

Autour de deux problèmes classiques de
géométrie : Le théorème des quatre sommets et le
théorème d'Aleksandrov

11 janvier 2010

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappel sur la courbure et le principe de comparaison	2
3	Le Théorème des quatre sommets : une très belle preuve du à Osserman	3
4	Qu'est ce que la courbure moyenne ?	8
5	Pourquoi la courbure moyenne ?	11
6	Un principe du maximum pour les surfaces à courbure moyenne constante	13
7	Le théorème d'Aleksandrov via le <i>moving plane</i>	15
8	Le théorème d'Aleksandrov via l'inégalité de Heintze-Karcher	18
9	Un problème de courbure moyenne prescrite	21

1 Introduction

Tout d'abord nous allons nous intéresser à un résultat concernant les courbes planes : le théorème des quatre sommets. Ce théorème affirme que la courbure d'une courbe fermée simple possède au moins quatre points critiques. Nous donnerons une preuve assez élémentaire reposant principalement sur un principe de comparaison.

Ensuite, nous introduirons la notion de courbure moyenne et verrons comment, à l'aide d'une utilisation très judicieuse du principe du maximum, Aleksandrov a caractérisé les sphères comme les seules surfaces compactes plongées à courbure moyenne constante. Nous donnerons également une preuve reposant uniquement sur des inégalités géométriques et n'utilisant pas le principe de réflexion d'Aleksandrov.

Enfin, nous examinerons une question de courbure moyenne prescrite que nous résoudrons dans le cas des surfaces plongées et des courbes immergées. D'ailleurs ce dernier résultat pourra s'interpréter comme une généralisation du théorème des quatre sommets.

2 Rappel sur la courbure et le principe de comparaison

Soit Γ une courbe et $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son paramétrage par l'abscisse curviligne, i.e tel que $\|\gamma'(t)\| = 1$. On définit la normale en $\gamma(t)$ comme étant l'unique vecteur \vec{n} tel que $(\vec{t} = \gamma'(t), \vec{n})$ forme un repère direct.

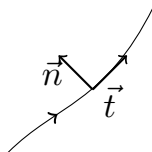


FIGURE 1 – Le repère de Frenet

On peut alors définir la courbure comme le réel $\kappa(\gamma(t))$ vérifiant

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \kappa(\gamma(t))\vec{n}.$$

La courbure mesure la vitesse de rotation algébrique de la tangente.

Cherchons une expression raisonnable de la courbure. Pour cela on remarque que toute courbe est localement un graphe au dessus de sa tangente,

et quitte à appliquer une isométrie affine on peut supposer que le point considéré est l'origine et que la tangente à Γ est l'axe des abscisses. Autrement dit, localement autour de 0 on peut supposer que Γ est paramétrée $\gamma(t) = (t, y(t))$ ¹. Dans ce cas on a

$$\kappa(\gamma(t)) = \frac{y''(t)}{(1 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant supposons que l'on ait deux telles courbes, i.e $\gamma_1(t) = (t, y_1(t))$ et $\gamma_2(t) = (t, y_2(t))$. Si $\kappa_1(0) > \kappa_2(0) > 0$ alors $y_1''(0) > y_2''(0) > 0$. En utilisant un développement limité, on vérifie qu'il existe un voisinage de 0 tel quel

$$y_1(t) > y_2(t) > 0 \text{ pour tout } t \neq 0.$$

Ainsi on vient de démontrer le lemme suivant

Lemma 2.1 *Soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes positivement tangente² en un point p , tels que $\kappa_1(p) > \kappa_2(p) > 0$. Alors localement Γ_1 est à l'intérieur³ de Γ_2 .*

Ce lemme est illustré par le dessin suivant

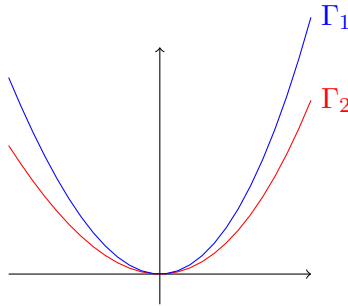


FIGURE 2 – Lemme de comparaison

3 Le Théorème des quatre sommets : une très belle preuve du à Osserman

On appellera sommet d'une courbe, un point critique de la courbure. La courbure d'une courbe fermé possédant un maximum et un minimum, elle

1. ici le paramétrage n'est pas celui de l'abscisse curviligne
 2. Les tangentes sont égales et pas seulement parallèles
 3. Ici les courbes sont orientées de la droite vers la gauche, afin que la normale pointe de l'intérieur vers l'extérieur

admet au moins deux sommets. Ceci est optimal dans le cas des courbes immergées comme le montre l'exemple suivant.

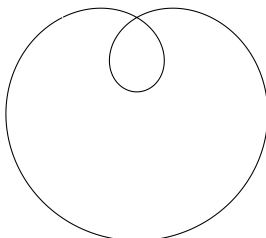


FIGURE 3 – $r = 1 - 2\sin(\theta)$.

La courbure prend son minimum en bas à $\frac{5}{9}$ et son maximum en bas de la petite boucle à 3.

Par contre on a mieux dans le cas des courbes simples.

Théorème 3.1 *Une courbe simple fermée possède au moins quatre sommets. Plus précisément la courbure admet au moins deux maxima locaux et deux minima locaux.*

Ce théorème a une longue histoire qui commence en 1909 quand Mukhopadaya le démontre pour une courbe convexe. Puis en 1912 Kneser donne une démonstration dans le cas général et s'ensuit une succession de nouvelles preuves et de généralisations. Nous présentons ici une preuve due à Robert Osserman en 1985, qui en plus d'être d'une grande simplicité, explique clairement pourquoi il ne peut en être autrement. Dans [10], Osserman écrit au début de l'article la chose suivante :

*"L'essence de la preuve peut se résumer en une phrase :
Considérer le cercle circonscrit."*

Ce que nous allons nous empresser de faire...

Lemma 3.1 *Soit Γ une courbe fermée simple, alors il existe un unique cercle C de plus petit rayon contenant Γ . De plus C vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma \cap C$ contient au moins deux points.
2. Tout arc de C plus grand qu'un demi-arc doit intersecter Γ .

Quitte à changer l'orientation de Γ , on peut en plus supposer que Γ et C sont positivement tangent. Dans le cas du cercle circonscrit le lemme de comparaison peut s'énoncer ainsi

Lemma 3.2 Soit Γ une courbe simple fermé, C son cercle circonscrit⁴ et R le rayon de C . Soit $p \in C \cap \Gamma$ alors $\kappa(p) \geq \frac{1}{R}$.

