

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M 2406

Un corrigé possible de l'examen final

0.1 Exercice 1)

- a) et b) Voir les notes de TD du 5 au 7 avril.
c) Les homologies singulière et simpliciale sont isomorphes.

0.2 Exercice 2)

La suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\gamma} C \longrightarrow 0$$

se décompose au début (resp. à la fin) en l'isomorphisme $A \xrightarrow{\cong} \ker f$ (resp. l'égalité $\text{im } \gamma = C$) encadrant les cinq suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \text{im } f \longrightarrow 0, \quad (1)$$

$$0 \longrightarrow \text{im } f \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\phi} \text{im } \phi \longrightarrow 0, \quad (2)$$

$$0 \longrightarrow \text{im } \phi \longrightarrow B \xrightarrow{\psi} \ker g \longrightarrow 0, \quad (3)$$

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \text{im } g \longrightarrow 0, \quad (4)$$

$$0 \longrightarrow \text{im } g \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\gamma} \text{im } \gamma \longrightarrow 0. \quad (5)$$

a) L'hypothèse faite sur f signifie entre autres que $\text{im } f \cong \mathbb{Z}^2$, montrant que la suite (1) est scindée (puisque \mathbb{Z}^2 est libre).

De $(\ker f) \oplus \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^3$ on tire l'isomorphisme $\ker f \cong \mathbb{Z}$.

On compose avec α pour obtenir $A \cong \mathbb{Z}$.

L'hypothèse faite sur g entraîne via la suite (5) que $\text{im } \gamma \cong \mathbb{Z}$.

Utiliser l'égalité $\text{im } \gamma = C$ pour obtenir $C \cong \mathbb{Z}$.

b) La pleine hypothèse faite sur f implique $\text{im } \phi \cong \mathbb{Z}^2$ via la suite (2).

L'hypothèse faite sur g signifie entre autres que $\text{im } g \cong \mathbb{Z}$, montrant que la suite (4) est scindée (puisque \mathbb{Z} est libre).

De $(\ker g) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$ on tire l'isomorphisme $\ker g \cong \mathbb{Z}^2$.

Reportant dans la suite (3), qui est donc nécessairement scindée, on obtient l'isomorphisme $B \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^4$.

0.3 Exercice 3)

a) Procéder radialement sur (l'adhérence de) chacune des trois composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus X$, centrées en 0 , $1/2$ et $-1/2$ respectivement. (Voir la **figure 1** page 6)

Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$ et $A_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z \mp \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}\}$.

Les homotopies $h : A \times [0, 1] \rightarrow A : (z, t) \mapsto (1-t)z + t \frac{z}{|z|} = z \left[(1-t) + \frac{t}{|z|} \right]$ et

$$h_{\pm} : A_{\pm} \times [0, 1] \rightarrow A_{\pm} : (z, t) \mapsto \pm \frac{1}{2} + \left(z \mp \frac{1}{2} \right) \left[(1-t) + \frac{t}{4|z \mp \frac{1}{2}|} \right],$$

raccordées à l'application identique sur X , réalisent la rétraction demandée.

b) Compte tenu de la rétraction par déformation du **a)**, on a

$$\pi_1(X, 0) \cong \pi_1((\mathbb{C} \setminus \{1/2, -1/2\}), 0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

groupe (non abélien) libre à deux générateurs.

c) On fait encore référence au **a)** pour affirmer que l'homologie de X est isomorphe à celle de $\mathbb{C} \setminus \{1/2, -1/2\}$. Explicitement :

$$H_p(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \end{cases}.$$

Bases proposées :

- pour $H_1(X)$, les classes des 1-simplexes

$$\sigma_{\pm} : \Delta^1 \rightarrow X : (1-t, t) \mapsto \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{4} e^{2i\pi t}$$

faisant respectivement un tour de $\pm 1/2$;

- pour $H_0(X)$, la classe du 0-simplexe d'image 0.

d) Chaque collier se rétracte radialement par déformation sur, disons, son cercle de rayon moyen. L'homologie de Y est donc (isomorphe à) celle de la réunion disjointe de 3 cercles. Explicitement :

$$H_p(Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 2 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si } p = 1 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si } p = 0 \end{cases}.$$

Bases proposées :

- pour $H_1(Y)$, les classes des 1-simplexes associés aux générateurs canoniques des groupes fondamentaux de chacun des cercles-rétracts ;
- pour $H_0(Y)$, les classes de 0-simplexes d'images arbitrairement choisies dans chacun des colliers.

e) L'inclusion des trois composantes connexes par arcs de Y dans l'unique composante de X se traduit classiquement par

$$M(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z}).$$

Le générateur de $H_1(Y)$ dû au collier centré en $\pm 1/2$ est homologue dans X à σ_{\pm} .

