Rappel :

Q connexe

Q de Dynkin $\iff q$ déf. pos.

$\implies \{\text{rep. indéc.}\}/\text{isom.} \xrightarrow{\sim} \{v \in \mathbb{N}^{Q_0} \mid q(v) = 1\}$

$V \longmapsto \underline{\dim} V.$

Exemple : $\quad Q : \begin{smallmatrix} 1 & \searrow & \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \nearrow & \end{smallmatrix}$ Dynkin de type D_4

Support	dim	représ.
A_1	$\begin{smallmatrix}1&\\0&0\\0&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\1&0\\0&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\0&0\\1&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\0&1\\0&\end{smallmatrix}$	$S_1, \dots, S_4$
A_2	$\begin{smallmatrix}1&\\0&1\\0&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\1&1\\0&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\0&1\\1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} k & \xrightarrow{1} & \\ 0 & \rightarrow & k \\ 0 & \nearrow & \end{smallmatrix}$, ...
A_3	$\begin{smallmatrix}1&\\1&1\\0&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&\\0&1\\1&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0&\\1&1\\1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} k & \xrightarrow{1} & \\ k & \xrightarrow{1} & k \\ 0 & \nearrow & \end{smallmatrix}$, ...
D_4	$\begin{smallmatrix}1&\\1&1\\1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} k & \searrow & \\ k & \rightarrow & k \\ k & \nearrow & \end{smallmatrix}$
D_4	$\begin{smallmatrix}1&\\1&2\\1&\end{smallmatrix}$	$\left(\begin{smallmatrix} k & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} & \\ k & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]} & k^2 \\ k & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} & \end{smallmatrix}\right) = I$

V un plan $\qquad$ 3 droites V_1, V_2, V_3 en pos. générale

$\implies V$ correspond à l'orbite ouverte dans $\mathrm{Rep}(Q, \begin{smallmatrix}1&\\1&2\\1&\end{smallmatrix})$

$\implies V \cong I$ (i.e. $\exists$ base v_1, v_2, t.q. $V_1 = kv_1$, $V_2 = k(v_1+v_2)$, $V_3 = kv_2$

V un espace de dim 4 muni de 3 plans V_1, V_2, V_3 en pos. générale

$\implies V$ correspond à l'orbite ouverte dans $\mathrm{Rep}(Q, \begin{smallmatrix}2&\\2&4\\2&\end{smallmatrix})$

Cette orbite est $O_{I \oplus I}$. En effet $\mathrm{codim}\, O_{I\oplus I} = \dim \mathrm{Ext}(I \oplus I, I \oplus I)$

$Ext(I\oplus I, I\oplus I) \cong Ext(I,I)^4 = 0$

car O_I est ouvert dans $Rep(Q, \{2)$.

$\Rightarrow$ $V \cong I \oplus I$ (i.e. V est somme directe de 2 plans

qui rencontrent V_1, V_2, V_3 en des droites)

Les isom. $V \xrightarrow{\sim} I\oplus I$ sont en bijection

avec $Aut(I\oplus I) \simeq End(I\oplus I)^\times = M_2(k)^\times = GL_2(k)$

car $Hom(I,I) \cong k$.

Conséquence : Trois droites en pos. gén. dans $\mathbb{P}_3$ admettent

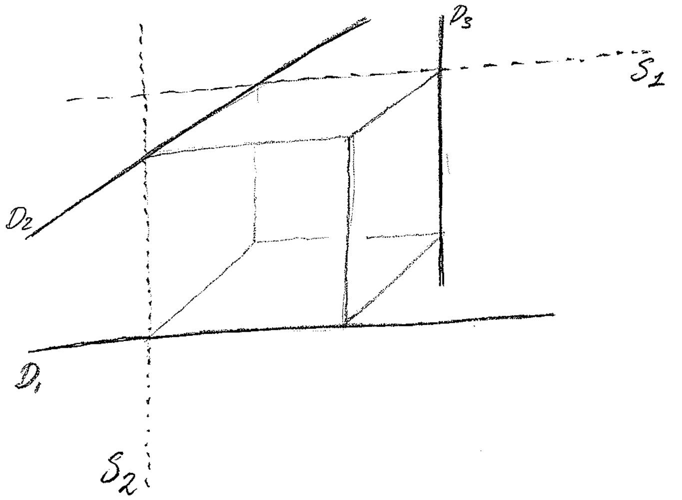
un couple de sécantes communes distinctes.

L'ensemble de ces couples est paramétré par

$$GL_2(k) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_i \in k^* \right\}$$

$\simeq$ { couples de points distincts de $\mathbb{P}_1(k)$ }.

Déduire que 3 droites en position générale dans $\mathbb{P}^3(k)$ admettent 2 sécantes communes en pos. générale :



II. Le théorème de Kac

But : Caractériser les vecteurs dim. des rep. indéc. d'un carquois fini quelconque.

1. Énoncé du théorème

Soit Q un carquois fini. Rappelons la forme d'Euler :

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i \in Q_0} v_i w_i - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} w_{t(\alpha)} \quad , \quad v, w \in \mathbb{Z}^{Q_0},$$

la forme de Tits

$$q(v) = \sum_{i \in Q_0} v_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} v_{t(\alpha)}$$

et la forme bilin. sym. :

$$(v, w) := q(v+w) - q(v) - q(w) = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle .$$

On a

$$(e_i, e_i) = 2 \cdot (1 - n_{ii})$$
$$(e_i, e_j) = -n_{ij}$$

où n_{ij} est le nombre total de flèches entre i et j (dans les deux directions).

Déf : e_i est une racine simple s'il n'y a pas de boucle en i.
Dans ce cas, on définit la réflexion p.r. à e_i par

$$\sigma_i(v) := v - (e_i, v)\, e_i \,.$$

Le groupe de Weyl est le sous-groupe $W \subseteq Aut(\mathbb{Z}^{Q_0})$ engendré par les e_i.

Rque : On a $\sigma_i(e_i) = -e_i$ et $\sigma_i(v) = v$ pour tout v orthogonal à e_i. Les σ_i préservent la forme $(\,,\,)$.

Déf : Un vecteur $v \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ est une racine réelle si $v = we_i$ pour un $w \in W_Q$ et une racine simple e_i.

