Université Paris Diderot – Paris 7 26/05/2009
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et C. Leruste

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M2406

Examen final

Avertissement : Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.

1) *Question de cours :* Soient X un espace topologique et $\alpha : I \to X$ et $\beta : I \to X$ deux chemins (identifiés avec des 1-simplexes).

   a) Que veut dire la phrase 'α est homologue à β' ?
   b) Montrer que si α et β sont composables, le chemin composé $\alpha\beta$ est homologue à la 1-chaîne $\alpha + \beta$. Déduire que le chemin inverse α^{-1} est homologue à $-\alpha$ (en admettant que des chemins homotopes sont homologues).
   c) Supposons X connexe par arcs. Soit x_0 un point de X. Quel est le lien précis entre les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $H_1(X)$? (On ne demande pas de justifier la réponse).

2) a) Soient X et Y deux espaces topologiques et f et g deux applications continues de X dans Y. Que veut dire la phrase 'f est homotope à g' ?
   b) Soient x un point de la sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ et y un point de S^n différent de $-x$. Montrer que le segment formé des points

$$G(x, y, t) = (1 - t)x + ty \; , \; t \in I \; ,$$

   ne passe pas par l'origine; faire un dessin pour $n = 1$. Déduire que l'application $t \mapsto H(x, y, t) = G(x, y, t)/\|G(x, y, t)\|$ est un chemin bien défini de S^n qui relie x à y.
   c) Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue sans point fixe. Montrer que f est homotope à l'application antipodale $g : x \mapsto -x$.

3) Soient n un entier supérieur ou égal à un et E un espace vectoriel euclidien de dimension $n + 1$. On note $(,)$ le produit scalaire de E. Soit S^n la sphère unité dans E. Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E. On se propose de montrer, par récurrence sur n, que σ induit $-\mathrm{Id}$ dans $H_n(S^n)$.

   a) Supposons que $n = 1$. Soit p_0 un point d'intersection de la droite H avec le cercle S^1. Identifions E avec $\mathbf{C}$. Soit α le demi-arc $t \mapsto e^{\pi i t} p_0$, $t \in I$. Faire un dessin. Montrer que la classe d'homologie de $\alpha - \sigma(\alpha)$ est un générateur de $H_1(S^1)$ (on pourra se servir de la question 1). Déduire que σ induit $-\mathrm{Id}$ dans $H_1(S^1)$.
   b) Supposons à partir de maintenant que $n \geq 2$. Soient v un vecteur de longueur 1 dans H et U la calotte formée des $x \in S^n$ tels que $(v, x) > -1/2$. Soit V la calotte formée de $x \in S^n$ tels que $(v, x) < 1/2$. Montrer que l'on a $\sigma(U) = U$ et $\sigma(V) = V$, que U et V recouvrent S^n et qu'ils sont contractiles.
   c) Soit E' le sous-espace orthogonal à v. Vérifier que $\sigma(E') = E'$ et que l'application induite $\sigma' : E' \to E'$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $H' = E' \cap H$ de E' (on pourra compléter $v_1 = v$ en une base orthonormée $v_1, \ldots, v_n$ de H et une base orthonormée $v_1, \ldots, v_{n+1}$ de E).

d) Identifions $S^{n-1} \subset E'$ avec l'intersection $S^n \cap E'$. Montrer que l'inclusion $i : S^{n-1} \to U \cap V$ induit des isomorphismes en homologie. Déduire que σ induit $-\mathrm{Id}$ dans $H_{n-1}(U \cap V)$.

e) Décrire les groupes qui apparaissent dans la suite suivante, extraite de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris,

$$H_n(U) \oplus H_n(V) \to H_n(S^n) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \to H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V).$$

Montrer que δ est un isomorphisme.

f) Montrer, à l'aide de la fonctorialité de δ, que σ induit $-\mathrm{Id}$ dans $H_n(S^n)$.

4) Soient $n \geq 1$ et S^n la sphère unité dans l'espace $E = \mathbf{R}^{n+1}$.

a) Montrer que l'application antipodale $x \mapsto -x$ est la composition de $n+1$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans dans E.

b) Montrer que l'application antipodale $x \mapsto -x$ induit $(-\mathrm{Id})^{n+1}$ dans $H_n(S^n)$ (on pourra se servir de l'exercice 3).

c) Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue sans points fixes. Montrer que l'application $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ est $(-\mathrm{Id})^{n+1}$ (on pourra se servir de l'exercice 2 c).

5) Soient $n \geq 1$ et S^n la sphère unité dans l'espace $E = \mathbf{R}^{n+1}$.

a) Montrer que pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, il existe un unique entier $\deg(f)$ tel que l'application $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ soit $\deg(f)\,\mathrm{Id}$. On appelle $\deg(f)$ le *degré de* f.

b) Montrer que pour deux applications continues f et $g : S^n \to S^n$, on a $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ et que $\deg(\mathrm{Id}) = 1$. Montrer que si f est un homéomorphisme, on a $\deg(f) = \pm 1$.

c) Montrer que si $f : S^n \to S^n$ est une application continue sans points fixes, on a $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ (on pourra se servir de l'exercice 4c).

d) Soient G un groupe et

$$G \times S^n \to S^n$$

une action de G par des applications continues. Pour $g \in G$, notons $\lambda_g : S^n \to S^n$ l'application $x \mapsto gx$. Montrer que l'application $g \mapsto \deg(\lambda_g)$ est un homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

e) Supposons que G est non trivial et agit librement sur S^n. Montrer que si n est pair, le groupe G est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.