Le générateur relatif au collier centré en 0 est (en tant que lacet) homotope dans X au composé de deux lacets faisant une fois le tour de $1/2$ et $-1/2$ respectivement.

Les 1-simplexes associés à ceux-ci sont homologues dans X à σ_+ et σ_- respectivement.

Et leur composé est alors homologue dans X à $\sigma_+ + \sigma_-$.

De tout cela il résulte que

$$M(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z}).$$

(Les centres des colliers formant Y sont pris dans l'ordre $1/2, -1/2, 0$.)

f) Il est bien connu que X est homéomorphe au "bermuda". (**Figure 2** page 6)

La torsion des "jambes" (**figure 3**), suivie de leur courbure vers le haut, produit X' .

g) Il s'agit de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au couple (X', X'') : elle s'applique car les intérieurs de X' et X'' recouvrent Z . Par ailleurs $X' \cap X'' = Y' = Y'' \approx Y$.

h) D'après les calculs précédents, la suite exacte du g) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(Z) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour $p \in \{0, 1\}$, notons $\alpha'_p : H_p(Y') \rightarrow H_p(X')$ l'application déduite de α_p via les homéomorphismes $Y' \approx Y$ et $X' \approx X$.

Notation analogue pour $\alpha''_p : H_p(Y'') \rightarrow H_p(X'')$ via $Y'' \approx Y$ et $X'' \approx X$.

On a alors $f = (\alpha'_1, \alpha''_1)$ et $g = (\alpha'_0, \alpha''_0)$, d'où, par superposition de matrices,

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z}).$$

On voit facilement que f est de rang 2 (le déterminant "nord-ouest" 2×2 est non nul, et la troisième colonne est somme des deux premières).

Plus précisément, $\text{im } f = \mathbb{Z}(1, 0, 1, 0) \oplus \mathbb{Z}(0, 1, 0, 1)$.

Et ce sous-groupe est facteur direct : calculer par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

On voit de manière analogue que g est de rang 1 (la matrice $M(g)$ est non nulle, et ses deux lignes sont égales). Ici, $\text{im } g = \mathbb{Z}(1, 1)$, diagonale qui est notoirement facteur direct.

La suite exacte (6) a donc toutes les propriétés de celle de l'**exercice 2**), avec

$$H_2(Z) = A, \quad H_1(Z) = B, \quad H_0(Z) = C.$$

On conclut que
$$H_p(Z) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 3 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 2 \\ \mathbb{Z}^4 & \text{si } p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \end{cases}.$$

0.4 Exercice 4)

a) Le cylindre $X \times I = S^1 \times I$ a pour bord $X \times \partial I = S^1 \times \{0, 1\}$.
 Le cercle inférieur $S^1 \times \{0\}$ s'identifie (exactement ! car $f = \text{id}_{S^1}$) à $Y = S^1$.
 Le cercle supérieur $S^1 \times \{1\}$ ne s'identifie à $Y = S^1$ qu'après le "retournement" $g : z \mapsto \bar{z}$.
 Au bout du compte, on peut "oublier Y " : tout se passe comme si on avait simplement identifié $S^1 \times \{0\}$ à $S^1 \times \{1\}$ via l'application $\hat{g} : S^1 \times \{0\} \rightarrow S^1 \times \{1\} : (z, 0) \mapsto (\bar{z}, 1)$.
 Et l'on sait bien que le résultat de cette identification est la bouteille de Klein.