On note Δ^{re} l'ens. des racines réelles :

$$\Delta^{re} = \bigcup_{e_i \text{ rac. simple}} W_Q e_i \,.$$

Déf : Le cône fondamental $K_Q \subset \mathbb{Z}^{Q_0}$ est l'ens. des vecteurs non nuls $v \geq 0$ tels que supp(v) est connexe et $(v, e_i) \leq 0$ pour toute racine simple e_i. L'ens. des racines imaginaires est

$$\Delta^{im} = \bigcup_{w \in W_Q} w(K_Q \cup -K_Q)$$

Rques : 1) On a $q(v) = 1$ pour toute racine réelle v car c'est vrai pour toute racine simple. Si $v = \sum v_i e_i$ est une racine dans le cône fond., on a $q(v) = \sum v_i (v, e_i) \leq 0$ car $(v, e_i) \leq 0$ pour tous les e_i (e_i racine simple : par hyp. ; e_i non racine simple $\Rightarrow$ tous les (e_i, e_j), $j \in Q_0$, sont ≤ 0). Donc $q(v) \leq 0$ pour les racines imaginaires.

2) Si Q est Dynkin de type A-D-E, alors $\Delta^{im} = \phi$ et Δ^{re} coïncide avec l'ens. des racines R au sens de la section 5 (clairement $\Delta^{r} \subseteq R$. La réciproque résulte du thm de Kac ci-dessous ou de la théorie des systèmes

de racines", voir J.-P. Serre : Algèbres de Lie semi-simples complexes)

3) Si Q est un carquois de Dynkin étendu de type A-D-E, alors les vecteurs v t.q. $q(v) \leq 0$ sont les multiples du générateur δ de $\mathrm{rad}(q)$ (voir I.8). Donc

$$\Delta^{im} = \mathbb{Z}\delta, \quad K_Q = \{n\delta \mid n \geq 1\}$$

4) Si Q n'est ni de Dynkin ni de Dynkin étendu il existe $v \in K_Q$ t.q. $q(v) < 0$ d'après le thm 3 c). En part., il existe des racines imag.

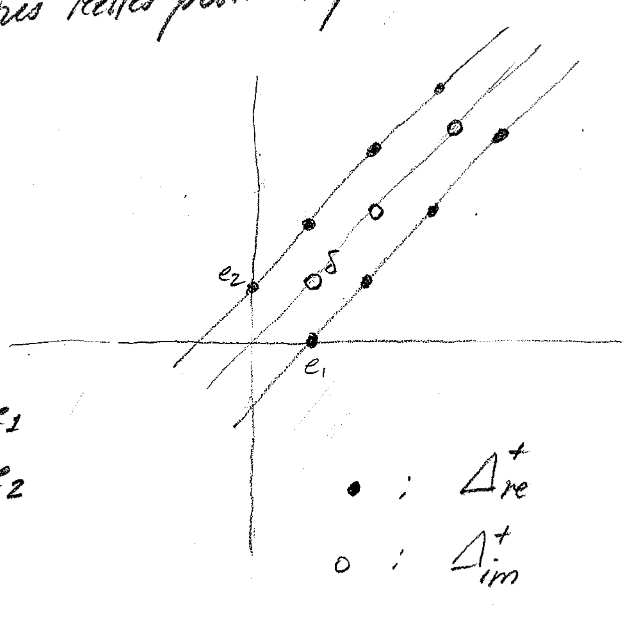
Thm 4 (V. Kac, 1980) Soit $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$.

a) Il existe une représ. indécomposable de vecteur dimension v ssi v est une racine positive (réelle ou imaginaire).

b) Si v est une racine réelle, il existe une unique classe d'isom. de représ. indéc. de vecteur dim. v.

c) Si v est une racine imaginaire, il existe une infinité de classes d'isom. de représ. indéc. de vecteur dim. v.

Rque : Le thm de Kac implique le thm de Gabriel : [S'il n'existe qu'un nombre fini d'indéc. à isom. près, alors $K_Q = \phi$ par c), donc Q est de Dynkin (par les rques 4) et 3)). Si Q est de Dynkin, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isom. d'indécomp. paramétrés par les racines réelles positives par a) et b)]



Exemples : 1) $1 \rightrightarrows 2$

$$q(xe_1 + ye_2) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

σ_1 = sym. p.r. à $\mathbb{Z}\delta$ parallèlement à $\mathbb{Z}e_1$

σ_2 = ——————————————— $\mathbb{Z}e_2$

$W \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$

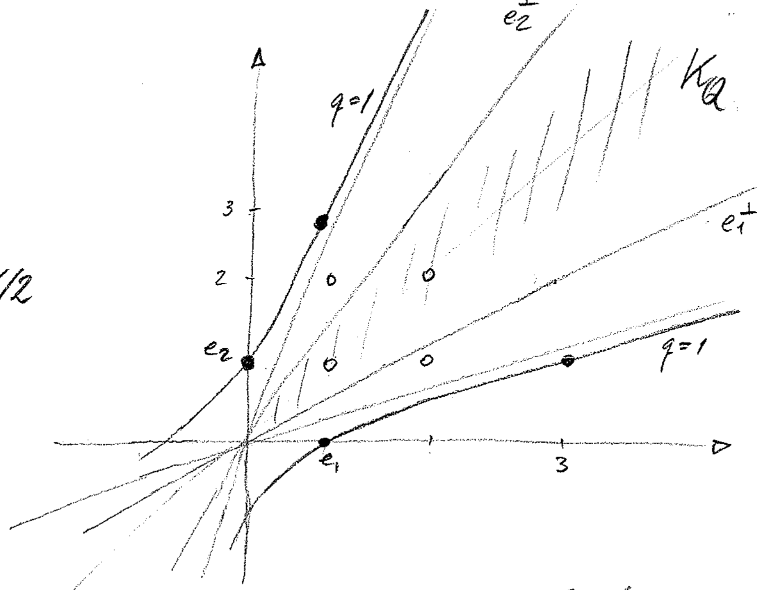
2) $Q : 1 \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; 2$,

$$q(xe_1+ye_2) = x^2+y^2-3xy$$

$e_1^\perp = \mathbb{Z}\cdot(3e_1+2e_2)$ | $W \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$

$e_2^\perp = \mathbb{Z}\,(2e_1+3e_2)$ |

Asymptotes : $y = \dfrac{2}{3\pm\sqrt{5}}\,x$



Lemme (Kac) : Q carquois connexe dont tous les sous-carquois propres sont
(admis) de Dynkin ou Dynkin étendu. Alors

