

Soit $n \geq 1$. Soit I un ensemble et, pour tout $i \in I$, soit Δ_i^n une copie de Δ^n associée à i . Soit

$$\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow \coprod_{i \in I} \Delta_i^n$$

l'inclusion de $\Delta_i^n = \Delta^n$.

Rqes : 1) Les σ_i sont des n -cycles relatifs à $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n$ car $\partial \sigma_j \in C_{n-1}(\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n)$ pour tout $j \in I$.

2) On a l'épaississement $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n \subset \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, qui se rétracte par déformation sur $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n$.

Donc la paire $(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n, \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n)$ est bonne.

(C'est aussi une conséquence de la Prop. 2.9.2.2).

Prop. 2 : Les classes des σ_i forment une base de $H_n(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n, \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n) \leftarrow H_n(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n / \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n) = H_n(\bigvee_{i \in I} S^n)$

Les homologies en degrés $\neq n$ de $(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n, \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n)$ s'annulent.

Dém. : Clairement, pour toute famille de paires (X_i, A_i) , $i \in I$,

$$C(\coprod X_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I} C(X_i)$$

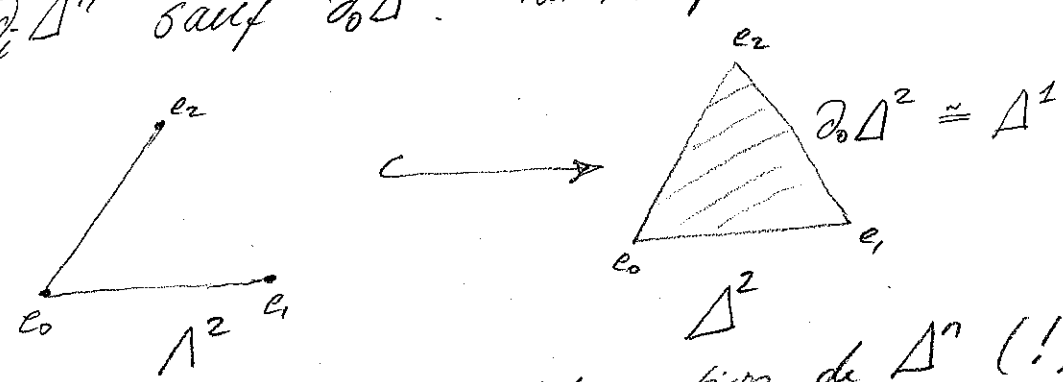
$$C(\coprod A_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I} C(A_i)$$

$$C(\coprod X_i, \coprod A_i) \leftarrow (\bigoplus C(X_i)) / (\bigoplus C(A_i)) = \bigoplus C(X_i, A_i).$$

Donc il suffit de montrer que $\sigma_n = \text{Id} : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$

fournit une base de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ et que $H_m(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ s'annule pour $m \neq n$. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n=0$, le simplexe Δ^0 est un point et $\partial\Delta^0$ est vide. Alors $H_0(\Delta^0, \emptyset)$ est effectivement libre de base le 0-simplexe $\sigma_0 = \text{Id} : \Delta^0 \rightarrow \Delta^0$.

Supposons $n > 0$. Soit $\Lambda^n \subset \Delta^n$ la réunion de toutes les faces $\partial_i \Delta^n$ sauf $\partial_0 \Delta^n$. Par exemple :



Alors Λ^n est un rétract par déformation de Δ^n (!).

Donc $(\Lambda, \Lambda) \hookrightarrow (\Delta^n, \Lambda)$ est une équivalence d'homotopie relative et $H_m(\Delta^n, \Lambda) = 0$ pour tout $m \geq 0$. Considérons la suite exacte longue associée à $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) &\xrightarrow{=0} H_n(\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \\ \hookrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) &\xrightarrow{=0} H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (0)$$

On en déduit que l'on a l'isomorphisme $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ (1)

et une "chasse au lion" montre qu'il envoie la classe de $\sigma_n = \text{Id}_{\Delta^n}$ sur celle de $\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_0 d_i$.