Notons p_1 et p_2 deux points de tangence consécutifs du cercle circonscrit à Γ . Quitte à faire une rotation on peut supposer qu'ils sont contenus dans une verticale avec p_2 au dessus de p_1 .

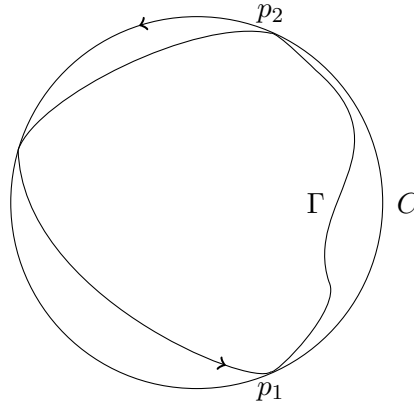


FIGURE 4 – Cercle circonscrit

Pour démontrer notre théorème, il suffit donc de trouver sur l'arc Γ_{12} joignant p_1 à p_2 , un point q_1 tel que $\kappa(q_1) < \frac{1}{R}$. En effet ceci assurera l'existence d'un minima local sur Γ_{12} , de même on trouve au moins un autre minima sur $\Gamma \setminus \Gamma_{12}$, enfin on remarquera que sur chacun des deux arcs que définissent ces deux minima il y a un maximum, ce qui achèvera la preuve.

Plus généralement on peut montrer qu'il y a au moins deux fois plus de sommets que de points de tangence entre la courbe et son cercle circonscrit.

4. On choisit l'orientation de C de sorte que C et Γ soient positivement tangent

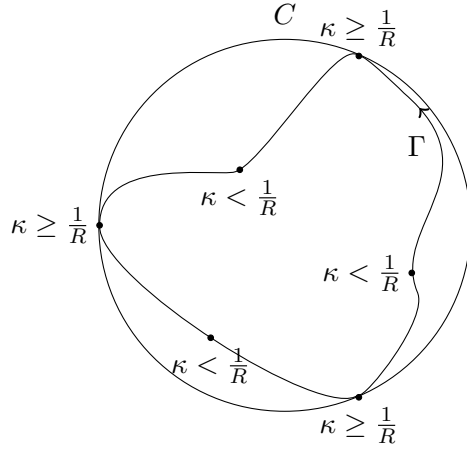


FIGURE 5 – Il y a au moins deux fois plus de sommets que de points de tangence.

On considère donc l'arc Γ_{12} joignant p_1 à p_2 . Soit il est contenu dans le cercle et dans ce cas tous les points de cet arc sont des sommets et le théorème est démontré. Soit il existe un point $q \in \Gamma_{12}$ qui est dans l'intérieur de C . De plus comme l'arc du cercle C_{12} joignant p_1 à p_2 est contenu dans un demi-cercle, on peut choisir le point q à droite de la verticale définie par p_1 et p_2 . On note alors \tilde{C} , le cercle passant pas p_1 , p_2 et q , voir figure 6. Comme le point q est intérieur le rayon \tilde{R} de \tilde{C} est tel que $\tilde{R} > R$. Maintenant on fait

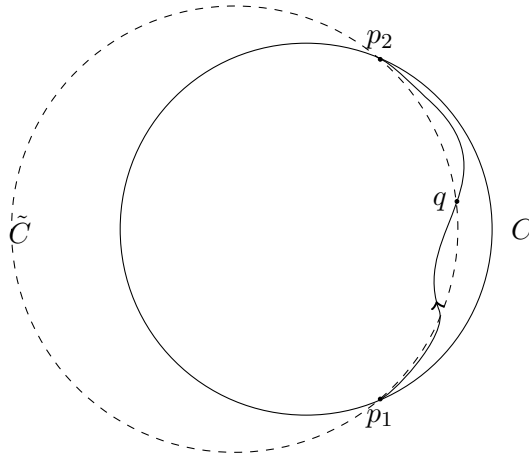


FIGURE 6 – Le cercle \tilde{C}

glisser ce cercle dans la direction orthogonal à (p_1p_2) de sorte à l'éloigner de

l'arc de C_{12} . Il y a alors un dernier moment où \tilde{C} intersecte Γ_{12} , notons q_1 un de ces points d'intersection. En q_1 , Γ_{12} est alors tangent à \tilde{C} et localement à

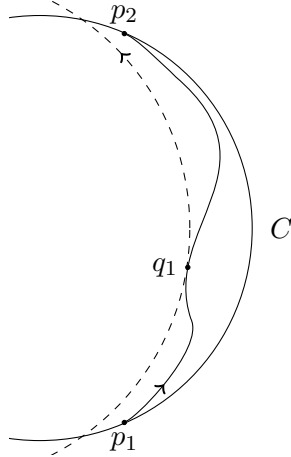


FIGURE 7 – On fait glisser \tilde{C}

l'extérieur. De plus la tangence est positive. En effet on prolonge Γ_{12} par l'arc de cercle joignant p_2 à p_1 . On obtient une courbe de Jordan, qui définit un domaine Δ et l'orientation de Γ_{12} correspond avec celle du bord. Au point q_1 , la normale à \tilde{C} pointe vers la droite, c'est à dire l'extérieur de \tilde{C} mais aussi de Δ . Donc \tilde{C} et Γ_{12} sont positivement tangente en q_1 et on peut appliquer notre lemme de comparaison. D'après le lemme 2, Γ_{12} étant à l'extérieur de \tilde{C} , on a :

$$\kappa(q_1) \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{R},$$

ce qui achève la preuve du théorème. \square

Ce qui ressort de cette preuve, c'est qu'il est assez contraignant de n'avoir que quatre sommets. En effet il faut en particulier n'avoir que deux points d'intersection avec son cercle circonscrit ce qui n'est pas générique. La question de la caractérisation des courbes n'ayant que quatre sommets a été étudiée entre autre par Jackson, [6].

La deuxième question assez naturel est de savoir si un tel théorème admet une réciproque, c'est-à-dire étant donné une fonction du cercle avec deux minima et deux maxima, existe-t-il un plongement du cercle admettant cette fonction pour courbure? C'est en effet le cas, tout d'abord Gluck en 1971 [3] prouve cette réciproque pour $\kappa > 0$, mais pour une réponse affirmative

complète il faudra attendre 2005 et la publication d'un papier posthume de Dahlberg, [2].