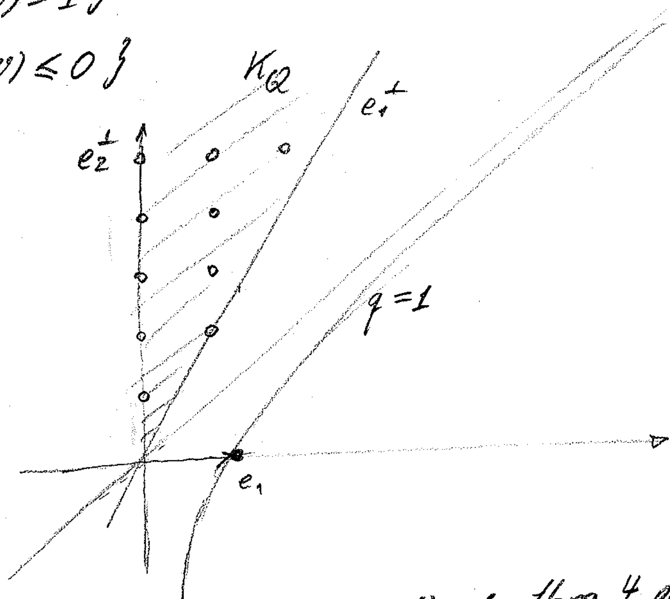
$$\Delta^{re} = \{v \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mid q(v) = 1\}$$
$$\Delta^{im} = \{v \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mid q(v) \leq 0\}$$

3) $Q : 1 \longrightarrow 2 \circlearrowleft$

$$q(xe_1+ye_2) = x^2 - xy$$

$e_1^\perp = \mathbb{Z}\cdot(e_1+2e_2)$ | $W = \mathbb{Z}/2$

$e_2^\perp = \mathbb{Z}e_2$ |



Exercice : Soit Q un carquois de Dynkin étendu. Utiliser a) et b) du thm 4 pour m.q. $Rep(Q,\delta)$ contient une infinité d'orbites indécomposables et que toute orbite indéc. est celle d'une brique.

Rque : C'est un cas particulier de c).

Sol. : Soit V une rep. t.q. $\underline{\dim} V = \delta$. On a

$$\operatorname{codim} O_V = \dim End(V) - \underbrace{q(\delta)}_{=0} \geq 1.$$

Donc $Rep(Q,\delta)$ contient une infinité d'orbites. Or il n'y a qu'un nombre fini d'orbites décomposables car il n'y a qu'un nombre fini de racines $< \delta$ et elles sont toutes réelles.

Rappel : Q carquois fini. But : Décrire $\{v \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mid \exists V$ indéc. t.q. $\underline{\dim} V = v\}$

forme d'Euler

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i \in Q_0} v_i w_i - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} w_{t(\alpha)}$$

forme de Tits

$$q(v) = \langle v, v\rangle$$

forme bilin. sym.

$$(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle$$

$$(e_i, e_i) = 2(1 - n_{ii}) \quad , \quad n_{ij} = \#(\text{flèches } i \to j \text{ ou } j \to i)$$

$$(e_i, e_j) = -n_{ij}$$

e_i est racine simple $:\Leftrightarrow \nexists$ boucle en $i \Leftrightarrow (e_i, e_i) = 2$

e_i racine simple : $\sigma_i(v) = v - (e_i, v) \cdot e_i$

W = groupe de Weyl $= \langle \sigma_i \mid e_i \text{ rac. simple}\rangle$

$\Delta_{re} := \{\text{racines réelles}\} = \bigcup_{e_i \text{ simple}} We_i$

K_Q = cône fond. $= \{v \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mid v$ pos., non nul, à support connexe, $(e_i, v) \leq 0$, $\forall e_i$ simple$\}$

$\Delta_{im} := \{\text{racines imaginaires}\} = \bigcup_{w \in W} (wK_Q \cup -wK_Q)$

Thm (Kac) : Soit $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$

a) $\exists V$ indéc. t.q. $\underline{\dim} V = v \iff v$ est racine positive (réelle ou imag)

b) v racine réelle pos. $\Longrightarrow \exists 1$ indéc. / isom. V t.q. $\underline{\dim} V = v$

b) v racine imag. pos. $\Longrightarrow \exists$ une infinité d'indéc. / isom. V t.q. $\dim V = v$.

Cas part. : Q de Dynkin : $\Delta = \Delta_{re}$, $\Delta_{im} = \emptyset$

Q de Dynkin étendu : $\Delta_{im} = \mathbb{Z}\delta \setminus \{0\}$

Q <u>sauvage</u> (i.e. ni de Dynkin ni de Dynkin étendu) :
$\exists\, v \in K_Q$ t.q. $q(v) < 0$. En part. $\Delta_{im} \neq \emptyset$.

Donc $\mathrm{Rep}(Q,\delta)$ contient une infinité d'orbites indécomposables.
Soit V indécomposable t.q. $\underline{\dim} V = \delta$. Supposons que V n'est pas une brique. D'après le lemme de Ringel, V contient une brique V' qui a des autoextensions. Mais alors

$$q(\underline{\dim} V') = \dim \mathrm{End}(V') - \dim \mathrm{Ext}^1(V', V') \leq 0$$

et on doit avoir $\underline{\dim} V' \in \mathbb{N}\delta$. Impossible car V' est une sous-rep. propre de V. ✓

27.02.04

2. Deuxième partie de la démonstration

iota = indécomposable

Lemme fondamental: Pour $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$, soit $\iota(Q,v) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de reprs. indéc. de vecteur dimension v. Soit Q' un carquois obtenu en remplaçant une flèche de Q par une flèche allant dans le sens opposé. Alors

$$\iota(Q,v) = \iota(Q',v).$$

Rques: 1) Si le théorème de Kac est vrai, alors $\iota(Q,v) \in \{0,1,\infty\}$ peut être déterminé à partir de la forme q associée à Q, qui est égale à celle associée à Q'. Par exemple, les carquois

$$Q: \cdot \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \cdot \qquad Q': \cdot \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \cdot$$

donnent les mêmes nombres $\iota(Q,v) = \iota(Q',v)$!
[NB: $\dim kQ < \infty$, $\dim kQ' = \infty$]

2) Le lemme est l'ingrédient principal de la dém. Nous n'allons pas le démontrer en général mais seulement pour $k = \overline{\mathbb{F}_p}$. Le cas où $\mathrm{car} k = 0$ se ramène à celui-ci par des arguments de géom. alg. qui nous éloigneraient trop

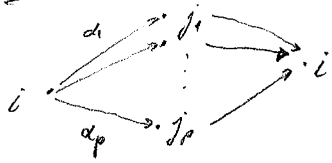
de notre sujet principal (voir H. Kraft & Ch. Riedtmann, Geometry of representations of quivers, Reprs. of algebras (éd. P. Webb), London Math. Soc. Lecture notes 116 (1986), 109–145).

