2.9 Homologie simpliciale et homologie singulière

2.9.1 Homologie relative et homologie absolue

Déf: Soit X un espace top. non vide. Le <u>complexe de chaînes augmenté de X</u> est

$$\tilde{C}(X): \quad \cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \underset{\text{degré } -1}{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

où $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$. L'<u>homologie réduite</u> de X est $\tilde{H}_n(X) = H_n(\tilde{C}(X))$, $n \geq 0$.

Rques: 1) On a $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pour tout $n \geq 1$.

2) Si X est contractile, on a $\tilde{H}_n(X) = 0$, $\forall n \geq 0$.

3) Si X a N compos. connexes par arcs, alors $H_0(X)$ est libre de rang N et $\tilde{H}_0(X)$ libre de rang $N-1$.

<u>Prop 1</u>: Soient (X,A) et (X',A') des paires d'espaces top. munies de ss-espaces. Soient

$$f: (X,A) \longrightarrow (X',A') \quad \text{et} \quad g: (X,A) \longrightarrow (X',A')$$

des <u>morph. de paires</u> (i.e. $f: X \to X'$ est continue et $f(A) \subseteq A'$ et de même pour g). Soit F une <u>homotopie relative</u> de f à g, i.e.

$$F: X \times I \longrightarrow X', \quad F(A,t) \subseteq A', \ \forall t \in I$$

$$F|_{X \times \{0\}} = f \quad \text{et} \quad F|_{X \times \{1\}} = g.$$

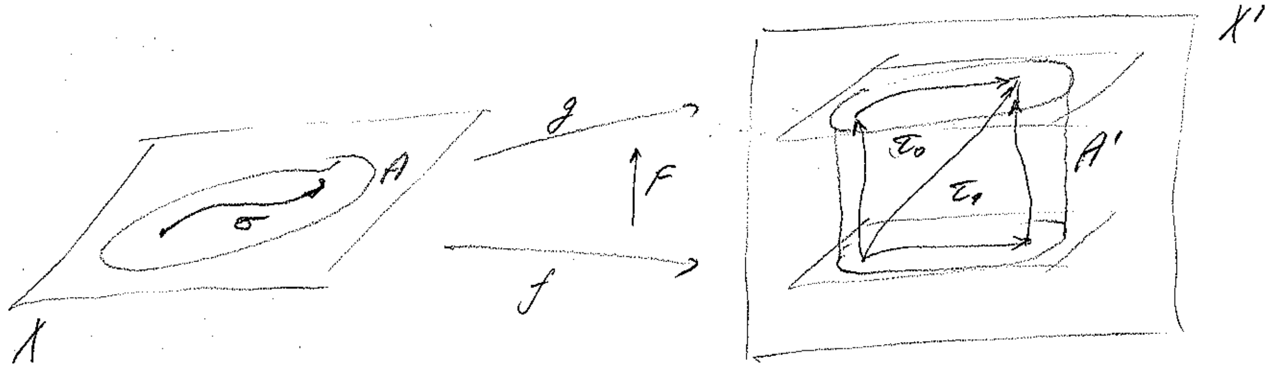
Alors f et g induisent la même appl. $H_n(X,A) \to H_n(X',A')$ pour tout $n \geq 0$.

Dém. : La dém. du thm 2.3.2 (p. 105) nous fournit des "opérateurs prismatiques"

$$P_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X')$$

t.q. $\quad C(g)_n - C(f)_n = \partial \cdot P_n + P_{n-1} \cdot \partial \;, \; \forall n \geq 0.$

P. ex.



$$\sigma \xrightarrow{P_1} \tau_0 - \tau_1$$

La construction de P_n à partir de l'homotopie F montre que P_n envoie $C_n(A)$ dans $C_n(A')$ pour tout $n \geq 0$.

Donc P_n induit un homom. bien défini

$$\underset{\overset{\shortparallel}{C_n(X,A)}}{\bar{P}_n : C_n(X)/C_n(A)} \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{C_n(X',A')}}{C_{n+1}(X')/C_{n+1}(A')}$$

et on a clairement

$$C(g,A)_n - C(f,A)_n = \partial \cdot \bar{P}_n + \partial \cdot \bar{P}_{n-1} \;, \quad \forall n \geq 0.$$

Donc les morphismes de complexes $C(f,A) : C(X,A) \longrightarrow C(X',A')$ et $C(g,A)$ sont homotopes. Par le lemme 2.3.1, ils induisent la même application en homologie. ✓

<u>Corollaire 2</u> : Soit $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ une équivalence d'homotopie de paires (i.e. il existe un morphisme de paires $g : (X', A') \to (X, A)$ t.q. $f \circ g$ est homotope, relativement à A', à l'identité de X', et de façon analogue pour $g \circ f$). Alors f induit un isom.

$$f : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X', A'), \quad \forall\, n \geq 0.$$

<u>Lemme 3</u> : Soit (X, x_0) un espace top. pointé. Alors on a un isom. canonique $\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X, x_0)$, $\forall n \geq 0$.