4 Qu'est ce que la courbure moyenne ?

4.1 Courbure et seconde forme fondamentale d'une surface

Afin de mesurer la courbure d'une surface⁵, nous allons nous intéresser aux variations de son plan tangent. En fait, de manière équivalente, nous allons considérer les variations de la normale.

Soient Σ une surface orienté et $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion dont l'image sera encore notée Σ . La courbure étant une notion locale, il ne sert à rien de se limiter au plongement, par contre il faut que la surface de départ soit orienté, afin de pouvoir définir la normale de manière globale.

Définition 4.1 Soit $p \in \Sigma$, on choisit un système de coordonnées direct (x, y) autour de p et on définit

$$\vec{N}(p) = \frac{u_x(p) \wedge u_y(p)}{\|u_x(p) \wedge u_y(p)\|},$$

comme normale à Σ en $u(p)$. \vec{N} est appelé l'application de Gauss.

Si on regarde la différentielle de l'application de Gauss, on obtient une application linéaire du plan tangent de Σ en p dans le plan tangent de la sphère en $\vec{N}(p)$. Il est clair que ces deux plans tangents sont parallèles et qu'ils peuvent donc s'identifier. On a donc $d\vec{N}_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$.

Proposition 4.1 $d\vec{N}_p$ est auto-adjoint.

On peut donc lui associé une forme quadratique.

Définition 4.2 La forme quadratique définie sur $T_p\Sigma$ par

$$II_p(\vec{v}) := -\langle d\vec{N}_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle,$$

est appelée la seconde forme fondamentale de Σ .

5. Ici on considère des surfaces pour simplifier, mais tout reste vrai pour des hypersurfaces

Les variations de la normale et donc la courbure sont encodées dans cette seconde forme.

Afin de pouvoir mieux comprendre les variations de la normale et donc la courbure, nous allons définir deux fonctions de la surface plus simple que $d\vec{N}_p$.

Définition 4.3 On définit deux applications K et H , que l'on appellera respectivement courbure de Gauss et courbure moyenne, comme suit

$$K(p) = \det(d\vec{N}_p)$$

et

$$H(p) = \text{trace}(d\vec{N}_p).$$

4.2 Une explication qualitative

Si on considère une courbe Γ de Σ paramétrée par sa longueur d'arc tel que

$$\gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = \vec{v},$$

alors un simple calcul nous montre que $\kappa(0) = II_p(\vec{v})$, ici κ est la courbure de la projection de Γ sur le plan passant par p et engendré par \vec{v} et \vec{N} .

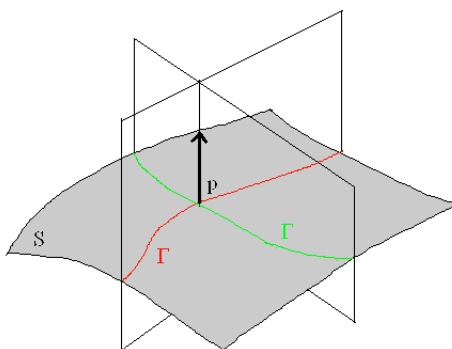


FIGURE 8 – Courbe sur une surface

On remarque que la courbure ne dépend que de \vec{v} . De plus comme $d\vec{N}_p$ est symétrique on peut la diagonaliser et on trouve deux valeurs propres $\kappa_1 \leq \kappa_2$, associé respectivement à deux directions propres \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . κ_1 (resp. κ_2) est alors la plus petite (resp. grande) courbure d'une courbe passant par p . Les κ_i et \vec{v}_i sont alors appelés courbures et directions principales.

En particulier la courbure de Gauss est égale au produit des courbures principales et la courbure moyenne est égale à la moyenne des deux courbures principales. Par exemple on peut facilement vérifier que pour le cylindre de rayon R on a :

$$\kappa_1 = 0 \text{ et } \kappa_2 = \frac{1}{R},$$

d'où

$$K = 0 \text{ et } H = \frac{1}{2R}.$$

4.3 Propriétés classiques de la courbure

On remarque facilement que la courbure de Gauss contrairement à la courbure moyenne est invariante par changement d'orientation, mais en fait on a un théorème bien plus fort du à Gauss vers 1827.

Théorème 4.1 (Theorema Egregium) *La courbure de Gauss est invariante par isométrie locale.*

Il existe une réciproque à ce théorème dans le cas des surfaces à courbure de Gauss constante.

Théorème 4.2 *Deux surfaces à courbure de Gauss constante et identique sont localement isométriques.*

Pour une preuve de ce théorème on pourra se référer à la section 10.5 de [1]. On dérive alors le corollaire suivant

Corollaire 4.1 *Une surface à courbure de Gauss simplement connexe est isométrique à l'un des espace modèle suivant : \mathbb{R}^2 , S^2 ou H^2 .*

Tout ceci est faux pour la courbure moyenne. Par exemple un morceau de plan et un morceau de cylindre peuvent être isométrique et portant la courbure moyenne d'un cylindre n'est jamais nulle. Et réciproquement il existe des surfaces ayant la même courbure moyenne mais qui ne sont pas isométriques, on pourra considérer par exemple le cylindre de rayon $2R$ et la sphère de rayon R . Toutefois comme nous le verrons avec le théorème d'Aleksandrov on regagne de la rigidité dans le cas compacte.

5 Pourquoi la courbure moyenne ?

En effet, comme on l'a vu dans la section 4.1, la courbure de Gauss décrit très bien la surface et est une notion assez rigide. Donc qu'elle est l'intérêt d'étudier la courbure moyenne ?

Soit Σ une surface compacte plongée dans \mathbb{R}^3 , si on se donne un paramétrage local $x : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, on peut définir la normale et l'élément d'aire, via les formules suivantes

$$\vec{N} = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \text{ et } d\Sigma = |x_u \wedge x_v| dudv$$

On considère alors un champ de vecteur \vec{V} défini sur \mathbb{R}^3 à l'aide duquel on perturbe notre surface comme suit

$$\Sigma^t : x^t(u, v) = x(u, v) + t\vec{V}(x(u, v)).$$

Ceci définit bien une immersion pour t assez petit. On définit alors l'aire de Σ^t et son "volume" par

$$A(t) = \int d\Sigma^t$$

et

$$V(t) = \frac{1}{3} \int \langle x^t, \vec{N}^t \rangle d\Sigma^t.$$

La seconde formule correspond effectivement au volume de la composante bornée que borde Σ^t . On peut s'en convaincre en intégrant le volume du cône de la figure suivante.