Si l'on souhaite s'exprimer de façon plus formelle, considérer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 I \times I & \xrightarrow{\varepsilon} & X \times I & \xrightarrow{\quad} & (X \times I) \amalg Y \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \chi & \searrow \psi|_{X \times I} & \downarrow \psi \\
 K & \xrightarrow{\approx} & K' & \xrightarrow{\omega} & Z \\
 & \alpha & & &
 \end{array}$$

avec $\varepsilon : I \times I \rightarrow X \times I = S^1 \times I : (x, y) \mapsto (e^{2i\pi x}, y)$, les deux espaces de gauche sur la seconde ligne étant les quotients définis respectivement par les seules conditions

$$\begin{aligned}
 \phi(x, 0) = \phi(1 - x, 1) \quad \text{et} \quad \phi(0, y) = \phi(1, y) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in I^2; \\
 \chi(z, 0) = \chi(\bar{z}, 1) \quad \text{pour tout} \quad z \in X = S^1.
 \end{aligned}$$

On sait que ϕ définit K comme étant la bouteille de Klein. (Voir, ici, l'exercice 1.)
 L'existence d'un unique homéomorphisme $\alpha : K \rightarrow K'$ fermant le carré de gauche se vérifie trivialement. (La "version" de la bouteille de Klein évoquée en haut de page est K' .)
 Pour expliciter ψ , convenons de noter z_X (resp. z_Y) l'élément $z \in S^1$ lorsqu'il apparaît "à gauche" en tant que $(z_X, y) \in S^1 \times I = X \times I$ (resp. "à droite" en tant que $z_Y \in S^1 = Y$).
 Le quotient Z est alors défini par les seules conditions

$$\psi(z_X, 0) = \psi(z_Y) = \psi(\bar{z}_X, 1) \quad \text{pour tout} \quad z \in S^1.$$

On observe en particulier que $\psi|_Y$ est un homéomorphisme sur son image $Y' \approx S^1$; que

$$\psi|_{X \times \{0\}} : X \times \{0\} \rightarrow Y' \quad \text{et} \quad \psi|_{X \times \{1\}} : X \times \{1\} \rightarrow Y'$$

sont également des homéomorphismes ; de même que $\psi|_{X \times]0, 1[} : X \times]0, 1[\rightarrow Z \setminus Y'$.

On déduit de ces trois derniers homéomorphismes que $\psi|_{X \times I} : X \times I \rightarrow Z$ est surjectif.

En outre il est immédiat que

$$\forall ((z, y), (z', y')) \in (X \times I)^2 \quad [\chi(z, y) = \chi(z', y')] \iff [\psi(z, y) = \psi(z', y')].$$

On dispose donc d'une bijection continue $\omega : K' \rightarrow Z$.

Comme K' est un compact, il suffit de vérifier que Z est séparé pour conclure.

Cette vérification se fait de façon élémentaire (et quelque peu fastidieuse), en trois cas :

$$\begin{aligned}
 \psi(z_X, t) \neq \psi(z'_X, t') \quad \text{avec} \quad (z, z') \in X^2 \quad \text{et} \quad (t, t') \in I^2; \\
 \psi(z_X, t) \neq \psi(z'_Y) \quad \text{avec} \quad (z, z') \in X^2 \quad \text{et} \quad t \in I; \\
 \psi(z_Y) \neq \psi(z'_Y) \quad \text{avec} \quad (z, z') \in X^2.
 \end{aligned}$$

Les détails sont abandonnés au patient lecteur (resp. lectrice).

b) Il suffit de se référer au résultat bien connu

$$H_k(X) \cong H_k(Y) \cong H_k(S^1) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

pour écrire la suite (1) de l'énoncé :

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_1(Y) \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_0(Y)$$

(ainsi réduite car tous ses termes plus à gauche sont nuls) sous la forme

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Le fait que Z soit (homéomorphe à) la bouteille de Klein a été montré au **a**).

De $f = \text{id}_{S^1} : S^1 = X \longrightarrow Y = S^1$ on déduit que

$$\begin{aligned} f_* = \text{id}_{\mathbb{Z}} & : \mathbb{Z} \cong H_0(X) \cong H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1) \cong H_0(Y) \cong \mathbb{Z} \\ & \text{et} \\ f_* = \text{id}_{\mathbb{Z}} & : \mathbb{Z} \cong H_1(X) \cong H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1) \cong H_1(Y) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De $g : S^1 = X \longrightarrow Y = S^1 : z \mapsto \bar{z} = z^{-1}$ on déduit que

$$\begin{aligned} g_* = \text{id}_{\mathbb{Z}} & : \mathbb{Z} \cong H_0(X) \cong H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1) \cong H_0(Y) \cong \mathbb{Z} \\ & \text{mais} \\ g_* = -\text{id}_{\mathbb{Z}} & : \mathbb{Z} \cong H_1(X) \cong H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1) \cong H_1(Y) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En effet, en degré 0, il ne s'agit que de l'inclusion de composantes connexes par arcs (la même au départ et à l'arrivée !), tandis que l'égalité $\deg g = -1$ est célèbre.

