Université Paris Diderot – Paris 7 16/03/2010
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et C. Leruste

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M2406

Examen partiel

Avertissement : Aucun document n'est autorisé. Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.

I) *Question de cours.* Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que B est connexe et localement connexe par arcs.

1) Soient x un point de E et τ un chemin de B qui part de $p(x)$. Rappeler comment est défini $x.\tau$.
2) Soit σ un chemin de B allant d'un point b_0 à un point b_1. Pourquoi l'application de $p^{-1}(b_0)$ dans $p^{-1}(b_1)$ qui, à un point x, associe $x.\sigma$ est-elle bijective ?
3) A partir de maintenant, fixons un sous-groupe G du groupe des automorphismes du revêtement $p : E \to B$. Supposons que G opère transitivement sur la fibre $p^{-1}(b_0)$ du point b_0 de B. Montrer que G opère transitivement sur toutes les fibres et en déduire que $p : E \to B$ est galoisien.
4) Supposons E connexe. Montrer que tout automorphisme de $p : E \to B$ appartient à G.

II) Soient G un groupe topologique, e son élément neutre et $m : G \times G \to G$ sa multiplication. Soit $\pi = \pi_1(G, e)$. On note aussi e le lacet constant de valeur e. Soit $\mu : \pi \times \pi \to \pi$ la composition de l'isomorphisme canonique

$$\pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G \times G, e)$$

avec l'homomorphisme $m_* : \pi_1(G \times G, e) \to \pi_1(G, e)$ induit par m.

1) Montrer que les sous-groupes $\{e\} \times \pi$ et $\pi \times \{e\}$ commutent dans $\pi \times \pi$. Quelles sont leurs images par μ ?
2) Déduire que π est commutatif.
3) Soient σ et τ deux lacets de G basés en e. Expliciter une homotopie à extrémités fixes entres $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$.

III) Étant donné un entier $n \geq 1$, on note

$$p : S^n \to \mathbb{R}P^n : u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \mapsto [u] = [u_1, \dots, u_{n+1}]$$

la surjection canonique. On pose $\widehat{p} = p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}} : S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : (u, x) \mapsto ([u], x)$.

On définit

$$f : S^n \times \mathbb{R} \to S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : (u, t) \mapsto (u, tu)$$

et on pose $\phi = \widehat{p} \circ f : S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

1) Notant $X = \phi(S^n \times \mathbb{R})$, montrer que $X = \{([u], x) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ x = \lambda u\}$.

2) Montrer que X est homéomorphe au quotient Q de $S^n \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence

$$[(u', t') \sim (u, t)] \iff [(u', t') = \pm(u, t)] \, .$$

3) On suppose que $n = 1$ et on note $Y = \phi(S^1 \times [-1, +1])$.
Montrer que Y est homéomorphe au ruban de Möbius (fermé, c'est-à-dire bord inclus).

IV) Soit, dans $\mathbb{R}^2$, le segment $S = [-1, +1] \times \{0\}$ et le cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, dont on note C_+ (*resp.* C_-) le demi-cercle supérieur (*resp.* inférieur). Soit $B = S \cup C$.

Soit, dans $\mathbb{R}^3$, le cube $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max(|x|, |y|, |z|) \leq 1\}$, dont on nomme les sommets comme dans la figure ci-dessous. Soit E l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ situés sur les arêtes de Γ.

1) Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les segments $I = [0, 1] \times \{(0, 0)\}$, $J = \{0\} \times [0, 1] \times \{0\}$, $K = \{(0, 0)\} \times [0, 1]$.
Définir une application continue $q : I \cup J \cup K \to B$ telle que

$$q(0, 0, 0) = (-1, 0) \qquad \text{et} \qquad q(1, 0, 0) = q(0, 1, 0) = q(0, 0, 1) = (+1, 0) \, ,$$

et dont la restriction à I (*resp.* J, K) soit un homéomorphisme sur S (*resp.* C_+, C_-).

2) On considère les 5 ensembles à 4 éléments suivants :

$$T = \{\alpha, \beta', \gamma, \delta'\} \qquad \text{et} \qquad T' = \{\alpha', \beta, \gamma', \delta\} \, ,$$

cependant que X (*resp.* Y,Z) est l'ensemble des arêtes de Γ parallèles au premier (*resp.* deuxième, troisième) axe de coordonnées.
Dans le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$, les éléments qui fixent simultanément T, T', X, Y, Z forment un sous-groupe qu'on notera G.

(a) Montrer que $G \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ est constitué de demi-tours dont on précisera les axes.
(b) Montrer que G est un groupe de Klein (isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).

3) (a) Utiliser l'application q de la question 1. pour définir une application continue $p : E \to B$ qui soit un revêtement.
(b) Combien ce revêtement p a-t-il de feuillets ?
(c) Donner un recouvrement de B par des ouverts trivialisants. Justifier.

4) (a) Montrer que le groupe des automorphismes du revêtement p est G.
(b) Dessiner les revêtements intermédiaires entre p et id_B.

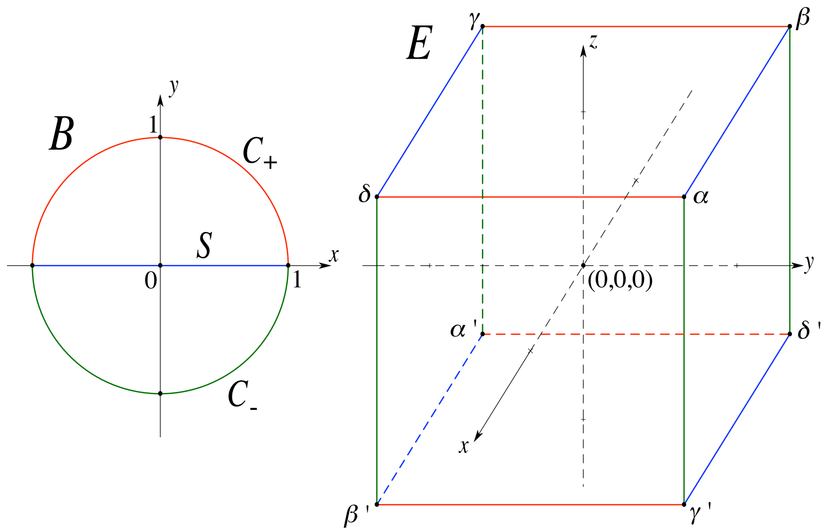

Figure 1: exercice IV.1

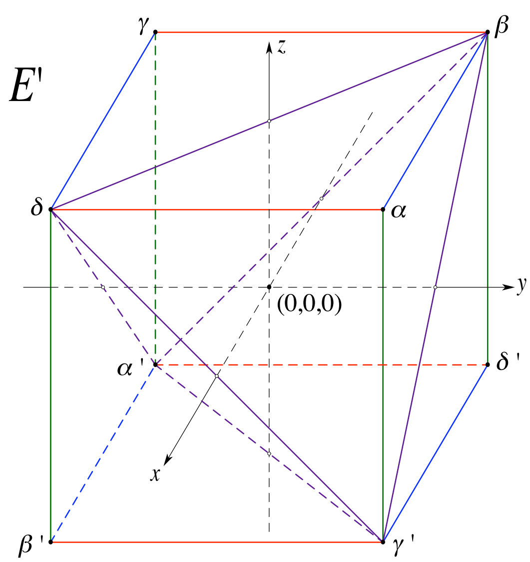

Figure 2: exercice IV.5