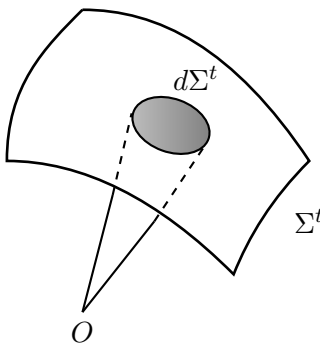


FIGURE 9 – Élément de volume infinitésimale

Après un peu de calcul, on obtient

$$A'(0) = -2 \int H \langle \vec{N}, \vec{V} \rangle d\Sigma, \quad (1)$$

et

$$V'(0) = \int \langle \vec{N}, \vec{V} \rangle d\Sigma, \quad (2)$$

L'égalité (1) est appelé formule de la première variation. Par exemple, considérons un champ de vecteur \vec{V} tel que $\vec{V}|_{\Sigma} = f\vec{N}$ où f est une fonction lisse. Il s'agit typiquement du champ de force qui apparaît lorsqu'on exerce une pression uniforme sur une surface. On a alors

$$A'(0) = -2 \int H f d\Sigma$$

et

$$V'(0) = \int f d\Sigma.$$

Donc si on considère le problème de minimisation de l'aire (i.e $A'(0)=0$) à volume fixé ($V'(0) = 0$), alors H vérifie

$$\int H f d\Sigma \text{ pour tout } f \text{ tel que } \int f d\Sigma = 0. \quad (3)$$

Proposition 5.1 *Les surfaces solution du problème de minimisation à volume fixé sont à courbure moyenne constante.*

Il est à noter ici que quand on parle de surface à courbure moyenne constante que l'on peut toujours supposer celle-ci positive. En effet il suffit de renverser l'orientation pour changer son signe. Dans le cadre de cet exposé, on la supposera même non nulle puisque nous nous intéresserons uniquement à des surfaces compacte. En effet $H = 0$ implique $K \leq 0$ ce qui est impossible pour une surface compacte de \mathbb{R}^3 . Pour voir cela, il suffit de considérer la sphère circonscrite à notre surface et en appliquant un principe de comparaison au point de tangence comme on l'a fait pour lune courbe dans la section 2, on en déduit que $K \geq \frac{1}{R} > 0$ en ce point de tangence, ce qui contredit donc le fait que la courbure de Gauss soit partout négative ou nulle.

La modélisation de la tension de surface d'une bulle de savon correspond exactement au problème de minimisation précédent. Donc les bulles de savons sont à courbure moyenne constante. Mais qu'elle est leur forme ? c'est à cette

questions à la que l'on répondra dans la section 7.

Le problème de minimisation proposé ici est un cas simplifié du problème d'isopérimétrique, dont on trouvera un exposé dans [11].

6 Un principe du maximum pour les surfaces à courbure moyenne constante

6.1 Le principe du maximum de Hopf

Il faut tout d'abord introduire la notion d'opérateur linéaire uniformément elliptique généralisant le laplacien.

Soit L un opérateur différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert **borné** Ω , i.e

$$L(u) = a_{ij}(x)\partial_{ij}u + b_i(x)\partial_i u + c(x)u$$

pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. On dit que L est uniformément elliptique si $A = (a_{ij}(x))$ est une matrice **uniformément** définie négative⁶ sur Ω . Revenons au laplacien et supposons qu'une fonction atteigne son maximum à l'intérieur de Ω et qu'elle satisfasse

$$\Delta u - cu = 0$$

où c est une constante positive. Alors il est claire que ce maximum est nécessairement négatif ou nulle. Cette petite remarque est à l'origine du principe du maximum faible :

Lemma 6.1 *Soit L un opérateur uniformément elliptique et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $Lu \geq 0$ et $c(x) \leq 0$ sur Ω . Alors u atteint sur $\partial\Omega$ son maximum positif ou nulle.*

En fait un tel maximum ne peut être atteint que sur le bord et si le bord est "assez lisse" alors on ait assuré de la non nullité de la dérivé normale, c'est le principe du maximum fort ou principe du maximum de Hopf dont on trouvera une démonstration ainsi que du lemme précédent dans la section 2 de [4].

6. Il s'agit ici d'une convention de signe de sorte que le laplacien comme opérateur positif soit elliptique

Théorème 6.1 Soient L un opérateur uniformément elliptique sur \mathbb{D} tel que $c(x) \leq 0$ et $u \in C^2(\mathbb{D}^2) \cap C^0(\mathbb{D})$ telle que

$$L(u) \geq 0$$

Soit le maximum positif ou nulle de u est atteint en un point x_0 du bord, et alors

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0,$$

soit u est constante.

6.2 Les équations de courbures pour un graphe

Comme pour les courbes nous allons chercher une expression analytique simple de la courbure.

Soit $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^2 . La courbure moyenne du graphe de u au point $(x, y, u(x, y))$ est donnée par

$$H = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{2(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En particulier si le graphe de u , est tangent au plan $z = 0$ à l'origine, on a

$$H = \frac{1}{2}\Delta u(0, 0).$$

6.3 Application au cas des surfaces à courbure moyenne constante

Pour fixer les idées considérons des graphes de courbure moyenne constante égale à 1. On a donc une fonction lisse u de \mathbb{D} dans \mathbb{R} qui vérifie

$$\frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{2(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} = 1. \quad (4)$$

On pose alors

$$O(p, q, r, s, t) = (1 + q^2)s - 2pqr + (1 + p^2)t - 2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}$$

En utilisant le lemme d'Hadamard, on obtient

$$O(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) - O(p_2, q_2, r_2, s_2, t_2) = P(p_1 - p_2) + Q(q_1 - q_2) + R(r_1 - r_2) + S(s_1 - s_2) + T(t_1 - t_2)$$

où P, Q, R, S, T sont des fonctions de $(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, p_2, q_2, r_2, s_2, t_2)$. Plus précisément on a une expression explicite pour les majuscule et on vérifie sans trop de peine que

$$ST - R^2 > \frac{1}{2}$$

sur \mathbb{D} . En appliquant ceci avec $p = u_x, q = u_y, \dots$ On vérifie que si u_1 et u_2 sont deux fonction définie sur \mathbb{D} vérifiant (4) alors

$$a_{ij}(x)\partial_{ij}(u_2 - u_1) + \langle \nabla(u_2 - u_1), h \rangle = 0$$

où $A = (a_{ij}(x))$ est uniformément définie positive sur \mathbb{D} et h est une fonction lisse sur \mathbb{D} .