Dém. : On a la suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} H_n(\{x_0\}) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X, x_0) \arrow[dll] \\ H_{n-1}(\{x_0\}) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

et on sait que $H_{n-1}(\{x_0\}) = 0 = H_n(\{x_0\})$ pour $n \geq 2$.

Donc $\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X, x_0)$ pour $n \geq 2$. On a la suite exacte

$$\begin{tikzcd} \overbrace{H_1(\{x_0\})}^{=0} \arrow[r] & H_1(X) \arrow[r] & H_1(X, x_0) \arrow[dll] \\ H_0(\{x_0\}) \arrow[r, "\text{injectif!}"'] & H_0(X) \arrow[r] & H_0(X, x_0) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

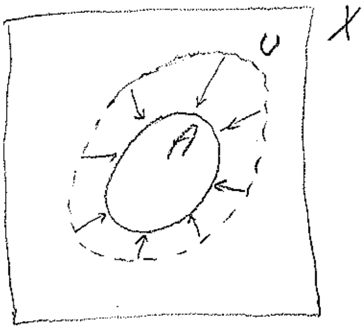
Donc $\tilde{H}_1(X) = H_1(X) \xrightarrow{\sim} H_1(X, x_0)$. On vérifie facilement que l'application can. $\tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X, x_0)$ est un isomorphisme d'inverse induit par :

$$\text{classe de } \sum n_i \sigma_i \longleftrightarrow \text{classe de } \left(\sum n_i \sigma_i\right) - \left(\sum n_i\right) \cdot x_0$$

✓

Déf : Une paire (X,A) est <u>bonne</u> si A est fermé et il existe un ouvert U de X contenant A et une rétraction par déformation de U sur A (i.e. si $i : A \to U$ est l'inclusion, on a $r : U \to A$ t.q.

- $r \circ i = \mathbb{1}_A$
- $i \circ r \underset{htp}{\simeq} \mathbb{1}_U$ par une htpie relative à A).



Rque : Alors l'inclusion $(A,A) \hookrightarrow (U,A)$ est une éq. d'htpie de paires !

Thm 4 : Pour une bonne paire (X,A), la projection

$$q : (X,A) \longrightarrow (X/A, A/A)$$

induit des isomorphismes

$$q_* : H_n(X,A) \xrightarrow{\sim} H_n(X/A, A/A) \underset{L3}{\overset{\sim}{=}} \tilde{H}_n(X/A)$$

pour tout $n \geq 0$.

Dém. : Soit U comme dans la définition. Pour tout $n \geq 0$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "q_*"'] & H_n(X,U) \arrow[d] & H_n(X \setminus A, U \setminus A) \arrow[l, "\varphi_3"'] \arrow[d, "\varphi_5"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "\varphi_2"'] & H_n(X/A, U/A) & H_n(X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A) \arrow[l, "\varphi_4"]
\end{tikzcd}$$

<u>Etape 1</u> : φ_1 est un isomorphisme.

Dém. : On a la suite exacte longue associée à $A \subset U \subset X$:

$$\cdots \longrightarrow H_n(U,A) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,U) \longrightarrow H_{n-1}(U,A) \to \cdots$$

Comme $(A,A) \hookrightarrow (U,A)$ est une équiv. d'homotopie de paires, on a $H_n(U,A) \simeq H_n(A,A)$. (Cor. 2)
et bien sûr $H_n(A,A) = 0$, $\forall n \geq 0$. Donc

$$H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,U)$$

est bien un isomorphisme.

<u>Etape 2</u> : φ_2 est un isomorphisme

Dém. : On a une équiv. d'homotopie de paires

$$(A/A, A/A) \longrightarrow (U/A, A/A)$$

et on peut utiliser le même argument qu'à l'étape 1.

<u>Etape 3</u> : φ_3 et φ_4 sont des isomorphismes.