Déduisons le théorème de Kac du lemme fondamental.
Posons $q(v) = q(Q, v)$ et $R = \{\underline{\dim} V \mid V \text{ indéc.}\}$.

Etape 1 : Soit $i \in Q_0$. Si $\overbrace{v \text{ n'est pas la racine simple } e_i}^{\text{t.q. } e_i \text{ rac. simple}}$,

alors $q(v) = q(\sigma_i(v))$.

Dém. : Par le lemme fond., on peut supposer qu'aucune flèche n'a pour but le sommet i. (On dit que i est une <u>source</u> de Q).



Soient
$$i \xrightarrow{\alpha_p} j_p \ , \quad 1 \leq p \leq s,$$
les flèches de source i. Toute représ. V de Q donne une suite exacte
$$V(i) \xrightarrow{\begin{bmatrix} V(\alpha_1) \\ \vdots \\ V(\alpha_p) \end{bmatrix}} \bigoplus V(j_p) \xrightarrow{[\beta_1, \ldots, \beta_s]} C \longrightarrow 0$$

où C est le conoyau. Soit Q' le carquois obtenu à partir de Q en remplaçant les flèches α_p par
$$j_p \xrightarrow{\alpha_p'} i \ , \quad 1 \leq p \leq s.$$

On définit la représ. V' de Q' par
$$V'(i) = C \ , \quad V'(j) = V(j) \text{ pour tout } j \neq i,$$
$$V'(\alpha_p') = \beta_p \ , \ 1 \leq p \leq s \ , \quad V'(\gamma) = V(\gamma) \text{ pour } \gamma \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}.$$

De manière analogue, pour une représ. W de Q', on définit W' à l'aide du noyau
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus W(j_p) \xrightarrow[{[W(\alpha_1'), \ldots, W(\alpha_p')]}]{} W(i) \ .$$

Clairement, on obtient des foncteurs (dits foncteurs de réflexion) de Bernstein-Gelfand-Ponomarev

$$\begin{array}{ccccc} W' & & kQ\text{-Mod} & & V \\ \updownarrow & & \uparrow \quad \downarrow & & \updownarrow \\ W & & kQ'\text{-Mod} & & V' \end{array} \qquad (*)$$

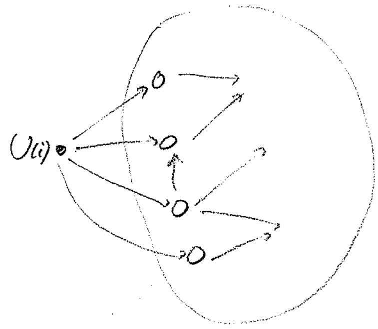
Si ${}^t[V(\alpha_1), \dots, V(\alpha_p)]$ est injectif, alors $V \xrightarrow{\sim} V''$

et si $[W(\alpha_1'), \dots, W(\alpha_p')]$ est surj., alors $W'' \xrightarrow{\sim} W$.

Donc ces foncteurs induisent des équivalences

$$\{V \in kQ\text{-Mod} \mid {}^t[V(\alpha_1), \dots, V(\alpha_p)] \text{ inj.}\}$$
$$\uparrow\wr \quad \downarrow\wr$$
$$\{W \in kQ'\text{-Mod} \mid [W(\alpha_1'), \dots, W(\alpha_p')] \text{ surj.}\}$$

Pour une rep. V de Q, les espaces



$$U(i) := \ker \begin{bmatrix} V(\alpha_1) \\ \vdots \\ V(\alpha_p) \end{bmatrix}$$

$$U(j) := 0 \quad , \quad j \neq i$$

définissent un facteur direct. Donc si V est indécomp. de vecteur dim v différent de e_i, alors ${}^t[V(\alpha_1), \dots, V(\alpha_p)]$ est injectif. Alors on a

$$\dim V'(i) = \sum_{p=1}^{s} \dim V(j_p) - \dim V(i)$$

$$\dim V'(j) = \dim V(j) \quad , \quad \forall j \neq i.$$

Donc $\underline{\dim} V' = \sigma_i(\underline{\dim} V)$.

En outre, V' est encore indéc. car $\mathrm{End}_{kQ}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{kQ'}(V')$.

De même si W est une rep. indéc. de Q' de vecteur dim. $\neq e_i$, alors $[W(\alpha_1'), \dots, W(\alpha_p')]$ est surj., W' indéc. et $\underline{\dim} W' = \sigma_i(\underline{\dim} W)$.

Complément :

Q carquois fini, k corps alg. clos

$v \in \mathbb{N}^{Q_0}$

R^{ind}

Lemme : La réunion des orbites indécomposables de $GL(v)$ dans $Rep(Q,v)$ est une partie constructible (i.e. réunion finie de parties loc. fermées)

Rque : On a utilisé implicitement ce lemme dans la dém. (par l'absurde) de l'étape 3 de la 2e partie de la dém. du thm de Kac.

Dém. : Pour $d \in \mathbb{N}$, soit $R_d \subseteq Rep(Q,v)$ la réunion des orbites O_X t.q. $\dim End(X) = d$. On sait (dém. du L3 dans I.7) que R_d est loc. fermé. Soit $R_d^{ind} \subseteq R_d$ la partie formée des orbites indécomposables. Je dis que R_d^{ind} est fermé dans R_d. Pour cela, considérons

$$N = \{ (x,f) \in Rep(Q,v) \times \prod_{i \in Q_0} Hom_k(k^{v(i)}, k^{v(i)}) \mid f \text{ est un endom. nilpotent de } R(x) \}$$

et la projection

$$p : N \longrightarrow Rep(Q,v).$$

La fonction

$$x \longmapsto (x,0) \longmapsto \dim p^{-1}(p(x,0)) = \dim p^{-1}(x)$$

est continue supérieurement sur $Rep(Q,v)$. Donc

$$\{ x \in R_d \mid \dim p^{-1}(x) \geq d-1 \}$$

est fermé dans R_d. Or cette partie est égale à R_d^{ind}. Donc R_d^{ind} est loc. fermée. Comme R_d^{ind} est vide pour tout $d \gg 0$, la réunion $\bigcup R_d^{ind}$ est finie donc constructible.

