarrow{i_{B,b}} & B
 \end{array}$$

Comme  $u$  est une immersion ouverte, en vertu de la prop. 2' on a  $P_{A_b}! \xrightarrow{k^*} i_{B,b}^* u!$ .

Si  $b \notin \text{ob } A$ , alors  $A_b = \emptyset$  et donc  $(u! X)_b = P_{\emptyset}!(*)$  est un objet initial de  $\mathbb{D}(e)$ , et si  $b = u(a)$ ,  $a \in \text{ob } A$ , alors  $A_b = e$  et  $P_{A_b} = 1_e$ , d'où  $(u! X)_b \simeq i_{A,a}^* X = X_a$ . Cela permet de montrer la proposition.

Déormais, on suppose aussi que l'axiome suivant est vérifié :

Des 6 g (b) Si  $u: A \rightarrow B$  est une immersion fermée, le foncteur  $u_*: \mathbb{D}(A) \rightarrow \mathbb{D}(B)$  admet un adjoint à droite  $u^!: \mathbb{D}(B) \rightarrow \mathbb{D}(A)$ .

Remarque: Cela implique que les catégories  $\mathbb{D}(I)$  admettent un objet nul (à la fois final et initial)

- Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{D}(e)$ , et soit  $E$  un ensemble.  
Alors il existe une unique (à isomorphisme unique près) famille de points base de  $X$  indexée par  $E$ .

Soit  $\tilde{X}$  une telle famille ( $\tilde{X} \in \text{ob } \mathcal{D}(C^0(E))$ )

$$e \xrightarrow{i=i, C^0(E), \omega} C^0(E), * \mapsto \omega$$

est une immersion ouverte.

Alors  $i, i^* X \rightarrow X$  est un isomorphisme.

Pour  $n \geq 0$ , on pose  $\Omega_n = (P_{C_m^0} \ast (i_{C_m^0, \omega}))!$

Pour  $\psi: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$  on obtient

$$\begin{array}{ccc} \Omega_m = P_{C_m^0} \ast i_{C_m^0, \omega}! & \longrightarrow & P_{C_m^0} \ast C^0(\psi) \ast C^0(\psi)^* i_{C_m^0, \omega}^* \\ & \searrow \psi^* & \parallel \\ & & P_{C_m^0} \ast i_{C_n^0, \omega}^* \\ & & \parallel \\ & & \Omega_n \end{array}$$

On a

a)  $\Omega_0 \cong *$  objet nul.

b)  $\forall p, q \geq 1 \quad \Omega_{p+q} \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q \times \Omega_p$

On pose  $\Omega = \Omega_1$ .

Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}(C)$ ,  $\Omega X$  est un objet groupe.

a) unité:

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \Omega X \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_0 X & \xrightarrow{(\sigma_0)^*} & \Omega_1 X \end{array} \quad (\text{on n'a pas le choix...})$$

b) multiplication

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{\mu_X} & \Omega X \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_1 X \times \Omega_1 X & \xleftarrow{\sim} \Omega_2 X \xrightarrow{(\delta_2')^*} & \Omega_1 X \\ & ((\delta_2^0)^*, (\delta_2^1)^*) & \end{array}$$

c) inverse:

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_1 X & \xrightarrow{\tau^*} & \Omega_1 X \end{array}$$

où  $\tau$  est la transposition  $(0, 1)$ .

Action de  $\Omega$  (base) sur la fibre homotopique.

Soit  $X \in \text{ob } \mathcal{D}(\Delta_1^0) \quad \Delta_1^0 = C_0^0$

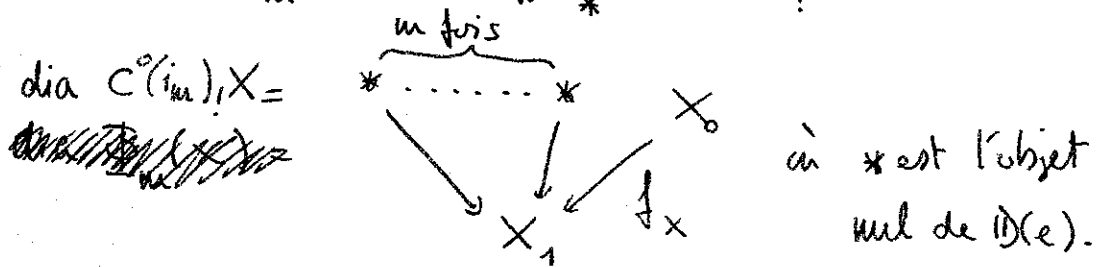
$\text{dia } X = X_0 \xrightarrow{f_x} X_1$

$\{0\} \xrightarrow{i_m} \{0, \dots, m\} \rightsquigarrow C_0 \xrightarrow{C(i_m)} C_m \text{ (imm. fermée)}$   
 $0 \mapsto 0$

On obtient une immersion inverse qui est ouverte

$C_0 \xrightarrow{C(i_m)^0} C_m^0$

On pose  $\Phi_m(X) = (P_{C_m^0})_* C^0(i_m)_! X$



a)  $\Phi_0(X) = X_0$

$\Phi(X) := \Phi_1(X)$  est la fibre homotopique de  $X$ .

b)  $\Phi_{p+q}(X) \xrightarrow{\sim} \Omega_q(X_1) \times \Omega_p(X)$   
 ( $j^*, i^*$ )

On définit un morphisme  $a_x$  comme suit:

$\Omega(X_1) \times \Phi(X) \xrightarrow{a_x} \Phi(X)$   
 $\parallel$   
 $\Omega_1(X_1) \times \Phi_1(X) \xleftarrow{\sim} \Phi_2(X) \xrightarrow{\sim} \Phi_1(X)$   
 ( $(\delta_2^0)^*, (\delta_2^1)^*$ )       $(\delta_2^1)^*$