Dém. : L'adhérence de A (égale à A) est contenue dans U et de même pour l'adhérence de A/A dans U/A. Donc le théorème d'excision s'applique.

<u>Etape 4</u> : φ_5 est un isomorphisme

Dém. : L'application de projection $X \longrightarrow X/A$ se restreint à un homéomorphisme $X \setminus A \longrightarrow X/A \setminus A/A$ et qui induit un homéomorphisme $U \setminus A \longrightarrow U/A \setminus A/A$. On a donc un isomorphisme de paires $(X \setminus A, U \setminus A) \xrightarrow{\sim} (X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A)$.

<u>Etape 5</u> : L'affirmation résulte maintenant de la commutativité du diagramme. ✓

2.9.2 Bonnes paires associées aux Δ-complexes

Soit X un espace topologique.

Rappel : Une structure de Δ-complexe sur X est la donnée d'une famille d'applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \longrightarrow X$, $\alpha \in \Lambda$, telle que

1) la restriction de σ_α à $\mathring{\Delta}^{n_\alpha}$ est injective, $\forall \alpha \in \Lambda$, et X est la réunion disjointe des images $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$;
2) pour chaque $\alpha \in \Lambda$ et chaque face $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$, la restriction de σ_α à $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$ est égale à $\sigma_\beta : \Delta^{n_\beta} \longrightarrow X$ pour un unique $\beta \in \Lambda$ (donc $n_\beta = n_\alpha - 1$ et $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ d_i$)
3) Une partie U de X est ouverte ssi $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans Δ^{n_α} pour tout $\alpha \in \Lambda$.

(1)

Supposons que X est muni d'une structure de Δ-complexe.

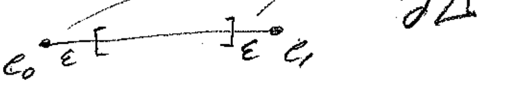
But : Pour tout sous-Δ-complexe fermé $A \subset X$, la paire (X, A) est bonne.

Déf : Pour $n \geq 0$ et $0 < \varepsilon < 1$, le bord épaissi $\partial^\varepsilon \Delta^n$ est l'ensemble des points de la forme

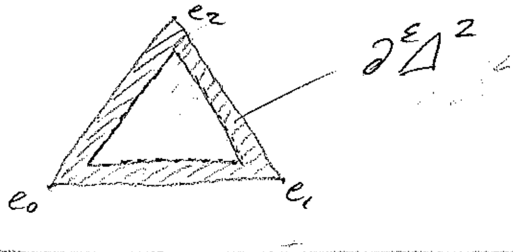
$$x = t \cdot b + (1-t) \cdot y$$

où b est le barycentre de Δ^n, $y \in \partial \Delta^n$ et $0 \leq t < \varepsilon$

Exemples : $n = 1$:



$n = 2$:



(1) Pour $n \geq 0$, le n-squelette X^n est la réunion des $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$, $n_\alpha \leq n$

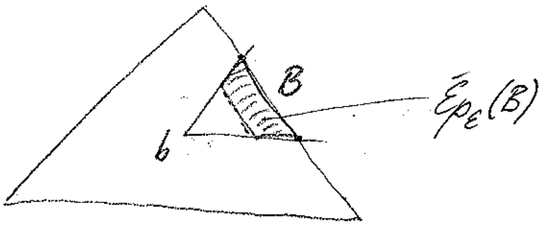
Rque : Par définition, le bord épaissi est un ouvert de Δ^n et le bord $\partial\Delta^n$ est un rétract par déformation du bord épaissi $\partial^\varepsilon\Delta^n$.

Déf : Pour une partie $B \subset \partial\Delta^n$ et $0<\varepsilon<1$, <u>l'épaississement</u> de B est la partie $\acute{E}p_\varepsilon(B)$ formée des points