L'inclusion de la face $\partial_0 \Delta^n \hookrightarrow \partial \Delta^n$
 donne un morphisme de (bonnes) paires

$$(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}) \longrightarrow (\partial \Delta^n, \Lambda)$$

p.ex.



et ce morphisme induit un homéomorphisme
 dans les quotients

$$\Delta^{n-1} / \partial \Delta^{n-1} \xrightarrow{\sim} \partial \Delta^n / \Lambda.$$

On a donc des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) & (2) \\ \downarrow \cong & \uparrow & \downarrow \cong & \\ H_{n-1}(\Delta^{n-1} / \partial \Delta^{n-1}) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-1}(\partial \Delta^n / \Lambda) & \end{array}$$

Par l'isomorphisme $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda)$,
 la classe de $\sigma_{n-1} = \text{Id}_{\Delta^{n-1}}$ est envoyée sur celle de

$$\partial_0 \Delta^n = \sigma_n d_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n d_i$$

(on a la dernière égalité car $\sigma_n d_i \in \mathcal{C}(\Lambda)$ pour $i > 0$).

Par l'hypothèse de récurrence, la classe de σ_{n-1} est une
 base de $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1})$. Par les isom. (1) et (2), elle
 correspond à celle de σ_n , qui est donc une base.
 L'annulation des $H_m(\Delta^n, \partial \Delta^n)$, $m \neq 0$, résulte de (0). ✓

2.9.4 Le théorème de comparaison

Def: Soient X un Δ -complexe et $A \subset X$ un ss-complexe.
 Le complexe des chaînes simpliciales relatives est

$$C^\Delta(X, A) = C^\Delta(X) / C^\Delta(A).$$

L'homologie simpliciale relative est définie par

$$H_m^\Delta(X, A) = H_m(C^\Delta(X, A)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Lemme 1: Soit X un complexe simplicial, $X^{-1} = \emptyset$ et X^n son n -squelette pour $n \geq 0$. Alors on a

$$H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

et $H_n^\Delta(X^n, X^{n-1})$ est libre de base les classes des n -simplexes σ_α de X de dimension $n_\alpha = n$.

Dém.: On a

$$\begin{aligned} C^\Delta(X^n) &= (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha) \\ C^\Delta(X^{n-1}) &= (\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha) \\ C^\Delta(X^n, X^{n-1}) &\cong (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \bigoplus_{n_\alpha=n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Prop: Soient X un complexe simplicial et $A \subset X$ un sous-complexe.

On a une inclusion naturelle $C^\Delta(X) \hookrightarrow C(X)$ qui envoie $C^\Delta(A)$ dans $C(A)$. D'où un morphisme de complexes canonique $C^\Delta(X, A) \rightarrow C(X, A)$

et donc des homomorphismes canoniques

$$H_m^\Delta(X, A) \longrightarrow H_m(X, A), \quad m \geq 0.$$

Théorème 2: Ce sont des isomorphismes.

Exemple: Pour $(X, A) = (\Delta^n, \partial\Delta^n)$, l'application can.

$$H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$$

est un isom., car elle envoie $\sigma = Id: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$, qui fournit une base de $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ (Lemme 1), sur la classe de σ dans $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, qui est une base d'après la Prop. 3.1.

Dém. du thm 2: Supposons d'abord que $A = \emptyset$.

Étape 1: L'application can. $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_m(X^n, X^{n-1})$ est un isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém.: Pour $n=0$, il faut montrer que

$$H_m^\Delta(X^0) \xrightarrow{\sim} H_m(X^0)$$

est un isomorphisme. Comme l'espace X^0 est discret, c'est clair.

Supposons $n > 0$. La paire (X^n, X^{n-1}) est bonne. Donc l'application

$$H_m(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_m(X^n/X^{n-1})$$

est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$. Or l'espace X^n/X^{n-1}

est homéomorphe au bouquet de n -sphères $\coprod_{\alpha=1}^n \Delta^n / \coprod_{\alpha=1}^n \partial\Delta^n$

(Lemme 3.1) et son homologie a pour base les classes

des simplexes $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$ de dimension $n_\alpha = n$ (Prop. 9.2). Ces classes sont les images par l'app. can. d'une base de l'homologie simpliciale de $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1})$ (Lemme 1). Donc l'application canonique est un isomorphisme.