Cela définit une action du groupe  $\Omega(X_1)$  sur  $\Phi(X)$ .

i.e :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(X_1) \times \Omega(X_1) \times \Phi(X) & \xrightarrow{1_{\Omega(X_1)} \times a_x} & \Omega(X_1) \times \Phi(X) \\
 \downarrow \mu_{X_1} \times 1_{\Phi(X)} & \wr & \downarrow a_x \\
 \Omega(X_1) \times \Phi(X) & \xrightarrow{a_x} & \Phi(X)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 * \times \Phi(X) & \xrightarrow{\eta_{X_1} \times 1_{\Phi(X)}} & \Omega(X_1) \times \Phi(X) \\
 \searrow \wr & \wr & \swarrow a_x \\
 & \Phi(X) &
 \end{array}$$

Remarque:  $\Omega$  définit un foncteur de  $\mathbb{D}(e)$  vers la catégorie des objets groupes de  $\mathbb{D}(e)$ .

13 Juin 2001

Une  $\Omega$ -catégorie est un couple  $(\mathcal{C}, \Omega)$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie admettant des produits finis et  $\Omega$  est un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des objets groupes de  $\mathcal{C}$  qui commute aux produits finis. La donnée de  $\Omega$  équivaut à la donnée d'un foncteur  $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  commutant aux produits finis et muni d'une structure de groupe comme objet de  $\underline{\text{End}}(\mathcal{C})$ . On a alors deux morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\mu} & \Omega \\ \uparrow & & \\ 1_{\mathcal{C}} & \rightarrow & \Omega \end{array}$$

faisant de  $\Omega$  un groupe.

Exercice:

Montrer que  $\forall X \in \text{ob } \mathcal{C}$ ,  $\Omega^2 X$  est un objet groupe commutatif de  $\mathcal{C}$ .

Un triangle dans une  $\Omega$ -catégorie est un diagramme

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \quad \Omega Z \times X \xrightarrow{\alpha} X$$

où  $\alpha$  est une action de  $\Omega Z$  sur  $X$ .

Si on a deux triangles

$$\begin{array}{ccc} X \rightarrow Y \rightarrow Z & \Omega Z \times X \rightarrow X \\ X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' & \Omega Z' \times X' \rightarrow X' \end{array}$$

Un morphisme du premier vers le second est un diagramme commutatif)

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & & \Omega Z \times X & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \Omega h \times f & & \downarrow f \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & & \Omega Z' \times X' & \longrightarrow & X'
 \end{array}$$

On obtient ainsi la catégorie des triangles de  $(\mathcal{C}, \Omega)$ .

Une catégorie prétriangulée est une  $\Omega$ -catégorie admettant un objet nul et munie d'une classe de triangles appelés triangles distingués, satisfaisant aux axiomes suivants:

TR1 (a) tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué

(b) pour toute flèche  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  il existe un triangle distingué de la forme

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \quad \Omega Z \times X \rightarrow X$$

(c) le triangle

$$X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow * \quad \Omega(*) \times X \cong X \xrightarrow{1_X} X$$

" objet nul

est distingué

Si  $\mathcal{T} = X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z$   $\Omega Z \times X \xrightarrow{a} X$  est un triangle  
 on en obtient un second

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{b} \Omega Z$$

où on définit  $u$  par

$$\begin{array}{ccc} \Omega Z & \xrightarrow{\binom{1}{\Omega Z}, 0} & \Omega Z \times X \\ & \searrow u & \downarrow a \\ & & X \end{array} \quad \text{à} \quad \begin{array}{ccc} \Omega Z & \xrightarrow{0} & X \\ & \searrow & \nearrow * \\ & & X \end{array}$$

et  $b$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y \times \Omega Z & \xrightarrow{\Omega w \times 1_{\Omega Z}} & \Omega Z \times \Omega Z \xrightarrow{\tau} & \Omega Z \times \Omega Z \\ & \searrow b & & \downarrow 1_{\Omega Z} \times I_Z \\ & & & \Omega Z \times \Omega Z \\ & & & \downarrow \mu_Z \\ & & & \Omega Z \end{array}$$

$\tau$  est la volte échangeant l'ordre des termes  
 $I_Z$  est le morphisme correspondant à l'inverse  
 $\mu_Z$  est la multiplication.

TR 2 Si  $\mathcal{T}$  est un triangle distingué, alors  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  en est un aussi.

TR 3 Si on a un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont des triangles distingués

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Omega Z \times X & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \Omega h \times f & & \downarrow f \\
 \Omega Z' \times X' & \longrightarrow & X'
 \end{array}$$

il existe  $f$  tel que  $(f, g, h)$  soit un morphisme de triangles

TR 4 Si on a un triangle commutatif de  $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1 & \\
 w_2 \nearrow & & \searrow w_0 \\
 X_0 & \xrightarrow{w_1} & X_2
 \end{array}$$

et des triangles distingués

$$Z_2 \xrightarrow{v_2} X_0 \xrightarrow{w_2} X_1$$

$$\Omega X_1 \times Z_2 \xrightarrow{a_2} Z_2$$

$$Z_1 \xrightarrow{v_1} X_0 \xrightarrow{w_1} X_2$$

$$\Omega X_2 \times Z_1 \xrightarrow{a_1} Z_1$$

$$Z_0 \xrightarrow{v_0} X_1 \xrightarrow{w_0} X_2$$

$$\Omega X_2 \times Z_0 \xrightarrow{a_0} Z_0$$

Alors il existe un triangle distingué

$$Z_2 \xrightarrow{w_0} Z_1 \xrightarrow{w_2} Z_0 \quad \Omega Z_0 \times Z_2 \xrightarrow{b} Z_2$$

tel que  $(1_{Z_2}, v_1, v_0)$ ,  $(m_0, 1_{X_0}, w_0)$  et  $(m_2, w_2, 1_{X_2})$  soient des morphismes de triangle.