$$x = t\cdot b + (1-t)y \,, \quad 0 \leq t < \varepsilon,$$

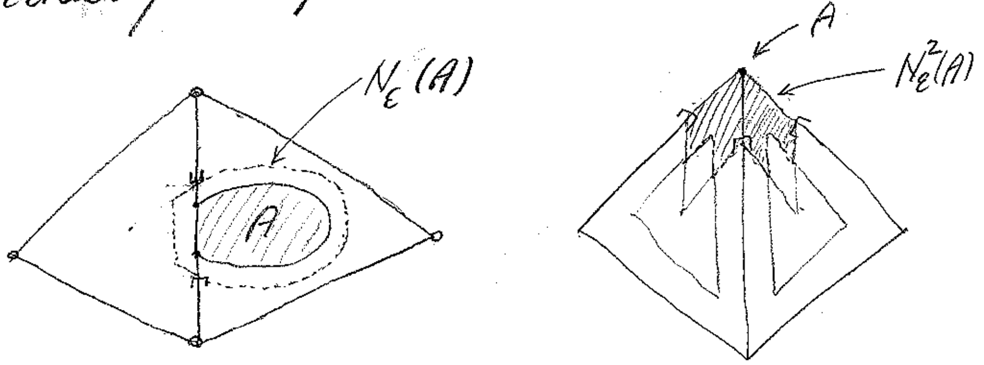
où b est le barycentre de Δ^n et $y \in B$.

Exemple :



Rque : Si B est vide, alors $\acute{E}p_\varepsilon(B)$ est vide.

Rque : B est un rétract par déformation de $\acute{E}p_\varepsilon(B)$.



Constr. : Soit X un Δ-complexe et $A \subset X$ un fermé. Soit $\varepsilon : \Lambda \to \,]0,1[$.
Pour $0 \leq n$, soit X^n le n-squelette de X.
Soit

$$N_\varepsilon^0(A) = A \cap X^0$$

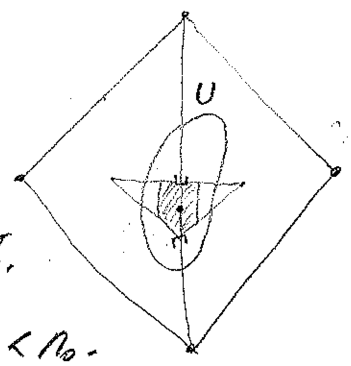
$N_\varepsilon^{n+1}(A)$ = partie de X^{n+1} t.q. pour tout $\alpha \in \Lambda$ t.q. $n_\alpha \leq n+1$ l'ensemble $\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ est égal à

$$\acute{E}p_{\varepsilon(\alpha)}\left(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))\right) \cup B_{\varepsilon(\alpha)}\left(\sigma_\alpha^{-1}(A) \setminus \partial\Delta^{n_\alpha}\right)$$

Lemme 1 : Soit x un point de X

a) Les $N_\varepsilon(x)$ forment une base de voisinages de x.

b) Chaque $N_\varepsilon(x)$ est contractile.



Dém. : a) Soit U un ouvert de X contenant x.
On a $x \in \sigma_{\alpha_0}(\mathring{\Delta}^{n_{\alpha_0}})$ pour un unique simplexe σ_{α_0}. Soit n_0 sa dimension. On a $N_\varepsilon^n(x) = \phi$ pour $n < n_0$ pour tout $\varepsilon : \Lambda \to]0,1[$.
On choisit donc $\varepsilon(\alpha) = 1/2$ pour tout α t.q. $n_\alpha < n_0$.
On choisit $\varepsilon(\alpha_0)$ t.q. $\overline{B_{\varepsilon(\alpha_0)}(\sigma_{\alpha_0}^{-1}(x))} \subseteq \sigma_{\alpha_0}^{-1}(U)$
et on choisit $\varepsilon(\alpha) = 1/2$ pour tout autre simplexe σ_α de dim. n_0.
Alors $N_\varepsilon^n(x) = \phi$ pour $n < n_0$ et $\overline{N_\varepsilon^{n_0}(x)}$ est un voisinage Δ-compact[1] de x dans $X^{n_0} \cap U$. Pour $n > n_0$, on procède par récurrence sur $n > n_0$: On suppose par récurrence que $\overline{N_\varepsilon^{n-1}(x)}$ est un voisinage Δ-compact de x dans $X^{n-1} \cap U$.
Alors pour tout simplexe σ_α de dimension n, on peut trouver $0 < \varepsilon(\alpha) < 1$ t.q.

$$\overline{\acute{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(N_\varepsilon^{n-1}(x))} \subset \sigma_\alpha^{-1}(U)$$

Alors $\overline{N_\varepsilon^n(x)}$ est un voisinage Δ-compact de x dans $X^n \cap U$.