En d'autres termes la différence entre deux surfaces à courbure moyenne constante égale à 1 vérifie un principe du maximum. En particulier, supposons que $u_1 \leq u_2$ et que $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ pour $x_0 \in \bar{\Omega}$. Alors soit $u_1 \equiv u_2$, soit $x_0 \in \partial\Omega$ et

$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial n}(x_0) > 0,$$

ce qui implique que les surfaces ne sont pas tangentes en x_0 .

7 Le théorème d'Aleksandrov via le *moving plane*

La classification des surfaces à courbure moyenne constante(non nulle) a commencée avec Delaunay qui classe les surfaces de révolution en 1841. Puis en 1951 avec le fameux théorème d'Hopf, section 2.6 de [5], où Hopf prouve que toute surface à courbure moyenne constante de genre 0 dans l'espace euclidien est une sphère ronde. Il a été conjecturé qu'il devait en être de même pour les surface de genre plus grand. Ce qui est vrai pour les surfaces plongé comme nous allons le voir avec le théorème d'Aleksandrov(1956). Par contre Wente en 1983 a trouvé un tore immergé à courbure moyenne constante.

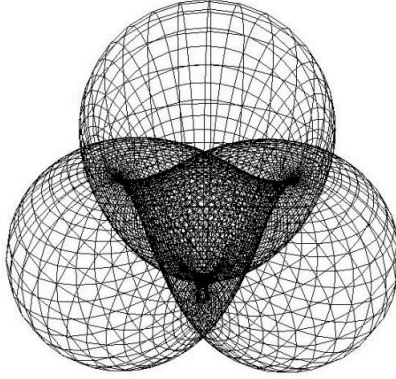


FIGURE 10 – Tore de Wente

Toutefois il faut noter que la preuve d'Aleksandrov a donné naissance à de nombreux développements en géométrie et en équations aux dérivées partielles à travers ce qu'on appelle aujourd'hui : le *moving plane*. Comme par exemple ce résultat dû à Gidas, Ni et Nirenberg, section 2.6 de [4],

Théorème 7.1 *Soit $u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C^0(\bar{\mathbb{D}})$ une solution positive de*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{sur } \mathbb{D} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

où f est localement Lipschitz sur \mathbb{R} . Alors u est radial sur \mathbb{D} et $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Preuve du théorème d'Aleksandrov :

Soit Σ une surface plongée dans \mathbb{R}^3 à courbure moyenne constante. Nous allons montrer que cette surface admet un plan de symétrie dans toutes les directions ce qui achèvera la preuve, puisque la sphère est la seule surface ayant une telle propriété.

Soit un plan P qui n'intersecte pas Σ . Soit $\vec{\eta}$ le vecteur normal à ce plan qui pointe vers Σ , on considère alors la famille de plans $P_t = P + t\vec{\eta}$. Il existe un premier temps $t_0 > 0$ où $P_{t_0} \cap \Sigma$ est non vide. Pour $t > t_0$, on note Σ_t le symétrique par rapport à P_t de $\Sigma_t^- = \Sigma \cap \{P_t + u\vec{\eta} \text{ t.q. } u < 0\}$.

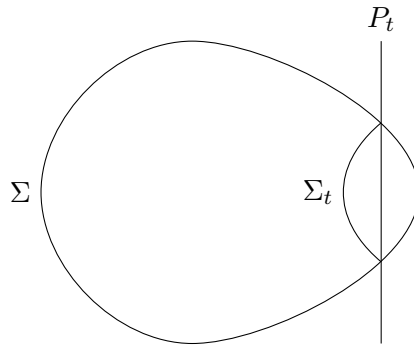


FIGURE 11 – Définition de Σ_t

Puis il existe un premier temps t_1 tel que $\Sigma_{t_1} \cap \Sigma$ soit non vide ou tangent au bord. Les deux cas sont présentés ci-dessous.

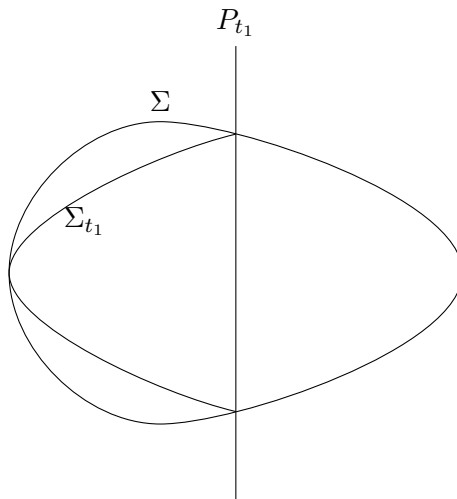


FIGURE 12 – Contact intérieur

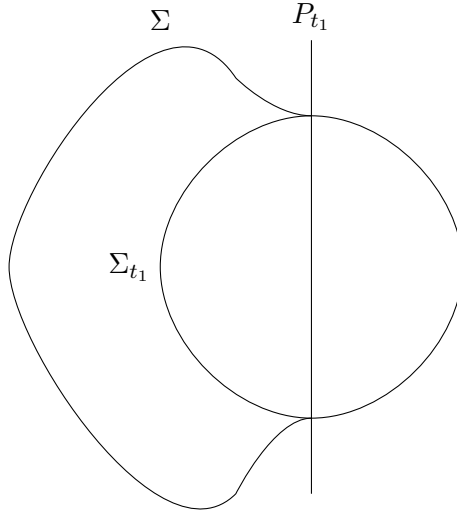


FIGURE 13 – Les bords sont tangents

De plus les normales de ces points de contacts sont clairement égales puisque Σ_t vient de l'intérieur de Σ , donc localement autour de ce point ces surfaces sont des graphes de courbure moyenne 1. On peut donc appliquer le principe du maximum de la section 6.3. Il est alors clair que Σ_t^- et Σ_t sont localement égale et donc globalement par connexité. Ce qui prouve que Σ_t est le symétrique de Σ_t^- par P_t et achève la démonstration. \square

8 Le théorème d'Aleksandrov via l'inégalité de Heintze-Karcher

Dans cette section on présente une preuve du théorème d'Aleksandrov n'utilisant que des inégalités géométriques.

8.1 Formule de l'aire et formule de Minkowski

Avant de démontrer l'inégalité de Heintze-Karcher et le théorème on rappelle deux théorèmes classiques. Le premier est une généralisation de la formule de changement de variable pour une application qui n'est pas nécessairement un difféomorphisme.