$$\begin{array}{ccccc}
 & m_0 & & m_2 & \\
 Z_2 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 \\
 \downarrow 1_{Z_2} & & \downarrow v_1 & & \downarrow v_0 \\
 Z_2 & \xrightarrow{v_2} & X_0 & \xrightarrow{w_2} & X_1 \\
 m_0 \downarrow & & \downarrow 1_{X_0} & & \downarrow w_0 \\
 Z_1 & \xrightarrow{v_1} & X_0 & \xrightarrow{w_1} & X_2 \\
 m_1 \downarrow & & \downarrow w_2 & & \downarrow 1_{X_2} \\
 Z_0 & \xrightarrow{v_0} & X_1 & \xrightarrow{w_0} & X_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Omega Z_0 \times Z_2 & \xrightarrow{b} & Z_2 \\
 \Omega v_0 \times 1_{Z_2} \downarrow & & \downarrow 1_{Z_2} \\
 \Omega X_1 \times Z_2 & \xrightarrow{a_2} & Z_2 \\
 \Omega w_0 \times m_0 \downarrow & & \downarrow m_0 \\
 \Omega X_2 \times Z_1 & \xrightarrow{a_1} & Z_1 \\
 \Omega 1_{X_2} \times m_1 \downarrow & & \downarrow m_1 \\
 \Omega X_2 \times Z_0 & \xrightarrow{a_0} & Z_0
 \end{array}$$

Dans la suite, on se fixe un dérivateur faible à gauche de domaine  $\text{Dica } \mathbb{D}$ .

On suppose que  $\mathbb{D}$  satisfait des 6  $\gamma$  (a) et (b).

Conséquences:

Pour tout objet  $A$  de  $\text{Dica}$ ,  $\mathbb{D}(A)$  admet un objet nul.

Si  $u: A \rightarrow B$  est une immersion ouverte (resp. fermée)

$u_!$  (resp.  $u_*$ ) est pleinement fidèle, et son image

essentielle est formée des  $Y \in \text{ob } \mathbb{D}(B)$  tels que  $\forall b \in \text{ob } B, \text{ob } A$

$Y_b \cong * = \text{objet nul}$ .

Si on se donne un carré cartésien dans  $\mathcal{D}ia$

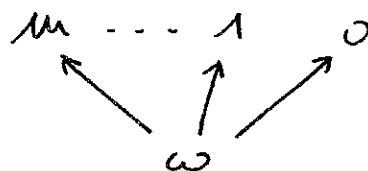
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{k} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{\ell} & B \end{array}$$

tl que  $u$  soit une immersion ouverte, alors le morphisme de changement de base

$$u'_! k^* \rightarrow \ell^* u_!$$

est un isomorphisme.

On rappelle que  $C_m^0$  est la catégorie



Si  $\{0, \dots, n\} \xrightarrow{\varphi} \{0, \dots, m\}$  est une application, on obtient un foncteur  $C^0(\varphi): C_n^0 \rightarrow C_m^0$ .

$$\ell \mapsto \varphi(\ell) \text{ si } \ell \neq \omega \\ \omega \mapsto \omega$$

$$\text{On a } C_0^0 = \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \omega \end{array} \simeq \Delta_1^0$$

$$C_0^1 = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \\ \uparrow & \nearrow & \\ \omega & & \end{array} \simeq \begin{array}{ccc} (1,0) & & (0,1) \\ \uparrow & \nearrow & \\ (1,1) & & \end{array} = \perp$$

On définit  $\Omega := (P_{C_1^0})_* (i_{C_1^0, \omega})_!$   ~~$(P_{\Delta})_* (i_{\Delta, \omega})_!$~~

$(i_{C_1^0, \omega}$  est une immersion ouverte)  $\simeq i_{\square, (0,0)}^* i_{\Delta, (1,1)}^* (i_{\Delta^0, \omega})_!$

On obtient  $\Omega \simeq P_{\Delta}^* i_{\Delta, (1,1)}!$   
 $\simeq i_{\square, (0,0)}^* i_{\Delta, (1,1)}^* i_{\Delta, (1,1)}!$

On définit  $\tilde{\Omega} = i_{\Delta, (1,1)}^* i_{\Delta, (1,1)}!$

Si  $X \in \text{ob}(\mathcal{D}(e))$   $\tilde{\Omega}X$  est homotopiquement cartésien

et on a

$$\text{dia}(\tilde{\Omega}X) = \begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a aussi défini  $\Omega_m := (P_{C_m^0})_* (i_{C_m^0, \omega})_!$

Si  $\{0, \dots, n\} \xrightarrow{\varphi} \{0, \dots, m\}$  est une application, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} i_{C_n^0, \omega} & \downarrow e & \downarrow e \\ C_n^0 & \xrightarrow{\quad} & C_m^0 \end{array}$$

$C^0(\varphi)$

On a donc un isomorphisme canonique

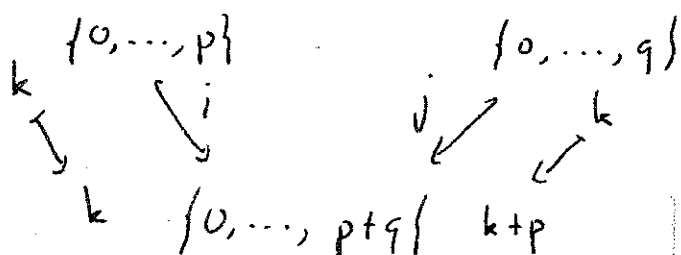
$$(i_{C_n^0, \omega})_! \xrightarrow{\sim} C^0(\varphi)^* (i_{C_m^0, \omega})_!$$