On conclut que les foncteurs de réfl. induisent des bijections

$$\{\text{classes d'isom. d'indéc. } V \text{ de } Q \text{ t.q. } \underline{\dim} V = v\}$$
$$\downarrow \uparrow$$
$$\{\text{classes d'isom. d'indéc. } W \text{ de } Q' \text{ t.q. } \underline{\dim} W = \sigma_i(v)\}$$

Il en résulte que

$$z(v) = z(Q, v) = z(Q', \sigma_i(v)) \underset{\text{L.f.}}{=} z(Q, \sigma_i(v)) = z(\sigma_i(v)).$$

Étape 2 : $\Delta_+^{re} \subseteq R$ et $z(v) = 1$ pour tout $v \in \Delta^{re}$.

Dém. : On déduit de la 1ère étape que la partie

$$(R \cap \Delta_+^{re}) \cup (-(R \cap \Delta_+^{re}))$$

est stable par toutes les réfl. p.r. à des racines simples. Elle contient les racines simples. Donc elle contient Δ_+^{re} et on obtient $\Delta_+^{re} \subseteq R$. Comme on a $z(e_i) = 1$ pour toute racine simple e_i, on obtient $z(v) = 1$ pour tout $v \in \Delta_+^{re}$.

Étape 3 : Soit $v \in K_Q$ et $S \subseteq Q$ le sous-carquois plein sur le support de v. Si S n'est pas de Dynkin ou de Dynkin étendu, alors $\mathrm{Rep}(Q, v)$ contient un ouvert dense $GL(v)$-stable formé d'indécomposables.

Complément : La réunion des orbites indéc. est constructible. p. 42'

Dém. : Supposons que la réunion des orbites indéc. n'est pas dense. Alors elle est de codim. ≥ 1 et la réunion des orbites décomposables est dense. Cette réunion est égale à

$$\bigcup_{0 < w < v} GL(v) \cdot (\mathrm{Rep}(Q, w) \times \mathrm{Rep}(Q, v-w)) \qquad (*)$$

où l'on identifie $\mathrm{Rep}(Q, w) \times \mathrm{Rep}(Q, v-w)$ avec une partie de $\mathrm{Rep}(Q, v)$ via :

$$((x_\alpha), (y_\alpha)) \longmapsto \left(\begin{bmatrix} x_\alpha & 0 \\ 0 & y_\alpha \end{bmatrix}\right).$$

Comme la réunion $(*)$ est finie et dense dans l'irréd. $Rep(Q,v)$, il existe $0<w<v$, t.q. la partie

$$GL(v)\cdot\left(Rep(Q,v)\times Rep(Q,w-v)\right)$$

est dense. Elle est constructible (i.e. réunion de parties loc. fermées de $Rep(Q,v)$) en tant qu'image d'un morphisme. Donc elle contient un ouvert non vide de $Rep(Q,v)$ et même un ouvert non-vide $GL(v)$-invariant. Soit $\mathcal{M}$ la réunion des orbites de dim. maximale dans $Rep(Q,v)$. On sait qu'elle est ouverte dans $Rep(Q,v)$ (I.7, L3). Il s'ensuit que

$$\mathcal{M}\cap\left(Rep(Q,w)\times Rep(Q,v-w)\right)$$

est un ouvert non vide de $Rep(Q,w)\times Rep(Q,v-w)$.

Donc $\mathcal{O}_{x\oplus y}$ est de dim. maximale pour presque tous $(x,y)\in Rep(Q,w)\times Rep(Q,v-w)$. (où X,Y sont les modules qui correspondent à x et y). Donc $Ext^1(X,Y)=0=Ext^1(Y,X)$ pour ces (x,y). (I.7, L2). Donc

$$0\leq \dim Hom(X,Y)+\dim Hom(Y,X) = (w,v-w)$$

$$=\sum_{i,j\in S}{}' \, w_i\cdot(v_j-w_j)\cdot(e_i,e_j)$$

$$=\sum_{j\in S}{}' \underbrace{\frac{w_j}{v_j}(v_j-w_j)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\sum_{i\in S} v_i\,(e_i,e_j)}_{\leq 0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}\underbrace{\left(\frac{w_i}{v_i}-\frac{w_j}{v_j}\right)^2 v_i v_j}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(e_i,e_j)}_{\leq 0}\leq 0$$

Il s'ensuit que si i et j sont reliés par une flèche, alors $\frac{w_i}{v_i} = \frac{w_j}{v_j}$.

Comme S est connexe, on $\frac{w_i}{v_i} = \gamma$ constant et < 1.

Mais alors on a

$$0 = (w, v-w) = (\gamma v, (1-\gamma)v) = \sum \underbrace{\gamma(1-\gamma)v_i}_{>0} (v, e_i)$$

Donc v est omniprésent dans S et appartient au radical de q_S.

Donc S est de Dynkin étendu (I, 8, L et Thm 3). ✓

Etape 4 : Soit $v \in K_Q$. Alors $v \in R$ et $z(v) = \infty$.

Dém : Soit S le support de v. On a

$$q(v) = \frac{1}{2}(v,v) = \frac{1}{2}\sum v_i \underbrace{(v, e_i)}_{\leq 0} \leq 0$$

Si S est de Dynkin étendu, alors v est proportionnel à δ par la sect. 3 ci-dessous.
et il existe une infinité d'indéc. de vecteur dim. δ
Si S n'est pas de Dynkin étendu, alors par l'étape 3, $Rep(Q, v)$
contient un ouvert dense $Gl(v)$-stable formé d'indécomposables.
Pour une orbite O_X quelconque de $Rep(Q, v)$, on a

$$\operatorname{codim} O_X = \dim End(X) - q(v) \geq 1.$$

Donc les orbites dans Y sont de codim. ≥ 1 dans Y et il y en a une infinité.

Etape 5 : On a $\Delta_+^{im} = R \setminus \Delta_+^{re}$ et $z(v) = \infty$ pour tout $v \in \Delta_+^{im}$.

Dém : "$\subseteq$" : Par l'étape 1, la partie $R \setminus \Delta_+^{re}$ est stable par W.
Par l'étape 4, elle contient K_Q. Donc elle contient Δ_+^{im}. D'où "$\subseteq$".
"$\supseteq$" : Réciproquement, soit $v \in R \setminus \Delta_+^{re}$ et soit w minimal dans l'orbite $W.v$. Pour toute racine simple e_i, on a

$$\sigma_i(w) = w - (e_i, w) \cdot e_i .$$

Par la minimalité, il s'ensuit que $(e_i, w) \leq 0$. Comme il existe un indécomposable de vecteur dim. w (étape 1), le support de w est connexe (et non vide). Donc $w \in K_Q$ et $v \in \Delta_+^{im}$.