On considère O un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et $\phi : \overline{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application différentiable. Toute valeur régulière de ϕ admet un ensemble discret d'antécédent, puisque \overline{O} est compact, cet ensemble est en fait fini. On peut alors définir pour toute fonction $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction suivante

$$n(\phi, f) : \mathbb{R}^3 \setminus \phi(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}$$

par la formule

$$n(\phi, f)(y) = \sum_{x \in \phi^{-1}(y)} f(x),$$

où $\mathcal{N} \subset \overline{O}$ est l'ensemble des points critique de ϕ . Le théorème de Sard nous assure alors que $\phi(\mathcal{N})$ est de mesure nulle.

Théorème 8.1 (formule de l'aire) *Supposons que $f|Jac(\phi)|$ est intégrable. Alors la fonction la fonction $n(\phi, f)$ est intégrable sur \mathbb{R}^3 et*

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(y) dy = \int_O f(x)|Jac(\phi)|(x) dx.$$

La formule suivante est une conséquence géométrique de la formule de la divergence pour les surfaces.

Théorème 8.2 (Formule de Minkowski) *Soit Σ une surface compacte, \vec{N} son application de Gauss et H sa courbure moyenne. On a alors*

$$\int_{\Sigma} (1 + H(p)\langle p, \vec{N}(p) \rangle) dp = 0.$$

On trouvera des preuves de ces deux théorèmes dans le très bon livres de Montiel et Ros [9].

8.2 Inégalité de Heintze-Karcher et preuve du théorème d'Aleksandrov

Théorème 8.3 (Inégalité de Heintze-Karcher) *Soit Σ une surface compacte qui borde un domaine Ω . On suppose que la courbure moyenne de Σ est strictement positive en tout point⁷. Alors*

$$|\Omega| \leq \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \frac{1}{H} d\sigma. \quad (5)$$

De plus le cas d'égalité est caractérisé par la sphère ronde.

⁷. ce qui revient à supposer qu'elle ne s'annule pas

Preuve :

En un point $p \in \Sigma$ notons $\kappa_2(p)$ la plus grande courbure principale. Puis on définit $S \subset \Sigma \times \mathbb{R}$ comme suit

$$S = \left\{ (p, t) \in \Sigma \times \mathbb{R} \text{ t.q. } 0 \leq t \leq \frac{1}{\kappa_2(p)} \right\}.$$

Soit $a > \max_{\Sigma} \frac{1}{\kappa_2}$ alors, S est un ensemble compacte de $\Sigma \times [0, a[$. On vérifie facilement, voir figure 14, que

$$\Omega \subset F(S),$$

où $F : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini par $F(p, t) = p + t\vec{N}(p)$ avec $\vec{N}(p)$ la normale intérieur à Σ en p .

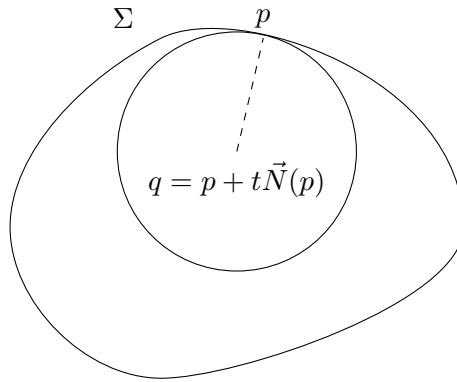


FIGURE 14 – $\Omega \subset F(S)$

Maintenant on peut appliquer la formule de l'aire, théorème 8.1, sur $\Sigma \times (0, a)$ à F et \mathbb{I}_S d'ou

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(F, \mathbb{I}_S)(y) dy = \int_{\Sigma \times (0, a)} \mathbb{I}_S(x) |Jac(F)|(x) dx.$$

Comme $n(F, \mathbb{I}_S) \geq 1$ sur Ω , on en déduit que

$$\begin{aligned} |\Omega| &\leq \int_S \int_0^a \mathbb{I}_S(p, t) |Jac(F)|(p, t) dp dt. \\ &\leq \int_S \left(\int_0^{\frac{1}{\kappa_2(p)}} |(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))| dt \right) dp. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p)) = 1 - 2tH(p) + t^2K(p) \leq (1 - tH(p))^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\Omega| &\leq \int_S \left(\int_0^{\frac{1}{k_2(p)}} (1 - tH(p))^2 dt \right) dp \\ &= \int_S \frac{1}{3H(p)} \left(1 - \left(1 - \frac{H(p)}{k_2(p)} \right)^3 \right) dp \end{aligned}$$

d'où l'inégalité. Le cas d'égalité est atteint seulement pour une surface ombilique, c'est-à-dire une sphère ronde. \square

Cette inégalité combinée avec la première formule de Minkowski nous offre une nouvelle preuve du théorème d'Aleksandrov.

Soit Σ une surface plongée dans \mathbb{R}^3 à courbure moyenne constante H . Quitte à renverser l'orientation, on peut toujours supposer que H est strictement positif. Si on note Ω le domaine bordé par cette surface, le théorème 8.3 nous assure que

$$|\Omega| \leq \frac{A(\Sigma)}{3H}. \quad (6)$$

D'autre part la première formule de Minkowski donne

$$A(\Sigma) + H \int_{\Sigma} \langle x, N(x) \rangle d\sigma = 0.$$

Mais on sait que⁸

$$\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle x, N(x) \rangle d\sigma = -|\Omega|.$$

Donc il y a égalité dans (6) et alors Σ est une sphère. \square

9 Un problème de courbure moyenne prescrite

Une questions naturelle est de savoir quelles sont les fonctions H qui peuvent être courbure moyenne d'une surface? La courbure moyenne étant une donnée extrinsèque, on essaie de prescrire la courbure sur l'image. Plus

8. ici la normale est rentrante

précisément on se donne une fonction $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et on cherche à savoir s'il existe une hypersurface de \mathbb{R}^n qui admette pour courbure moyenne $H(x)$ en x . En fait on cherche une obstruction à l'existence de telle surface, un peu dans l'esprit de ce qui a été fait pour la courbure scalaire par Kazdan-Warner [7]. Par exemple on a le théorème suivant

Théorème 9.1 *Soit $n \geq 2$ et $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz telle qu'il existe $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0 \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

alors il n'existe aucune surface compacte C^1 plongée dans \mathbb{R}^n de courbure moyenne H .