On obtient un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_m = P_{C_m^*} (i_{C_m, \omega})! & \longrightarrow & P_{C_m^*} C^*(\varphi)_* C^*(\varphi)^* (i_{C_m, \omega})! \\
 & & \parallel \\
 & & P_{C_n^*} (i_{C_n, \omega})! \\
 & & \parallel \\
 & & \Omega_n
 \end{array}$$

$\varphi^*$

Pour  $p, q \geq 1$



$$\Omega_{p+q} \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q \times \Omega_p \text{ est un isomorphisme.}$$

On a  $\Omega_1 = \Omega$ . La multiplication  $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$  est définie par

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\mu} & \Omega \\
 \parallel & & \parallel \\
 \Omega_1 \times \Omega_1 & \xleftarrow{(\delta_2^0, \delta_2^2)^*} \Omega_2 \xrightarrow{\delta_2^1} & \Omega_1
 \end{array}$$

l'inverse  $\Omega \xrightarrow{I} \Omega$  est définie par

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{I} & \Omega \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_1 & \xrightarrow{\tau^*} & \Omega_1 \end{array}$$

où  $\tau$  est la transposition  $(0, 1)$  dans  $\{0, 1\}$ .

Proposition:

Le foncteur  $\Omega$  commute aux produits finis.

Démonstration:

$$\Omega = (P_{C_i^0})_* (i_{C_i^0, \omega})_!$$

Il suffit de vérifier le

Lemme:

Soit  $u: A \rightarrow B$  une immersion ouverte dans  $\mathcal{D}ia$ .

Alors  $u_!: \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(B)$  commute aux produits

finis.

Démonstration:

$$\text{On a } u_!(*) = *.$$

Soient  $X, Y \in \mathcal{D}\mathcal{D}(A)$ . Alors  $u_!(X \times Y) \rightarrow u_!X \times u_!Y$  est un isomorphisme (on le vérifie fibre à fibre).

Rappel: Pour  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta, \circ)$  on a défini

$$\mathbb{F}_m X = (P_{C_m^\circ})_* C^\circ(i_m)_! X$$

où  $i_m$  est l'inclusion  $\{0\} \hookrightarrow \{0, \dots, m\}$  (et  $C^\circ(i_m)$  est une immersion ouverte  $\overset{0}{\hookrightarrow} \overset{0}{\circ}$ ).

Pour  $\{0, \dots, n\} \xrightarrow{\varphi} \{0, \dots, m\}$

Si  $\varphi^{-1} 0 = \{0\}$  (resp.  $0 \notin \text{Im } \varphi$ ) alors

$$\begin{array}{ccc} C_n^\circ = C_n^\circ & & e \xrightarrow{i_{C_n^\circ, \omega}} C_n^\circ \\ \downarrow C^\circ(i_n) & & \downarrow i_{C_n^\circ, \omega} \\ C_n^\circ & \xrightarrow{C^\circ(\varphi)} & C_m^\circ \end{array} \quad \left( \text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} & & \downarrow C^\circ(i_m) \\ C_n^\circ & \xrightarrow{C^\circ(\varphi)} & C_m^\circ \end{array} \right)$$

est cartésien. On note  $\text{dia } X = X_0 \xrightarrow{\downarrow X} X_1$ .

Par un procédé analogue au cas de  $\Omega_m$  on obtient

$$\varphi^* : \mathbb{F}_m X \rightarrow \mathbb{F}_n X.$$

$$\left( \text{resp. } \varphi^* : \mathbb{F}_m X \rightarrow \Omega(X_1) \right).$$

On a aussi un isomorphisme pour  $p, q \geq 1$

$$\mathbb{F}_{p+q} X \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q(X_1) \times \mathbb{F}_q X.$$

On obtient une action de groupe (ici  $\Phi = \Phi_1$ )

$$\Omega X_1 \times \Phi X \xrightarrow{a_x} \Phi X$$

||

$$\Omega_1 X_1 \times \Phi_1 X \xleftarrow{\sim} \Phi_2 X \xrightarrow{\quad} \Phi_1 X$$

$(\delta_2^0, \delta_2^2)$                        $\delta_2^1$

$$\text{On a } \Phi X = (P_{C_1^0})_* C^0(i_1)_!$$

$$\simeq (P_{\perp})_* k_!$$

On a

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{i_{\Delta_1, 1} \times 1_{\Delta_1^0}} & \square \\ & \searrow \alpha & \nearrow i_{\perp} \\ k & & \perp \end{array}$$

On obtient  $\Phi X \simeq i_{\square, (0,0)}^* (i_{\perp})_* k_! X$ .

On pose  $\tilde{\Phi} X = i_{\perp, *} k_! X$ . On a

$$\text{dia } \tilde{\Phi} X = \begin{array}{ccc} \Phi X & \xrightarrow{g_x} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \tau_* = \rho_x \\ * & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

Définition:

Un triangle standard est un triangle de la forme

$$\tau_X = \mathbb{F}X \xrightarrow{g_X} X_0 \xrightarrow{f_X} X_1 \quad \Omega X_1 \times \mathbb{F}X \xrightarrow{a_X} \mathbb{F}X$$

pour un  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_1^0)$ .

Un triangle distingué de  $\mathbb{D}(e)$  est un triangle isomorphe à un triangle standard.

On suppose désormais que  $\mathbb{D}$  satisfait en outre l'axiome

ser 5 pour tout objet  $A$  de  $\text{Dob}$ , le foncteur

$$\mathbb{D}(\Delta_1^0 \times A) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, \mathbb{D}(A)) = \mathbb{F} \mathbb{D}(A)$$

est plein et essentiellement surjectif.