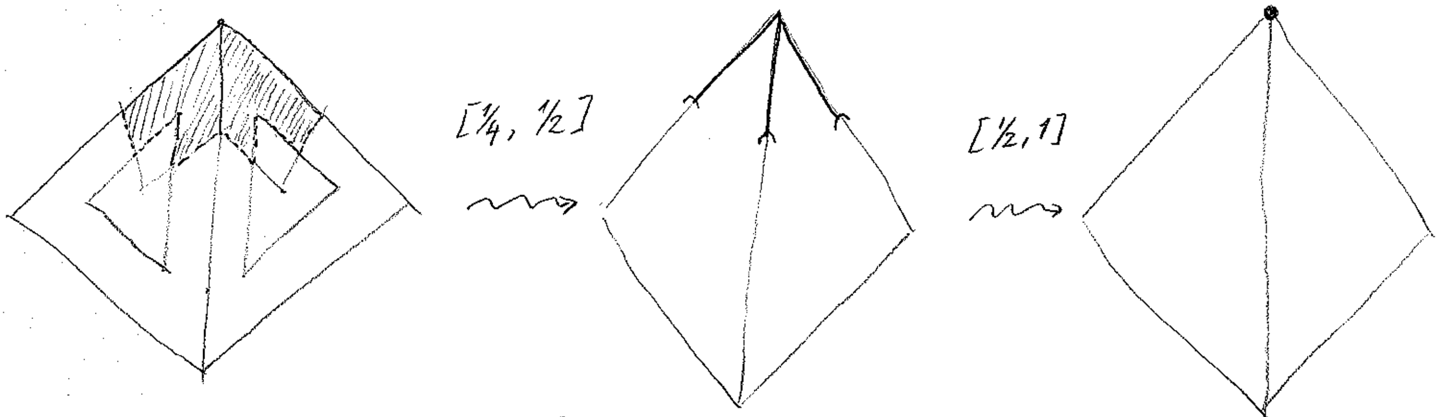
b) Comme dans a), soit σ_{α_0} l'unique simplexe tel que x appartient à $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$ et soit n_0 sa dimension. Alors $N_\varepsilon^n(x)$ est vide pour $n < n_0$, $N_\varepsilon^{n_0}(x)$ est une boule $B_{\varepsilon(\alpha_0)}(x)$

1) I.e. voisinage dont l'intersection avec chaque simplexe fermé est compact.

et pour $n > n_0$, on a

$$\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(x)) = \mathcal{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x)))$$

pour tout simplexe σ_α de dimension n. On construit une homotopie $F: N_\varepsilon(x) \times I \longrightarrow N_\varepsilon(x)$ entre l'identité de $N_\varepsilon(x)$ et l'application constante $N_\varepsilon(x) \longrightarrow \{x\}$ telle que pour tout simplexe σ_α de dimension $n > n_0$, F rétrécit l'épaississement $\mathcal{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x)))$ sur $\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x))$ pendant que t parcourt $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$



Si $n_0 = 0$, on a terminé.
Si $n_0 > 0$, alors $B_{\varepsilon(\alpha_0)}(x)$ est une boule dans $\sigma_{\alpha_0}(\mathring{\Delta}^{n_{\alpha_0}})$ et on la contracte sur x pendant que t parcourt $[1/2^{n_0}, 1]$.

Prop. 2 : Soit $A \subseteq X$ un sous-Δ-complexe. Alors pour tout $\varepsilon: \Lambda \longrightarrow]0,1[$, le voisinage $N_\varepsilon(A)$ se rétracte par déformation sur A. En particulier, la paire (X, A) est bonne.

Dém. (esquisse) : Si σ_α est un simplexe qui n'appartient pas à A, alors $N_\varepsilon(A) \cap \sigma_\alpha(\Delta^{n_\alpha})$ est obtenu à partir d'un sous-complexe du bord $\sigma_\alpha(\partial\Delta^{n_\alpha})$ par épaississements successifs.

On peut alors construire une rétraction par déformation

de $N_\varepsilon(A)$ sur A comme dans la démonstration du

Lemme 2. ✓

2.9.3 Base pour l'homologie d'un bouquet de sphères

Déf: Soient $n \geq 1$ un entier et I un ensemble.