Preuve du théorème 9.1 :

Supposons par contradiction qu'une telle hypersurface Σ existe. Alors en utilisant la formule de la première variation (1) avec le champ de vecteur constant \vec{e} :

$$\int_{\Sigma} \langle H(x)\vec{e}, \vec{N}(x) \rangle d\Sigma = 0, \quad (7)$$

où \vec{N} est le vecteur normale de Σ et $d\Sigma = dH^{n-1}|_{\Sigma}$. Puisque Σ est plongée, d'après le théorème de Jordan généralisé, il existe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\Sigma = \partial\Omega$. En utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$\int_{\Sigma} \langle H\vec{e}, \vec{N}(x) \rangle dS = \int_{\Omega} \langle \vec{e}, \nabla H(x) \rangle dx = 0,$$

Ce qui contredit le fait que $\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0$, et prouve le théorème. \square

La question suivante est de savoir si un tel résultat reste vraie pour des surfaces immergées ? La réponse comme pour les surfaces à courbure moyenne constante ne semble pas claire dans le cas immergé. Par contre dans le cas des courbes qui sont nettement plus rigides, puisque par exemple les seules courbes fermées à courbure moyenne constante sont les cercles, la réponse est donnée par S.Kirsch et l'auteur dans le théorème suivant, [8].

Théorème 9.2 *Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz positive et $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant*

$$\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0 \quad \text{pour presque } x \in \mathbb{R}^2.$$

Il n'existe aucune courbe fermée C^1 immergée dans \mathbb{R}^2 dont la courbure en tout point x est $H(x)$.

L'hypothèse de positivité est essentielle. En effet, sinon on a un contre exemple avec la lemniscate de Bernouilli

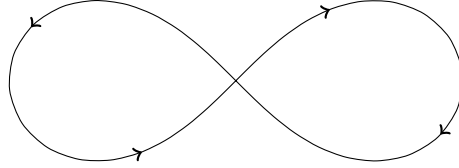


FIGURE 15 – Lemniscate of Bernouilli

L'équation de la lemniscate est

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = a^2(x_1^2 - x_2^2),$$

où $a > 0$ est un paramètre. Un petit calcul donne la courbure $c(x_1)$ de la lemniscate :

$$c(x_1) = \text{sign}(x_1) \frac{3}{a^2} \sqrt{\frac{a\sqrt{8x_1^2 + a^2} - a^2}{2}},$$

qui est bien une fonction croissante. La lemniscate ode Bernoulli est une solution du problème de courbure prescrite $H(x_1, x_2) = c(x_1)$, avec

$$\langle \nabla H(x), e_1 \rangle = c'(x_1) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Avant de commencer la preuve du théorème 9.2 il nous faire quelques remarques et définir quelques notions sur les courbes immergées.

Si $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitz, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que toutes solutions C^2 non périodique du problème suivant :

$$\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = H(\gamma(s))\vec{n}(s), \quad (8)$$

a des intersections isolées et d'ordre finie. De plus, si deux parties de la courbe sont tangentes en un point, elle doivent avoir des orientations opposées.

Il nous faut aussi définir l'indice d'une courbe et en donner quelques propriétés.

Définition 9.1 Soit $\gamma \in C^0(S^1, \mathbb{R}^2)$ et $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, on définit l'indice de γ par rapport à a comme le degré de l'application de S^1 dans S^1 défini par

$$s \mapsto \frac{\gamma(s) - a}{\|\gamma(s) - a\|},$$

on le notera $\text{Ind}_\gamma(a)$.

Attention l'indice dépend de l'orientation. L'indice peut s'interpréter comme le nombre de tour de Γ autour de a , on en déduit facilement qu'il est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. De plus grâce à la propriété suivante on peut quantifier les variations d'indice lorsqu'on passe d'une composante à une autre.

Proposition 9.1 *Soient $\gamma \in C^1(S^1, \mathbb{R}^2)$ et $p \in \Gamma$ un point régulier de Γ (i.e pas une auto-intersection) alors, pour r assez petit, $B(p, r) \setminus \Gamma = U \cup V$, où U et V sont des ouverts connexe de \mathbb{R}^2 tel que $U \cap V = \emptyset$ et \vec{n} pointe vers U . De plus $\forall (u, v) \in U \times V$ on a*

$$Ind_\gamma(u) - Ind_\gamma(v) = 1.$$

On trouvera une preuve dans la section 9.2 de [1].

Preuve du théorème 9.2 :

La première idée est de suivre la preuve du cas plongé en se donnant un énoncé du théorème de Stokes dans le cas d'une courbe immergée.

Lemma 9.1 *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée C^1 avec des intersections isolés et d'ordre fini, et \vec{V} un champ de vecteurs Lipchitz sur \mathbb{R}^2 , alors on la formule suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \text{div}(\vec{V}) Ind_\gamma(x) dx = - \oint_{\Gamma} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma, \quad (9)$$

où $d\sigma$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à Γ et \vec{n} le vecteur normal de Γ .

Même si il y a deux choix possible pour l'orientation de Γ , (9) est toujours vraie, puisqu'en changeant \vec{n} en $-\vec{n}$ on change aussi $Ind_\gamma(x)$ en $-Ind_\gamma(x)$.

On remarque que la formule (9) nous permet de faire la même preuve que dans le cas plongé pour une courbe dont tous les indices sont positifs ou nuls. Mais, ce n'est pas le cas de toutes les courbes, donc on va chercher une sous courbe de Γ dont tous les indices sont positifs ou nuls. Mais pour cela il va falloir découper la courbe et donc créer des singularités, en particulier on aura

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\vec{t}}{ds} d\sigma = \sum_{i=1}^k (\vec{t}(s_i^+) - \vec{t}(s_i^-)) \neq 0,$$

les s_i sont des point où γ' n'est pas lisse.

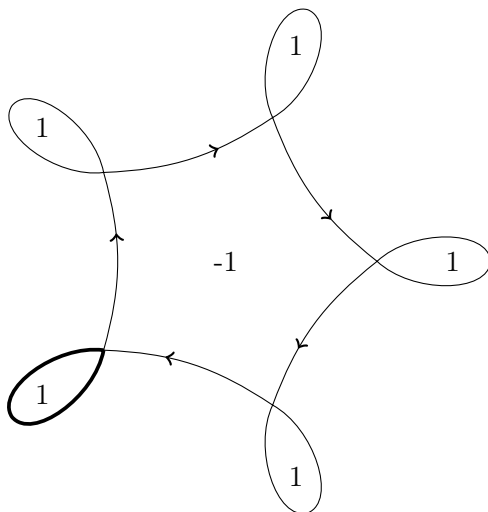


FIGURE 16 – La fleur, une courbe avec des indices positifs et négatifs

Mais en fait pour avoir une contradiction on a simplement besoin que $\oint_{\Gamma} \frac{d\vec{t}}{ds} d\sigma$ soit orienté dans le sens défini par \vec{e} . Voici une méthode de découpe qui permet d'arriver à un tel résultat.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = (1, 0)$, de plus on dira qu'une singularité (un point non lisse) est bien orienté si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \lim_{u \rightarrow 0^+} \vec{t}(s - u), \vec{e} \right\rangle > 0, \\ \left\langle \lim_{u \rightarrow 0^+} \vec{t}(s + u), \vec{e} \right\rangle < 0. \end{array} \right.$$

C'est par exemple le cas pour la singularité de la boucle en gras dans la figure 16. On cherche donc une courbe fermée $\Gamma' \subset \Gamma$ telle que

$$Ind_{\gamma'} \geq 0 \text{ et } \left\langle \vec{e}, \oint_{\Gamma'} \frac{d\vec{t}}{ds} d\sigma \right\rangle > 0.$$

Dans ce but on construit une suite de sous-courbe Γ_n of Γ , telle que toutes les singularités de Γ_n sont bien orientées.