Théorème:

La catégorie  $\mathbb{D}(e)$  munie de  $\Omega$  et des triangles distingués est une catégorie prétriangulée.

Démonstration:

TR1 (a) évident.

TR1 (b) soit  $T_0 \xrightarrow{f} T_1$  une flèche de  $\mathbb{D}(e)$ .

Par Der 5,  $\mathbb{D}(\Delta_i^0) \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P} \mathbb{D}(e)$  est essentiellement surjectif et donc il existe  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_i^0)$  tel que  $\text{dia } X \simeq (T_0 \rightarrow T_1)$  i.e on a un carré

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xleftarrow{h_0} & T_0 \\ \downarrow f_x & \curvearrowright & \downarrow \downarrow \\ X_1 & \xleftarrow[h_1]{} & T_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{On a } \tau_x = \mathbb{F}X & \xrightarrow{g_x} & X_0 & \xrightarrow{f_x} & X_1 & \Omega_{X_1} \times \mathbb{F}X & \xrightarrow{a_x} & \mathbb{F}X \\ & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\ & & \uparrow 1_{\mathbb{F}X} & & \uparrow h_0 & & \uparrow \Omega_{h_1} \times 1_{\mathbb{F}X} & & \uparrow 1_{\mathbb{F}X} \\ & & \mathbb{F}X & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & T_1 & \Omega_{T_1} \times \mathbb{F}X & \longrightarrow & \mathbb{F}X \\ & & & & \downarrow h_0^{-1} g_x & & \downarrow & & & \downarrow a_x (\Omega_{h_1} \times 1_{\mathbb{F}X}) \end{array}$$

TR1 (c) soit  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(e)$ . On considère  $(i_{\Delta_i^0, 0})_* X$ .

$$\text{On a } \text{dia } (i_{\Delta_i^0, 0})_* X = X \rightarrow *$$

$$\text{Alors le triangle } X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow * \quad \Omega(*) \times X = X \xrightarrow{1_X} X$$

est isomorphe à  $\tau_{(i_{\Delta_i^0, 0})_* X}$ .

TR 2 En vertu de TR 1 (a) il suffit de montrer que si  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_i)$ ,  $R(\tau_x)$  est un triangle distingué.

$$\text{On a } \tau_x = \mathbb{F}X \xrightarrow{g_x} X_0 \xrightarrow{j_x} X_1 \quad \Omega X_1 \times \mathbb{F}X \xrightarrow{a_x} \mathbb{F}X$$

$$R(\tau_x) = \Omega X_1 \xrightarrow{h_x} \mathbb{F}X \xrightarrow{g_x} X_0 \quad \Omega X_0 \times \Omega X_1 \xrightarrow{b_x} \Omega X_1$$

$$\text{on a } h_x = a_x \begin{pmatrix} 1 & \\ & \Omega X_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b_x = M_{X_1} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \Omega X_1 \end{pmatrix} \tau \begin{pmatrix} \Omega \mathbb{F}X & \\ & 1_{\Omega X_1} \end{pmatrix}$$

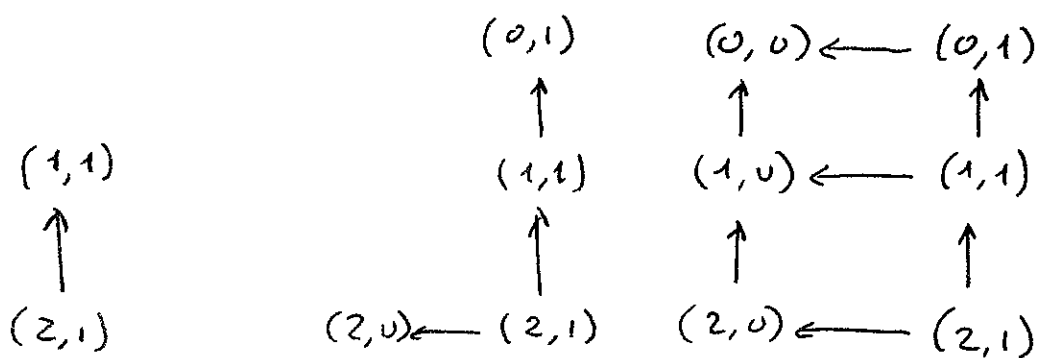
On a un objet h-cart.  $\hat{\mathbb{F}}X$  de  $\mathbb{D}(\square)$  tel que

$$\text{dia } \hat{\mathbb{F}}X = \begin{array}{ccc} \mathbb{F}X & \xrightarrow{g_x} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

$$\text{On pose } Y = \begin{pmatrix} i & & & \\ & \Delta_i & & \\ & & 0 & \times 1 \\ & & & \Delta_i \end{pmatrix}^* \hat{\mathbb{F}}X.$$

$$\text{On a donc } \text{dia } Y = \left( \mathbb{F}X \xrightarrow{g_x} X_0 \right).$$

$$\text{On a un isomorphisme } \tau_Y \cong R(\tau_x).$$



$$\Delta_1^0 \simeq A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} \Delta_2^0 \times \Delta_1^0$$

imm. ouverte

On a vu que  $(\delta_2^\varepsilon \times 1_{\Delta_1^0})^* v_* u_! X$  est h. cart. pour  $\varepsilon = 0, 1, 2$ .

On a

$$\text{dia}(v_* u_! X) = \begin{array}{ccc} \Phi Y & & \\ \downarrow \scriptstyle R & & \\ \Omega X_1 & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \scriptstyle h = g_X & \downarrow \\ \Phi X & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle p_X \\ * & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

On montre que  $(\varphi, 1_{\Phi X}, 1_{X_0})$  est un isomorphisme de triangle (où  $\varphi$  est l'isomorphisme canonique  $\Phi Y \xrightarrow{\sim} \Omega X_1$ ).