Par l'étape 4, on a $z(w) = \infty$. Donc $z(v) = \infty$ ✓

3. Construction d'une infinité d'orbites en dimension δ (mieux : $n\delta$!)

Soit Q un diagramme de Dynkin étendu.

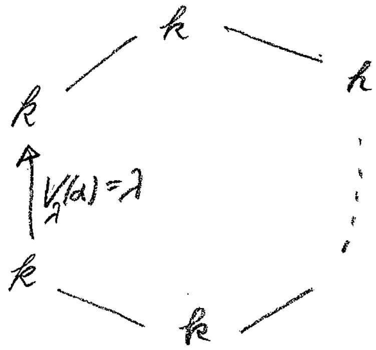
On se propose de construire une infinité de classes d'isom. de vecteur dimension δ.

Cas où Q est de type $\tilde{A}_n$

Soit $\alpha \in Q_1$ et $\lambda \in k$.

On pose $V_i^\lambda = k$, $\forall i \in Q_0$

$$V^\lambda(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta \neq \alpha \\ \lambda & \beta = \alpha. \end{cases}$$



Alors $\underline{\dim} V^\lambda = \delta$ et $V^\lambda \not\cong V^\mu$ pour $\lambda \neq \mu$.

Cas où Q n'est pas de type $\tilde{A}_n$

Soit i_0 un sommet tel que $\delta_{i_0} = 1$ et i_1 le voisin de i. On a $\delta_{i_1} = 2$.

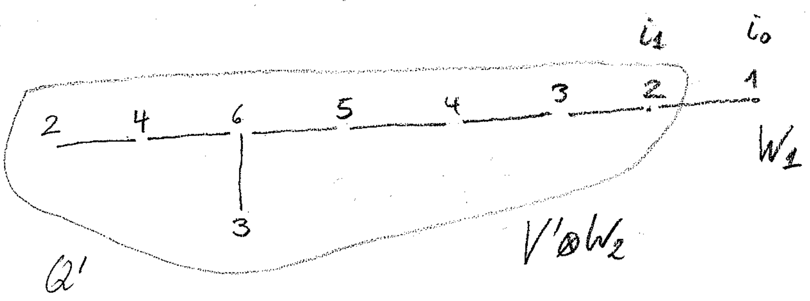
Soit Q' le ss-carquois plein avec $Q'_0 = Q_0 \setminus \{i_0\}$ et $\delta' = \delta|_{Q'}$.

Notons que Q' est un diagramme de Dynkin et que δ' est une racine de Q' car

$$0 = q(\delta) = q'(\delta') + \delta_i^2 - \delta_i\delta_j = q'(\delta') + 1 - 2.$$

Soit V' l'unique rep. indéc. de Q' (à isom. près) t.q. $\underline{\dim} V' = \delta'$.

$\tilde{E}_8$:



Supposons que la flèche α_0 entre i_0 et i_1 va de i_0 à i_1.

Soit $Kr: 1 \overset{\beta_1}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} 2$ le carquois de Kronecker.

Nous allons construire un foncteur

$$F : Rep(Kr) \longrightarrow Rep(Q).$$

Soit v_1, v_2 une base de $V'(i_1)$. Soit W une représ. de $1 \overset{\beta_1}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} 2$

Nous définissons

$$(FW)(i) = V'(i) \otimes W_2 \ , \quad \forall i \in Q'_0$$

$$(FW)(i_0) = W_1$$

$$(FW)(\alpha) = V'(\alpha) \otimes \mathbb{1}_{W_2} \ , \quad \forall \alpha \in Q'_1$$

$$(FW)(\alpha_0) := \begin{bmatrix} v_1 \otimes W(\beta_1) \\ v_2 \otimes W(\beta_2) \end{bmatrix} : W_1 \longrightarrow V'(i_1) \otimes W_2$$

Lemme : F est pleinement fidèle, i.e. il induit des bijections

$$Hom_K(W, W') \xrightarrow{\sim} Hom_Q(FW, FW')$$

Dém : Exercice basé sur le fait que $Hom_{Q'}(V', V') = k$. ✓

Rques : 1) Il s'ensuit que FW est indécomposable ssi W est indécomposable et que $FW \cong FW'$ ssi $W \cong W'$.

2) Si $\underline{dim} W = e_1 + e_2 = \delta_K$, alors $\underline{dim}\, FW = \delta$.

On obtient donc ^bien^ une infinité de classes d'isom. d'indéc. de vecteur dimension δ.

4. Première partie de la démonstration

Il s'agit de montrer le

lemme fondamental : Si Q' est obtenu à partir de Q en remplaçant une flèche par son opposée, alors, pour tout $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$, on a $z(Q,v) = z(Q',v)$

où $z(Q,v)$ est le nombre d'indéc. / isom. de vecteurs dim. v.

Rque : Kac procède en 3 étapes :

1) dim. du résultat si k est fini
2) ———— si k est la clôture alg. d'un corps fini
3) dim pour un corps k alg. clos quelconque.

On va faire 1) et 2). Pour 3), voir Kraft-Riedtmann. (p. 40) LMS Lect. notes 116.

Etape 0 : Rappel sur la transformation de Fourier. Voir p. 48, 49.

Etape 1 : Soit p un nombre premier, $m \geq 1$ et F_m un corps fini à p^m él.

Soit $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$. Comme dans le cas alg. clos on a la bijection

$$\{\text{rep. de } Q \text{ sur } F_m\}/\text{isom.} \longleftrightarrow \{\text{orbites de } GL(v,F_m) = \prod_{i\in Q_0} GL_{v(i)}(F_m) \text{ dans } \underbrace{\prod_{\alpha\in Q_1} \mathrm{Hom}(F_m^{v(s(\alpha))}, F_m^{v(t(\alpha))})}_{Rep(Q,v,F_m)}\}$$

Soit $\rho_m(v)$ le nombre d'orbites.

Sous-Etape a) : $\rho_m(v)$ ne dépend pas de l'orientation des flèches.

Soit $\beta \in Q_1$ et soit $\overline{Q}$ le carquois obtenu en remplaçant $\beta : x \to y$ par $\overline{\beta} : y \to x$. On a

$$Rep(Q,v,F_m) = \underbrace{\left(\prod_{\alpha\neq\beta} \mathrm{Hom}(F_m^{v(s(\alpha))}, F_m^{v(t(\alpha))})\right)}_{=:Y} \times \underbrace{\mathrm{Hom}(F_m^{v(x)}, F_m^{v(y)})}_{=:H}$$

→ p. 50

Etape 0 : Rappel sur la transformation de Fourier

Soit p un nombre premier et ζ une racine primitive p-ième de 1 dans $\mathbb{C}$.