On commence avec $\Gamma_0 = \Gamma$, et on obtient Γ_{n+1} à partir de Γ_n comme suit : on considère

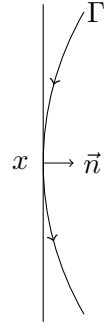
$$\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n \text{ t.q. } Ind_{\gamma_n}(x) < 0\}.$$

Si $\Omega_n = \emptyset$ c'est fini, Γ_n convient. Sinon Ω_n est borné et on coupe Γ_n à l'extrémité gauche de Ω_n .

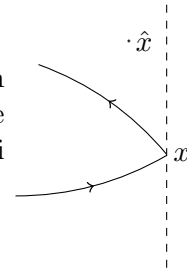
Etape 1 : l'extrémité gauche de Ω_n est un point d'intersection de Γ_n

En effet sinon se serait un point lisse ou une singularité créée à une étape précédente.

Dans le cas d'un point lisse, comme l'indice de la composante de gauche devrait être positif, d'après la proposition 9.1, la normale doit pointer à droite dans la convexité de Γ_n et donc la courbure se doit d'être négative, ce qui est absurde.



Dans le cas d'une singularité, celle-ci étant bien orienté, on montre facilement que l'on peut trouver des points encore plus à gauche que notre extrémité et d'indice négatif, ce qui est également absurde.



Etape 2 : image de l'intersection

L'intersection étant d'ordre fini et isolé, dans un petit voisinage elle ressemble à un "camembert".

Maintenant on considère le secteur d'indice le plus négatif. D'après la proposition 9.1, on en déduit que la normale pointe vers l'intérieur de ce secteur. Enfin on en déduit l'orientation des courbes qu'il l'encadre, comme présenté dans le dessin suivant.

Etape 3 : Découpage

On choisit un paramétrage par la longueur d'arc $\gamma_n : [0, l[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de Γ_n , tel que $\gamma_n(0) \neq p$. Alors il existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ et $s_1 < s_2 \in [0, 2\pi[$ tels que le bord du secteur d'indice négatif soit paramétré par : $\gamma_n(]s_1 - \epsilon_1, s_1])$ et $\gamma_n([s_2, s_2 + \epsilon_2])$. On pose alors $\Gamma_{n+1} = \gamma_n(]s_1, s_2])$, et on vérifie facilement que la singularité créée en s_2 est bien orientée.

Fin de la preuve :

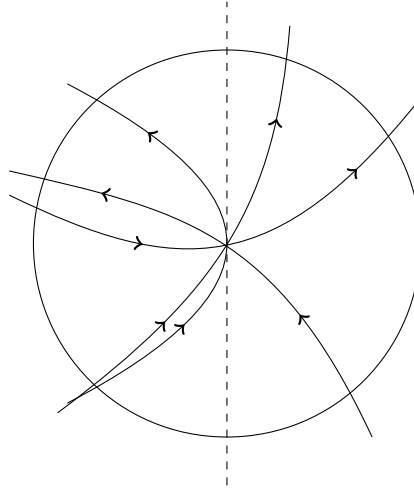


FIGURE 17 – Image de la courbe autour de l'extrémité gauche

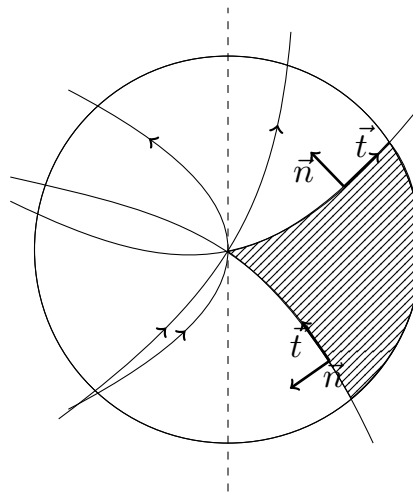


FIGURE 18 – Le secteur de plus petit indice

Le nombre de composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$ étant strictement décroissant, l'algorithme s'arrête. On obtient alors une courbe fermée dont tous les indices sont positifs ou nuls et dont les singularités sont bien orientées. On applique alors la formule de Stokes généralisée et on obtient

$$\int_{\Omega} \vec{e}, \nabla H(x) \rangle dx = - \left\langle \vec{e}, \oint_{\Gamma_n} \frac{d\vec{t}}{ds} d\sigma \right\rangle = - \sum_{i=1}^k \langle \Delta \vec{t}(s_i), \vec{e} \rangle < 0,$$

où $\gamma_n(s_i)$ sont les singularités de Γ_n , ce qui est absurde et achève la preuve. \square

Références

- [1] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces*, volume 115 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy.
- [2] Björn E. J. Dahlberg. The converse of the four vertex theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(7) :2131–2135 (electronic), 2005.
- [3] Herman Gluck. The converse to the four vertex theorem. *Enseignement Math. (2)*, 17 :295–309, 1971.
- [4] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1997.
- [5] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Notes taken by Peter Lax and John Gray, With a preface by S. S. Chern.
- [6] S. B. Jackson. Vertices for plane curves. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 :564–478, 1944.
- [7] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. *Ann. of Math. (2)*, 101 :317–331, 1975.
- [8] Stephane Kirsch and Paul Laurain. An obstruction to the existence of immersed curves of prescribed curvature. *Potential Anal.*, 32(1) :29–39, 2010.
- [9] Sebastián Montiel and Antonio Ros. *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2009. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt.
- [10] Robert Osserman. The four-or-more vertex theorem. *Amer. Math. Monthly*, 92(5) :332–337, 1985.
- [11] Antonio Ros. The isoperimetric problem. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 175–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.