

## M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M 2406

### Examen final

*Avertissement : Les documents sont interdits. Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.*

- 1) *Question de cours/TD :*
  - a) Munir la bouteille de Klein d'une structure de  $\Delta$ -complexe.
  - b) Déterminer l'homologie de ce  $\Delta$ -complexe.
  - c) Que dire de l'homologie singulière de la bouteille de Klein ?
- 2) Soit une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Supposons que  $f$  est une surjection sur un facteur direct de rang 2 et  $g$  une surjection sur un facteur direct de rang 1.

- a) Montrer que  $A$  et  $C$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ .
  - b) Montrer que  $B$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^4$ .
- 3) On se propose de calculer l'homologie de l'espace appelé 'surface compacte orientable de genre 2'. Soit  $X$  l'espace topologique obtenu à partir du disque unité fermé de  $\mathbb{C}$  en enlevant les disques ouverts de rayon  $1/4$  et de centres  $1/2$  et  $-1/2$  (voir la figure 1).
    - a) Montrer que  $X$  est un rétract par déformation de  $\mathbb{C} \setminus \{1/2, -1/2\}$ .
    - b) Quel est le groupe fondamental  $\pi_1(X, 0)$  ?
    - c) Montrer que les groupes d'homologie  $H_p(X)$ ,  $p \geq 0$ , sont libres et en exhiber des bases<sup>1</sup>.
    - d) Soit  $Y \subset X$  le sous-espace fermé formé des trois colliers hachurés (figure 2). Montrer que les groupes d'homologie de  $Y$  sont libres et en exhiber des bases.
    - e) Calculer, dans les bases obtenues précédemment, la matrice de l'application  $\alpha_p : H_p(Y) \rightarrow H_p(X)$ ,  $p \geq 0$ , induite par l'inclusion  $Y \subset X$ .
    - f) Montrer à l'aide d'une suite de dessins que l'espace  $X$  est homéomorphe à l'espace  $X'$  de la figure 3.
    - g) Soit  $X''$  une autre copie de  $X'$  et soit  $Z$  l'espace obtenu en recollant  $X'$  et  $X''$  le long de leurs sous-espaces  $Y'$  et  $Y''$  (homéomorphes à  $Y$ ) comme dans la figure 4. Justifier l'existence d'une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow H_1(Y) \xrightarrow{f} H_1(X') \oplus H_1(X'') \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_0(Y) \xrightarrow{g} H_0(X') \oplus H_0(X'') \longrightarrow H_0(Z) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

- h) Déterminer les groupes  $H_p(Z)$ ,  $p \geq 0$ . Indication : on pourra se servir de l'exercice 2.

---

<sup>1</sup>Nous considérons le module nul comme libre sur la base vide.

4) Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques et  $f$  et  $g$  des applications continues  $X \rightarrow Y$ . Soit  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\partial I$  l'ensemble  $\{0, 1\}$ . Soit  $Z$  le quotient de la réunion disjointe  $(X \times I) \amalg Y$  par la relation qui identifie les points  $(x, 0)$  avec  $f(x)$  et les points  $(x, 1)$  avec  $g(x)$ . Nous admettrons que l'on a une suite exacte longue

$$(1) \quad \cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z) \longrightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

a) Supposons que  $X = Y = S^1$ , que  $f$  est l'identité et que  $g$  est l'application  $z \mapsto \bar{z}$ . Montrer que  $Z$  est homéomorphe à la bouteille de Klein.

b) Sous les hypothèses du point précédent, et en supposant l'existence de la suite (1), montrer qu'on a une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z},$$

où  $Z$  est la bouteille de Klein. Dédurre que  $H_2(Z)$  s'annule et que  $H_1(Z)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$ .