TR3 Il suffit de le montrer pour des triangles standard.

On se donne  $X, Y \in \text{ob } \mathcal{D}(\Delta_i^0)$  et deux  $\tau_X$  et  $\tau_Y$ .

ainsi que un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_X} & X_1 \\ h_0 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ Y_0 & \xrightarrow{f_Y} & Y_1 \end{array}$$

Der 5 implique que  $\mathcal{D}(\Delta_1^0) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}(c))$  est plein.  
 On peut donc relever  $(h_0, h_1)$  en une flèche  $X \xrightarrow{h} Y$ .  
 On obtient un morphisme de triangles  $\tau_X \xrightarrow{\tau_h} \tau_Y$   
 par functorialité et  $\tau_h = (\overline{\Phi}h, h_0, h_1)$ .

TR4 soit  $X$  un objet de  $\mathcal{D}(\Delta_2^0)$ .

$$\text{dia } X = \begin{array}{ccc} & X_1 & \\ \nearrow h_2 & & \searrow h_0 \\ X_0 & \longrightarrow & X_2 \\ & \downarrow h_1 & \end{array}$$

$$\text{On note } X_{10} = \delta_2^2 * X$$

$$X_{20} = \delta_2^1 * X$$

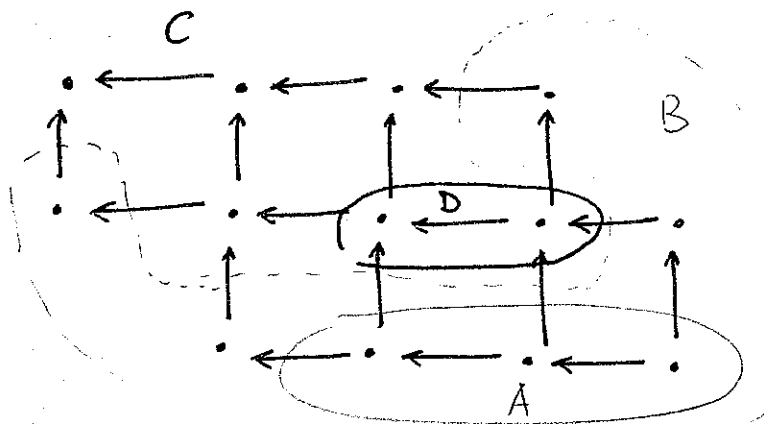
$$X_{21} = \delta_2^0 * X$$

On obtient trois triangles:

$$\tau_{X_{10}} = \phi(X_{10}) \xrightarrow{g_2} X_0 \xrightarrow{h_2} X_1 \quad \Omega X_1 = \overline{\Phi}(X_{10}) \xrightarrow{g_2} \overline{\Phi}(X_{10})$$

$$\tau_{X_{20}} = \mathbb{F}(X_{20}) \xrightarrow{g_1} X_0 \xrightarrow{f_1} X_2 \quad \Omega X_2 \times \mathbb{F}(X_{20}) \xrightarrow{a_1} \mathbb{F}(X_{20})$$

$$\tau_{X_{21}} = \mathbb{F}(X_{21}) \xrightarrow{g_0} X_1 \xrightarrow{f_0} X_2 \quad \Omega X_2 \times \mathbb{F}(X_{21}) \xrightarrow{a_0} \mathbb{F}(X_{21})$$



$$\Delta_2^0 \simeq A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{u} C \quad D \xrightarrow{i} C$$

imm.  
ouverte

An cursive:

$$u_* k_! X \quad \begin{array}{c} y_0 \searrow \\ \downarrow \\ x \searrow \\ y_1 \searrow \\ \downarrow \\ y_2 \searrow \\ \downarrow \\ z_2 \rightarrow * \\ \downarrow \\ z_1 \rightarrow * \\ \downarrow \\ X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \end{array}$$

dia  $u_* k_! X =$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ z_1 & \longrightarrow & z_0 & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 \end{array}$$

Grâce à la "machine à fabriquer des carrés h-cart.", tous les carrés visibles sont h-cart.

$$\text{On a donc } Z_0 = \Phi(X_{21}) \quad Y_2 = \Omega X_2$$

$$Z_1 = \Phi(X_{20}) \quad Y_1 = \Omega X_1$$

$$Z_2 = \Phi(X_{10}) \quad Y_0 = \Omega Z$$

On pose  $Z_{01} = i_* u_* k_! X$ . On a dia  $Z_{01} = Z_1 \rightarrow Z_0$

Ainsi  $Z_{201} = Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0 \quad \Omega Z_0 \times Z_2 \rightarrow Z_2$

21 juin 2001.

Soit

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1 & \\
 \nearrow^{w_2} & \circlearrowleft & \searrow^{w_2} \\
 X_0 & & X_2 \text{ dans } \mathbb{D}(e) \\
 \searrow_{w_1} & & 
 \end{array}$$

Alors il existe  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_2^0)$  t.q. dia  $X$  suit le diagramme ci-dessus.

On a

Der 5.  $\forall A$  dans Dia  $\mathbb{D}(\Delta_1^0 \times A) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, \mathbb{D}(A))$  est plein et essentiellement surjectif.

Der 5  $A=e$  ess. surj.  $\Rightarrow \exists X_{10} \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_1^0)$

t.q. dia  $X_{10} \simeq X_0 \xrightarrow{w_2} X_1$ .

Der 5  $A=e$  plein  $\Rightarrow \exists w: X_{10} \rightarrow P_{\Delta_1^0}^* X_2$

t.q. dia  $w = (w_1, w_2)$

Der 5  $A = \Delta_1^0$  ess-surj.