Soit V un espace vect. de dim. finie sur $\mathbb{F}_p$.

Soit $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_p)$ son dual.

Pour tout $v^* \in V^*$, on a le caractère

$$\chi_{v^*} : V \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad v \longmapsto \zeta^{\langle v^*, v\rangle}.$$

L'application

$$V^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{gr}(V, \mathbb{C}^*), \quad v^* \longmapsto \zeta^{\langle v^*, ?\rangle} = \chi_{v^*}$$

est bijective. En outre, elle est fonctorielle, i.e. pour toute appl. lin $\varphi : V \longrightarrow W$, on a

$$\begin{tikzcd}
w^*\circ\varphi & V^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{gr}(V, \mathbb{C}^*) & \chi\circ\varphi \\
w^* \arrow[u, mapsto] & W^* \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & \mathrm{Hom}_{gr}(V, \mathbb{C}^*) \arrow[u, "\varphi^*"'] & \chi \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Notons $\mathbb{C}V^*$ l'espace vect. complexe de base V^* et $V^{\mathbb{C}}$ l'espace des fonctions sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "\text{base}"'] & \mathrm{Hom}_{gr}(V, \mathbb{C}^*) \arrow[d, hook, "\text{base}"] \\
\mathbb{C}V^* \arrow[r, "\sim", "\Phi"'] & V^{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

(Dedekind : Des caractères distincts d'un gr. ab. sont lin. indép.)

et on obtient donc isom. fonctoriel d'espaces vectoriels (en fait : de $\mathbb{C}$-algèbres) entre $\mathbb{C}V^*$ et $V^{\mathbb{C}}$. Finalement on a l'isom.

$$\Psi : (V^*)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}V^*, \quad f \longmapsto \sum_{v^* \in V^*} f(v^*)\, v^*$$

Il n'est plus fonctoriel p.r. aux morph. $\varphi : V \longrightarrow W$

(car $(V^*)^{\mathbb{C}}$ est covariant et $\mathbb{C}V^*$ contravariant) mais si $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ est un isom. on a

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, mapsto] & (V^*)^{\mathbb{C}} \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathbb{C}V^* & \sum\limits_{w^* \in W^*} \big(f \circ \underbrace{\varphi^*(w^*)}_{=v^*}\big) \underbrace{\varphi^*(w^*)}_{=v^*} = \Psi(f) \\ f \circ \varphi^* & (W^*)^{\mathbb{C}} \arrow[r, "\Psi"'] & \mathbb{C}W^* \arrow[u, "\varphi^*"'] & \sum\limits_{w^* \in W^*} \big(f \circ \varphi^*(w^*)\big) w^* \end{tikzcd}$$

On obtient la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} = \Phi \circ \Psi : (V^*)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} V^{\mathbb{C}}, \quad f \longmapsto \sum_{v^* \in V^*} f(v^*) \zeta^{\langle v^*, ? \rangle} .$$

Pour tout isom. $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$, on a

$$\mathcal{F} \circ \varphi_* = (\varphi^*)^{-1} \circ \mathcal{F}$$

On obtient le

Lemme (R. Brauer):

a) Si G est un groupe qui agit dans V, alors

$$\mathcal{F} : (V^*)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} V^{\mathbb{C}}$$

est un isom. de repres. complexes de G.

b) En particulier, G a le même nombre d'orbites dans V et dans V^*.

Dém.: a) déjà montré

b) Résulte du fait que le nombre d'orbites de G dans V est égal à la dim. du ss-espace des points fixes par G dans $V^{\mathbb{C}}$.

$\rightarrow$ p. 47

Rappel : Q carquois fini, k un corps

$v \in \mathbb{N}^{Q_0}$ vecteur positif

$z(v)$ = nombre d'orbites indécomposables de $GL(v)$ dans $Rep(Q, v)$

But : $z(v)$ ne dépend pas de l'orientation des flèches de Q si $k = \overline{\mathbb{F}_p}$.

Etape 1 : Le résultat est vrai si k est fini

Sous-étape a) : $\mathbb{F}_m$ un corps fini à p^m éléments

$g_m(v)$ = nombre de toutes les orbites de $GL(v, \mathbb{F}_m)$ ds $Rep(Q, v, \mathbb{F}_m)$

Alors $g_m(v)$ ne dépend pas de l'orientation des flèches.

Dém. : Par la trf. de Fourier (Lemme de Brauer).

Sous-étape b) : $z_m(v)$ = nombre des orbites indécomposables de $GL(v, \mathbb{F}_m)$ ds $Rep(Q, v, \mathbb{F}_m)$

Alors $z_m(v)$ ne dépend pas de l'or. des flèches.

et l'action de $G = GL(v, F_m)$ sur $Y \times H$ provient d'actions de G sur les deux facteurs. Le même groupe G agit sur

$$Rep(\overline{Q}, v, F_m) = Y \times \overline{H} \quad , \quad \overline{H} = Hom(F_m^{v(y)}, F_m^{v(x)})$$

en agissant sur les deux facteurs. Il s'agit d'établir une bijection entre les orbites de G dans $Y \times H$ et celles dans $Y \times \overline{H}$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme de représentations de G entre

$$\mathbb{C}^{Y \times H} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^{Y \times \overline{H}}.$$

Or $\mathbb{C}^{Y \times H} \cong \mathbb{C}^{Y} \otimes \mathbb{C}^{H}$ comme G-modules. Donc il suffit de donner un isom. de G-modules entre $\mathbb{C}^{H}$ et $\mathbb{C}^{\overline{H}}$.
Or $\overline{H}$ s'identifie au dual de H (sur $\mathbb{F}_p$) par l'accouplement G-invariant (!)

$$\begin{array}{ccccc} H \times \overline{H} & \longrightarrow & F_m & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \\ (M, N) & \longmapsto & Tr(MN) & \longmapsto & \tau(Tr(MN)) \end{array}$$

où $\tau : F_m \longrightarrow \mathbb{F}_p$ est n'importe quelle forme linéaire non nulle (car $Im(Tr(M?) : \overline{H} \to F_m)$ est ou bien 0 ou bien F_m).
Par le lemme de Brauer, la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^{\overline{H}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{H} , \; f \longmapsto \sum_{N \in \overline{H}} f(N)\, \zeta^{\tau(Tr(M?))}$$

05.03.04

est un isom. de G-modules.