Étape 2: L'application canonique

$$H_m^\Delta(X^n) \longrightarrow H_m(X^n)$$

est un quasi-isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém.: On procède par récurrence sur n . Pour $n=0$, l'affirmation résulte de l'étape 1. Supposons $n > 0$. On a un diagramme commutatif aux lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{m+1}^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_m^\Delta(X^{n-1}) & \rightarrow & H_m^\Delta(X^n) & \rightarrow & H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_{m-1}^\Delta(X^{n-1}) \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \text{can} & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 \\ H_{m+1}(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_m(X^{n-1}) & \rightarrow & H_m(X^n) & \rightarrow & H_m(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_{m-1}(X^{n-1}) \end{array}$$

Ici φ_1 et φ_3 sont des isom. par l'étape 1 et φ_2 et φ_4 par l'hypothèse de récurrence. Donc, par le lemme des cinq, l'app. can. est un isomorphisme.

Étape 3: On a $C(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X^n)$.

Dém.: Ceci résulte du fait que tout simplexe $\sigma : \Delta^m \rightarrow X$ se factorise par un ss-complexe $X^m \hookrightarrow X$, voir le Lemme 3 ci-dessous.

Étape 4: L'application can. $H_m^\Delta(X) \rightarrow H_m(X)$ est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$.

Dém. : Surjectivité : Soit c un m -cycle de X . Par l'étape 3, c est un n -cycle de X^n pour un n . Par l'étape 2, on a $c = \text{can}(c_1) + \partial(c_2)$ pour un m -cycle c_1 de $C_m^\Delta(X^n)$ et une $(m+1)$ -chaîne c_2 de X^n . Mais alors la classe de c est l'image de celle de c_1 dans $H_m^\Delta(X)$.

Injectivité : Supposons que c est un m -cycle de $C_m^\Delta(X)$ et que son image par can est un bord de $C(X)$. On a $c \in C_m^\Delta(X^{n_1})$ pour un $n_1 \geq 0$. On a $c = \partial(c_1)$ et c_1 est dans $C_{m+1}^\Delta(X^{n_2})$ pour un $n_2 \geq 0$, par l'étape 3. Donc si on choisit $n \geq \max(n_1, n_2)$, alors la classe de c est dans $H_m^\Delta(X^n)$ et son image dans $H_m(X^n)$ s'annule. Par l'étape 2, la classe de c dans $H_m^\Delta(X^n)$ est nulle et donc elle est nulle dans $H_m^\Delta(X)$. \checkmark

Lemme 3 : Toute partie compacte C d'un Δ -complexe X est contenue dans un sous-complexe fini (en particulier, on a $C \subset X^n$ pour un $n \geq 0$).

Dém. : Supposons que C contient une suite de points $x_n, n \in \mathbb{N}$, qui appartiennent à des simplexes distincts 2 à 2. Montrons que la partie S formée des $x_n, n \geq 0$, est fermée dans X . Une partie F de X est fermée ssi $\sigma_2^{-1}(F)$ est fermé dans Δ^{n_2} pour tout simplexe σ_2 de X ssi $F \cap X^n$ est fermé ^(dans X^n) pour tout $n \geq 0$. Montrons par récurrence sur n que $S \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout $n \geq 0$. Clairement, $S \cap X^0$ est fermé dans X^0 . Supposons que $n > 0$ et

que $S \cap X^{n-1}$ est fermé dans X^{n-1} . Soit σ_α un simplexe
 de dimension n . On a $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n) = (S \cap \sigma_\alpha(\dot{\Delta}^n)) \cup (S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n))$.
 Par l'hypothèse de récurrence, la partie $S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n)$ est fermée
 dans $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ et par construction de S , la partie $S \cap \sigma_\alpha(\dot{\Delta}^n)$
 est vide ou réduite à un point. Donc $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n)$ est
 fermée, et $S \cap X^n$ est fermé. Le même argument montre
 que S' est fermé pour toute partie S' de S . Donc $S \subset \mathbb{C}$
 est discret dans un espace compact. Mais alors S doit être
 fini. Contradiction. \checkmark