$\exists Y \in \mathcal{D}(\square) = \mathcal{D}(\Delta_1^0 \times \Delta_1^0)$  f.g.  $\text{dia } Y = W$ .

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{W_2} & X_1 \\ \text{dia } Y \cong W_1 \downarrow & & \downarrow W_2 \\ X_2 & \xrightarrow{1_{X_2}} & X_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (0,0) \leftarrow (0,1) & & (0,0) \leftarrow (0,1) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (1,0) \leftarrow (1,1) & \xrightarrow{k} & (1,1) \end{array}$$

$k^* Y = X$  convex.



$$(a * b) \perp (c * d) = (a \perp c) * (b \perp d)$$

$$a, b, c, d \in M$$

Alors les deux lois de composition coïncident et sont associatives et commutatives.

### Proposition:

La catégorie additive.  $X$  objet de  $A$ .

Toute structure de magma unifière sur  $X$  coïncide avec la structure de groupe sur  $X$  définie par la codiagonale.

Dém: résulte du lemme de Yoneda et du lemme précédent (la relation d'échange résulte de la biadditivité de la composition dans  $A$ ).

Si  $A$  et  $B$  sont deux catégories additives, un foncteur additif de  $A$  vers  $B$  est un foncteur

$$F: A \rightarrow B$$

tel que  $\forall X, Y \in \text{Ob } A$ ,  $\text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(FX, FY)$  soit un morphisme de groupes.

Un foncteur  $F: A \rightarrow B$  est additif si et seulement si  $F$  commute aux produits binaires (resp. aux sommes binaires).

Rappel: Une  $\Omega$ -catégorie est un couple  $(\mathcal{C}, \Omega)$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie admettant des produits finis, et  $\Omega$  un endofoncteur commutant aux produits finis, muni d'un morphisme de foncteurs  $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$  faisant de  $\Omega$  un groupe de  $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{C})$ .

Exemple:

Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie additive, se donner une structure de  $\Omega$ -catégorie sur  $\mathcal{A}$  revient à se donner un foncteur additif  $\Omega: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Proposition:

Soit  $(\mathcal{C}, \Omega)$  une  $\Omega$ -catégorie,  $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$  la structure de groupe de  $\Omega$ . Alors  $\mu * \Omega = \Omega * \mu$  définit une structure d'objet groupe commutatif sur  $\Omega^2$ .

Dém: Résulte du lemme de Yoneda et du lemme algébrique.

Corollaire

Soit  $(\mathcal{C}, \Omega)$  une  $\Omega$ -catégorie.

Si  $\Omega$  est fidèle ou essentiellement surjectif, alors l'objet groupe  $\Omega$  est abélien.

Lemme

Soit  $(\mathcal{C}, \Omega)$  une  $\Omega$ -catégorie. Si  $\Omega$  est fidèle et si  $\forall X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$   
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega X, \Omega Y)$  est un sous-groupe  
 alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive.

Remarque: On a vu que si  $\mathcal{A}$  est une catégorie additive,  $(\mathcal{A}, 1_{\mathcal{A}})$  est canoniquement une  $\Omega$ -catégorie. Le corollaire précédent implique que si  $\mathcal{C}$  est une catégorie telle que  $(\mathcal{C}, 1_{\mathcal{C}})$  soit une  $\Omega$ -catégorie, alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive.

Dém: Par transport de structure,  $\text{Hom}(X, Y)$  admet une structure de groupe factorielle en  $X$  et  $Y$ . On en déduit par le lemme de Yoneda une structure de  $\Omega$ -catégorie sur  $(\mathcal{C}, 1_{\mathcal{C}})$ .

Proposition:

Soit  $(\mathcal{C}, \Omega)$  une  $\Omega$ -catégorie. Si  $\Omega$  est pleinement fidèle,  $\mathcal{C}$  est fidèle et essentiellement surjectif alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive.

Action dans une catégorie additive:

$\mathcal{A}$  catégorie additive.

$X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$

$X \oplus Y \xrightarrow{a} Y$  une action de  $X$  sur  $Y$ .

$a = (u, u')$ . On a

$$\begin{array}{ccc} X \oplus Y & \xrightarrow{(u, u')} & Y \\ \uparrow & \parallel & \\ (0, 1) & & Y \end{array} \Rightarrow u' = 1_Y$$

$$\begin{array}{ccc}
 X \oplus X \oplus Y & \xrightarrow{1_x \oplus (u, 1_y)} & X \oplus Y \\
 (1_x, 1_x) \oplus 1_y \downarrow & \cong & \downarrow (u, 1_y) \quad \forall u \\
 X \oplus Y & \xrightarrow{(u, 1_y)} & Y
 \end{array}$$

Donc  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \{ \text{actions de } X \text{ sur } Y \}$   
 $u \mapsto (u, 1_y)$

Triangles:

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie additive, et  $\mathcal{A} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{A}$  un endofoncteur additif.

Un triangle de  $(\mathcal{A}, \Omega)$  est une donnée du type

$$\mathcal{Z} : X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z \quad \Omega Z \times X \xrightarrow{a=(0, k)} X$$

i.e de manière équivalente, une donnée du type:

$$\Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z$$

$\mathcal{R}(\mathcal{Z})$  correspond alors à

$$\Omega Y \xrightarrow{-\Omega w} \Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y$$

Proposition:

Soit  $(\mathcal{C}, \Omega)$  une catégorie prétriangulée telle que  $\Omega$  soit une équivalence de catégories.

Alors c'est une catégorie triangulée.

$\mathbb{D}$  dérivateur faible à gauche de domaine  $\mathcal{D}$  satisfaisant en outre  $\text{Der } \mathcal{C} \mathcal{G}$ .