Un bouquet de sphères indexées par I est un esp. top.

homéomorphe à
$$\bigvee_I S^n = \left(\coprod_I \Delta^n\right) \Big/ \left(\coprod_I \partial\Delta^n\right).$$

Exemple : Un bouquet de trois 1-sphères :

Lemme 1 : Soit X un Δ-complexe. Alors pour tout $n \geq 1$,

le quotient X^n/X^{n-1} est homéomorphe

au bouquet de n-sphères
$$\left(\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^{n_\alpha}\right) \Big/ \left(\coprod_{n_\alpha = n} \partial\Delta^{n_\alpha}\right) = \bigvee_{n_\alpha = n} S^n$$

Dém. (esquisse) : Les applications $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$, où $n_\alpha = n$, induisent

une application continue
$$\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^n \longrightarrow X^n$$

qui induit l'homéomorphisme recherché. ✓

Soit $n \geq 1$. Soit I un ensemble et, pour tout $i \in I$, soit Δ^n_i une copie de Δ^n associée à i. Soit

$$\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow \coprod_{i \in I} \Delta^n_i$$

l'inclusion de $\Delta^n_i = \Delta^n$.

Rques : 1) Les σ_i sont des n-cycles relatifs à $\coprod_{i\in I} \partial \Delta^n_i$ car $\partial \sigma_j \in C_{n-1}(\coprod_{i \in I} \partial \Delta^n_i)$ pour tout $j \in I$.

2) On a l'épaississement $\coprod_{i\in I} \partial\Delta^n_i \subset \coprod_{i \in I} \partial^\varepsilon \Delta^n_i$, $\varepsilon = 1/2$, qui se rétracte par déformation sur $\coprod_{i \in I} \partial \Delta^n_i$. Donc la paire $(\coprod_{i\in I} \Delta^n_i, \coprod_{i \in I} \partial \Delta^n_i)$ est bonne. (C'est aussi une conséquence de la Prop. 2.9.2.2).

Prop. 2 : Les classes des σ_i forment une base de $H_n(\coprod_{i\in I} \Delta^n_i, \coprod_{i \in I} \partial\Delta^n_i)$ $\left(\xleftarrow{\sim} H_n(\coprod_{i \in I} \Delta^n_i / \coprod_{i\in I} \partial_i \Delta^n) = H_n(\bigvee_{i \in I} S^n)\right)$
Les homologies en degrés $\neq n$ de $(\coprod \Delta^n_i, \coprod \partial \Delta^n_i)$ s'annulent.

Dém. : Clairement, pour toute famille de paires (X_i, A_i), $i \in I$, on a

$$C(\coprod X_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} C(X_i)$$

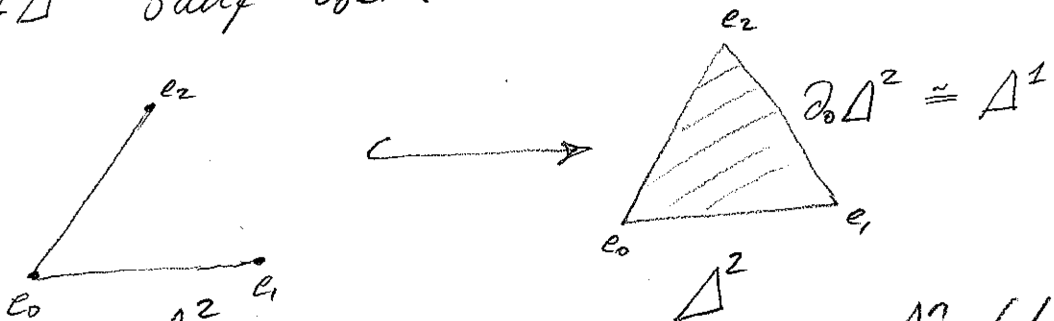
$$C(\coprod A_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} C(A_i)$$

$$C(\coprod X_i, \coprod A_i) \xleftarrow{\sim} (\bigoplus C(X_i))/(\bigoplus C(A_i)) = \bigoplus C(X_i, A_i).$$

Donc il suffit de montrer que $\sigma_n = Id : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$

fournit une base de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ et que $H_m(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ s'annule pour $m \neq n$. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n=0$, le simplexe Δ^0 est un point et $\partial\Delta^0$ est vide. Alors $H_0(\Delta^0, \emptyset)$ est effectivement libre de base le 0-simplexe $\sigma_0 = Id : \Delta^0 \longrightarrow \Delta^0$.