En reportant dans (7), on obtient bien

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z}.$$

On en déduit aussitôt que $H_2(Z) = 0$ puisque la multiplication par 2 est injective.

Le reste de la suite se "dévisse" en

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbb{Z}/2 & & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(Z) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \nearrow & & \searrow & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

(Les flèches \nearrow et \searrow indiquent des injections et les flèches \longrightarrow , des surjections.)

(où les flèches \nearrow indiquent des injections et les flèches \longrightarrow , des surjections). On y voit en particulier la suite nécessairement scindée

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

qui permet d'affirmer que $H_1(Z) \cong (\mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}$.

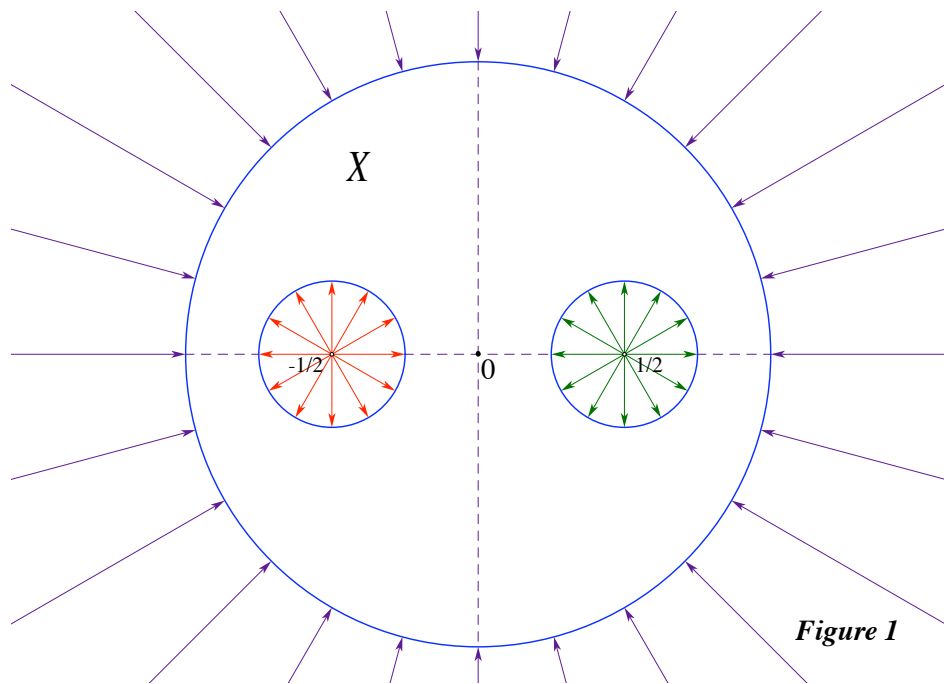


Figure 1

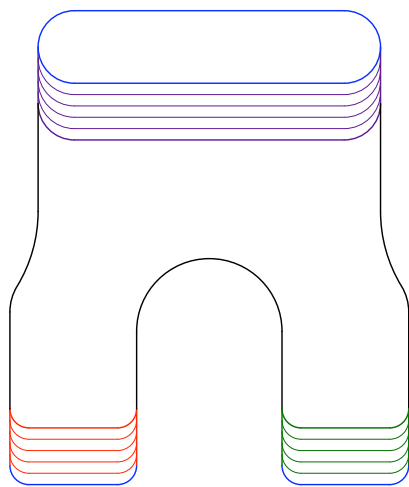


Figure 2

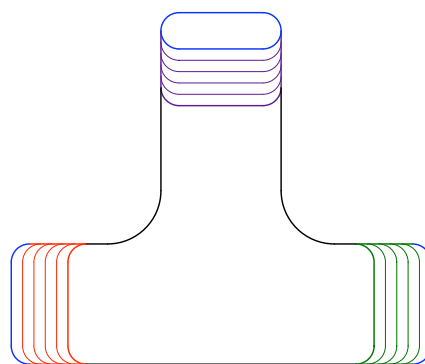


Figure 3