Rappel: on a un foncteur fibre homotopique

$$\Phi: \mathbb{D}(\Delta_1^0) \rightarrow \mathbb{D}(e)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (0,0) \leftarrow (0,1) & & (0,1) & \leftarrow & 0 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 (1,0) \leftarrow (1,1) & \xrightarrow{i_1} & (1,0) \leftarrow (1,1) & \leftarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow \\
 \square & \leftarrow & \downarrow & \leftarrow & \Delta_1^0
 \end{array}$$

$$\Phi = (p_{\downarrow})_* k_! \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi} = i_{\downarrow,*} k_!, \quad \text{d'où} \quad \Phi = i_{\square,(0,0)}^* \tilde{\Phi}.$$

Pour  $X \in \text{ob } \mathbb{D}(\Delta_1^0)$  on a

$$\text{dia } \tilde{\Phi} X = \begin{array}{ccc}
 \Phi X & \xrightarrow{g_X} & X_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \downarrow_X \\
 * & \longrightarrow & X_1
 \end{array}$$

$$\text{On note } \Delta_0 \xrightarrow{p} e \quad e \xrightarrow{s} \Delta_1 \quad e \xrightarrow{t} \Delta_1$$

$$* \mapsto 0 \quad * \mapsto 1$$

$(t, p, s)$  est un triplet de foncteurs adjoints.

Proposition:

$\Phi$  est un adjoint à droite de  $s_*$  i.e.  $\Phi \simeq s^!$

Esquisse de démonstration: on a ~~un~~ dia  $s_* T = \begin{pmatrix} T \\ \downarrow \\ * \end{pmatrix}$

$\hat{\Phi} X$  induit un morphisme

$$s_* \hat{\Phi} X \xrightarrow{\xi_X} X$$

et  $\hat{\Phi} s_* Y$  induit un isomorphisme

$$s_* \hat{\Phi} s_* Y \rightarrow s_* Y$$

d'où un isomorphisme

$$\hat{\Phi} s_* Y \xrightarrow{\sim} Y$$

et on prend son inverse  $Y \xrightarrow{\eta_Y} \hat{\Phi} s_* Y$ .

$$\begin{aligned} \text{On définit } \Omega &= p_{\perp *} i_{\perp, (1,1)}! \\ &\simeq i_{\square, (0,0)}^* i_{\perp *} i_{\perp, (1,1)}! \\ &\simeq i_{\square, (0,0)}^* i_{\perp *} k_! t_! \\ &= \hat{\Phi} t_! \\ &= s^! t_! \end{aligned}$$

~~D) différentiel faible à gauche~~

D) pré-dérivateur satisfaisant

Der 1, Der 2    Der 3g    Der 4g    Der 6g  
                   Der 3d    (Der 4d    Der 6d)

$$\begin{array}{ccc}
 (0,0) \leftarrow (0,1) & & (0,0) \leftarrow (0,1) \\
 \uparrow & \longleftarrow & \uparrow \quad \uparrow \\
 (1,0) & i_{\Gamma} & (1,0) \leftarrow (1,1)
 \end{array}$$

On dit que  $X$  est  $h$ -cocartésien ( $X \in \text{ob } \mathcal{D}(\square)$ ) si

~~impl~~  $i_{\Gamma} ! i_{\Gamma}^* X \rightarrow X$  est un isomorphisme.

On définit  $\tilde{S} = i_{\Gamma} ! i_{\Gamma, (0,0)}^* *$  et  $S = i_{\square, (1,1)}^* \tilde{S}$

On a  $S \simeq p_{\Gamma} ! i_{\Gamma, (0,0)}^* *$

Pour  $X \in \text{ob } \mathcal{D}(e)$   $\tilde{S}X$  est  $h$ -cocartésien, et on a

$$\text{dia } \tilde{S}X = \begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & SX
 \end{array}$$

On a des suites foncteurs adjoints

Si  $u$  est dans  $\text{Dia}$ :  $u_! u^* u_*$

Si  $k$  est une immersion fermée dans  $\text{Dia}$ :  $k_! k^* k_* k^!$

Si  $l$  " " " ouvert " " :  $l^? l_! l^* l_*$

on démontre alors que  $S = t \cdot s^*$ .

Conséquence:

Proposition:

$(S, \Omega)$  est un couple de foncteurs adjoints.

On suppose désormais que  $\mathbb{D}$  satisfait l'axiome:

Def 7. Soit  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(\square)$ .

Alors  $X$  est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien.

Proposition:

$(S, \Omega)$  est un couple d'équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Dém. Soit  $X \in \text{Ob } \mathbb{D}(e)$ .

$\tilde{\Omega}SX$  et  $\tilde{S}X$  sont homotopiquement cartésiens.

$$\text{dia } \tilde{\Omega}SX = \begin{array}{ccc} \Omega SX & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & SX \end{array} \quad \text{dia } \tilde{S}X = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & SX \end{array}$$

$$\text{Ma } i_{\perp}^* \tilde{\Omega}SX \simeq i_{\perp}^* \tilde{S}X \text{ d'où } \Omega SX = X.$$

$$\text{De même } X \simeq S\Omega X.$$

### Théorème

Soit  $\mathcal{D}$  un dérivateur triangulé (i.e. satisfaisant les axiomes Der 1 - ... - Der 7).

Alors  $\mathcal{D}(e)$  est une catégorie triangulée.

### Corollaire:

Pour tout  $A$  dans  $\text{Dia}$ ,  $\mathcal{D}(A)$  est une catégorie triangulée.

Dém: on applique le théorème au dérivateur triangulé

$$I \mapsto \mathcal{D}(A \times I).$$