Supposons $n>0$. Soit $\Lambda^n \subset \Delta^n$ la réunion de toutes les faces $\partial_i\Delta^n$ sauf $\partial_0\Delta^n$. Par exemple :



Alors Λ^n est un rétract par déformation de Δ^n (!). Donc $(\Lambda, \Lambda) \hookrightarrow (\Delta^n, \Lambda)$ est une équivalence d'homotopie relative et $H_m(\Delta^n, \Lambda) = 0$ pour tout $m \geq 0$. Considérons la suite exacte longue associée à $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$:

$$\underbrace{H_n(\Delta^n, \Lambda)}_{=0} \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda)}_{=0} \longrightarrow \cdots \qquad (0)$$

$$\hookrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda)$$

On en déduit que l'on a l'isomorphisme

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \qquad (1)$$

et une "chasse au lion" montre qu'il envoie la classe de $\sigma_n = Id_{\Delta^n}$ sur celle de $\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ d_i$.

L'inclusion de la face $\partial_0 \Delta^n \hookrightarrow \partial\Delta^n$ donne un morphisme de (bonnes) paires

$$(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \longrightarrow (\partial\Delta^n, \Lambda)$$

p.ex.

et ce morphisme induit un homéomorphisme dans les quotients

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \xrightarrow{\sim} \partial\Delta^n/\Lambda .$$

On a donc des isomorphismes

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \arrow[d, "\wr"] \\ H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\sim"] & H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda) \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Par l'isomorphisme $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$, la classe de $\sigma_{n-1} = Id_{\Delta^{n-1}}$ est envoyée sur celle de

$$\partial_0 \Delta^n = \sigma_n d_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n d_i$$

(on a la dernière égalité car $\sigma_n d_i \in C(\Lambda)$ pour $i > 0$).

Par l'hypothèse de récurrence, la classe de σ_{n-1} est une base de $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$. Par les isom. (1) et (2), elle correspond à celle de σ_n, qui est donc une base.

L'annulation des $H_m(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, $m \neq 0$, résulte de (0).

2.9.4 Le théorème de comparaison

Déf : Soient X un Δ-complexe et $A \subset X$ un ss-complexe.
Le <u>complexe des chaînes simpliciales relatives</u> est
$$C^{\Delta}(X,A) = C^{\Delta}(X)/C^{\Delta}(A).$$
L'<u>homologie simpliciale relative</u> est définie par
$$H_m^{\Delta}(X,A) = H_m(C^{\Delta}(X,A)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Lemme 1 : Soit X un complexe simplicial, $X^{-1} = \emptyset$ et X^n son n-squelette pour $n \geq 0$. Alors on a
$$H_m^{\Delta}(X^n, X^{n-1}) = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$
et $H_n^{\Delta}(X^n, X^{n-1})$ est libre de base les classes des n-simplexes σ_α de X de dimension $n_\alpha = n$.

Dém. : On a
$$C^{\Delta}(X^n) = \Big(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = 0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \Big)$$
$$C^{\Delta}(X^{n-1}) = \Big(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = 0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \Big)$$
$$C^{\Delta}(X^n, X^{n-1}) \cong \Big(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{n_\alpha = n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \Big)$$
✓

Rque : Soient X un complexe simplicial et $A \subset X$ un sous-complexe. On a une inclusion naturelle $C^{\Delta}(X) \hookrightarrow C(X)$ qui envoie $C^{\Delta}(A)$ dans $C(A)$. D'où un morphisme de complexes canonique $\quad C^{\Delta}(X,A) \longrightarrow C(X,A)$

et donc des homomorphismes canoniques

$$H_m^\Delta(X,A) \longrightarrow H_m(X,A), \quad m \geq 0.$$

Théorème 2 : Ce sont des isomorphismes.

Exemple : Pour $(X,A) = (\Delta^n, \partial\Delta^n)$, l'application can.

$$H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$$

est un isom., car elle envoie $\sigma = Id : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$, qui fournit une base de $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ (Lemme 1), sur la classe de σ dans $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, qui est une base d'après la Prop. 3.1.

Dém. du thm 2 : Supposons d'abord que $A = \phi$.

Étape 1 : L'application can. $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_m(X^n, X^{n-1})$ est un isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém. : Pour $n = 0$, il faut montrer que

$$H_m^\Delta(X^0) \xrightarrow{\sim} H_m(X^0)$$

est un isomorphisme. Comme l'espace X^0 est discret, c'est clair. Supposons $n > 0$. La paire (X^n, X^{n-1}) est bonne. Donc l'application

$$H_m(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_m(X^n/X^{n-1})$$

est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$. Or l'espace X^n/X^{n-1} est homéomorphe au bouquet de n-sphères $\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^n \Big/ \coprod_{n_\alpha = n} \partial\Delta^n$ (Lemme 3.1) et son homologie a pour base les classes des simplexes $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X^n \longrightarrow X^n/X^{n-1}$ de dimension $n_\alpha = n$ (Prop. 9.2). Ces classes sont les images par l'appl. can. d'une base de l'homologie simpliciale de $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1})$ (Lemme 1). Donc l'application canonique est un isomorphisme.

Etape 2 : L'application canonique

$$H_m^\Delta(X^n) \longrightarrow H_m(X^n)$$

est un quasi-isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém. : On procède par récurrence sur n. Pour $n=0$, l'affirmation résulte de l'Étape 1. Supposons $n>0$. On a un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} H_{m+1}^\Delta(X^n,X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & H_m^\Delta(X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & H_m^\Delta(X^n) \arrow[r] \arrow[d, "can"] & H_m^\Delta(X^n,X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & H_{m-1}^\Delta(X^{n-1}) \arrow[d, "\varphi_4"] \\ H_{m+1}(X^n,X^{n-1}) \arrow[r] & H_m(X^{n-1}) \arrow[r] & H_m(X^n) \arrow[r] & H_m(X^n,X^{n-1}) \arrow[r] & H_{m-1}(X^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Ici φ_1 et φ_3 sont des isom. par l'étape 1 et φ_2 et φ_4 par l'hypothèse de récurrence. Donc, par le lemme des cinq, l'appl. can est un isomorphisme.

Etape 3 : On a $\quad C(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X^n)$.

Dém. : Ceci résulte du fait que tout simplexe $\sigma : \Delta^m \to X$ se factorise par un ss-complexe $X^m \hookrightarrow X$, voir le Lemme 3 ci-dessous.

Etape 4 : L'application can. $H_m^\Delta(X) \longrightarrow H_m(X)$ est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$.

Dém. : Surjectivité : Soit c un m-cycle de X. Par l'Étape 3, c est un n-cycle de X^n pour un n. Par l'Étape 2, on a $c = can(c_1) + \partial(c_2)$ pour un m-cycle c_1 de $C_m^\Delta(X^n)$ et une $(m+1)$-chaîne c_2 de X^n. Mais alors la classe de c est l'image de celle de c_1 dans $H_m^\Delta(X)$.

Injectivité : Supposons que c est un m-cycle de $C_m^\Delta(X)$ et que son image par can est un bord de $C(X)$. On a $c \in C_m^\Delta(X^{n_1})$ pour un $n_1 \geq 0$. On a $c = \partial(c_1)$ et c_1 est dans $C_{m+1}(X^{n_2})$ pour un $n_2 \geq 0$, par l'Étape 3. Donc si on choisit $n \geq \max(n_1, n_2)$, alors la classe de c est dans $H_m^\Delta(X^n)$ et son image dans $H_m(X^n)$ s'annule. Par l'étape 2, la classe de c dans $H_m^\Delta(X^n)$ est nulle et donc elle est nulle dans $H_m^\Delta(X)$. ✓

Lemme 3 : Toute partie compacte C d'un Δ-complexe X est contenue dans un sous-complexe finie (en particulier, on a $C \subset X^n$ pour un $n \geq 0$).

Dém. : Supposons que C contient une suite de points x_n, $n \in \mathbb{N}$, qui appartiennent à des simplexes distincts 2 à 2. Montrons que la partie S formée des x_n, $n \geq 0$, est fermée dans X. Une partie F de X est fermée ssi $\sigma_\alpha^{-1}(F)$ est fermé dans Δ^{n_α} pour tout simplexe σ_α de X ssi $F \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout $n \geq 0$. Montrons par récurrence sur n que $S \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout $n \geq 0$. Clairement, $S \cap X^0$ est fermé dans X^0. Supposons que $n > 0$ et que $S \cap X^{n-1}$ est fermé dans X^{n-1}. Soit σ_α un simplexe de dimension n. On a $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n) = (S \cap \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)) \cup (S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n))$. Par l'hypothèse de récurrence, la partie $S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n)$ est fermée dans $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ et par construction de S, la partie $S \cap \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$ est vide ou réduite à un point. Donc $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n)$ est fermée. et $S \cap X^n$ est fermé. Le même argument montre que S' est fermé pour toute partie S' de S. Donc $S \subset C$ est discret dans un espace compact. Mais alors S doit être fini. Contradiction. ✓