Sous-étape b) : Soit $z_m(v)$ le nombre de classes d'isom. de représ. <u>indécomposables</u> V sur F_m de vecteur dim. v. Alors $z_m(v)$ ne dépend pas de l'orientation des flèches de Q.

Rque: Le thm de Krull-Schmidt et le lemme de Fitting (I.3) sont valables sur un corps quelconque. On s'en servira dans la démonstration.

Dém.: Nous allons montrer que $i_m(v)$ peut se calculer en fonction des $g_m(w)$, $w \leq v$, et des $i_m(w)$, $w < v$. Par une réc. et a), cela suffira.

Si V est une représ. de vecteur dim v, on peut la décomposer de manière unique

$$V = \bigoplus_{w \in \mathbb{N}^Q} V_w \qquad (**)$$

où V_w est une somme de représ. indécomposables de vecteur dim. w. Si V_w se décompose en $\pi(w)$ rep. indéc. on a

$$v = \sum_{w \in \mathbb{N}^Q} \pi(w)\, w \qquad (*).$$

On appelle <u>partition</u> de v une fonction $\pi : \mathbb{N}^Q \to \mathbb{N}$ vérifiant $(*)$. Si on se donne π, le nombre de classes d'isom. de représ. V_w qui sont sommes de $\pi(w)$ rep. indéc. de vecteur dim. w est égal au

nombre d'écrire $\pi(w)$ comme somme de $i_m(w)$ parts

$$= \binom{i_m(w) + \pi(w) - 1}{\pi(w)}$$

Donc le nombre de classes d'isom. de représ V qui se décomposent comme dans $(**)$ est

$$\prod_{w \in \mathbb{N}^Q} \binom{i_m(w) + \pi(w) - 1}{\pi(w)}.$$

Pour la partition triviale (i.e. $\pi(v) = 1$, $\pi(w) = 0$, $\forall v \neq w$) ce produit vaut

$$i_m(v).$$

Donc le nombre de classes d'isom. de rep. V est

$$g_m(v) = i_m(v) + \sum_{\substack{\pi \text{ part.} \\ \text{non triv.}}} \prod_{w \in \mathbb{N}^Q} \binom{i_m(w) + \pi(w) - 1}{\pi(w)}$$

Donc $i_m(v)$ se calcule en fonction des $g_m(w)$, $w \leq v$, et $i_m(w)$, $w < v$.

✓

Rque : Pour déduire l'invariance de $\tau(v)$ sur $k = \overline{\mathbb{F}_p}$,
nous avons besoin d'une

5. Digression : Indécomposables et extension des scalaires

Soit K un corps parfait (i.e. toute extension finie de K est séparable,
p.ex. car $K = 0$ ou K fini. Non-exemple : $\mathbb{F}_p(X) \subseteq \mathbb{F}_p(\sqrt[p]{X})$)
Soit A une K-algèbre
Soit K' une clôture algébrique de K et $A' = A \underset{K}{\otimes} K'$.
Soit Γ le groupe de Galois de K' sur K.

Déf : Soit M un A'-module et $\gamma \in \Gamma$. On définit le A'-module ${}^{\gamma}M$
par : - ${}^{\gamma}M$ a même groupe abélien sous-jacent que M
- pour $a \in A, x \in K'$ et $m \in M$ on pose
$$(a \otimes x) \cdot {}^{\gamma}m = \gamma(a \otimes \gamma^{-1}(x) . m)$$

Rques : 1) Si M' est de dimension finie, $m_1, \ldots, m_n$ une base de M'
et $(T_{ij}(a))$ la matrice de la mult. par $a \otimes 1$ dans M', alors
$m_1, \ldots, m_n$ est encore une base de ${}^{\gamma}M'$ et $(\gamma(T_{ij}(a)))$
la matrice de la mult. par $a \otimes 1$ dans ${}^{\gamma}M$.
2) On a une équivalence de catégories
$$A'\text{-Mod} \longrightarrow A'\text{-Mod}, \; M' \longmapsto {}^{\gamma}M'$$
En particulier ${}^{\gamma}M'$ est indécomposable ssi M' l'est.

Soit I (resp. I') un système de représ. des classes d'isomorphie de
A-modules (resp. A'-modules) indécomposables de dim finie sur K
(resp. A'). On a une action de Γ sur I' induite par $M \longmapsto {}^{\gamma}M$.

Thm : a) On a une bijection canonique

$$I \xrightarrow{\sim} I'/\Gamma$$

b) Si M est un A-module indécomposable de dim. finie, alors

$$M \underset{K}{\otimes} K' \cong (M_1 \oplus \dots \oplus M_z)^r ,$$

où
- les M_i forment l'orbite correspondante à M dans I'
- $z = [Z : K]$ où Z est centre du corps (év. non com.) $\mathrm{End}_A(M)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(M)$.
- $r^2 = \dim_Z \mathrm{End}_A(M)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(M)$.

Rques : 1) Si K est fini, $r = 1$.

2) Le §7B du Curtis-Reiner contient les outils nécessaires à la démonstration. Voir aussi [GR, 7.8.18].
(rque interne : Si $K' \supseteq K$ est séparable, alors $K' \underset{K}{\otimes} K' \to K'$ se scinde dans la cat. des K'-K'-bimodules et $M \underset{K}{\otimes} K' \to M$ se scinde pour tout $M \in \mathrm{Mod}\,A'$. D'où la surjectivité dans a)).

Exemple : $Q = \circlearrowleft$, $A = KQ = K[X]$

1) $K = \mathbb{R}$, $K' = \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$

$$\{ \mathbb{C}[X]\text{-modules indéc.} \}/\text{isom.} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\} / GL_n(\mathbb{C})$$

L'action de Γ est donnée par $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar\lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \bar\lambda \end{pmatrix}$

Donc

$$I'/\Gamma \xleftarrow{\sim} \{ (n, O) \mid n \geq 1,\ O \text{ orbite de } \Gamma \text{ dans } \mathbb{C} \}$$

De l'autre côté, on a

$$I = \{ \mathbb{R}[X]/(P^n) \mid P \text{ irréd. sur } \mathbb{R} \}$$

Exercice : $K = \mathbb{F}_p$, $A = K[X]$; $K = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{H}$.

6. Fin de la démonstration

Etape 2 : $\iota(v)$ ne dépend pas de l'orientation des flèches de Q pour $k = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Dém. : On note :

$F_\infty = \overline{\mathbb{F}}_p$, $\varphi : F_\infty \longrightarrow F_\infty$, $x \longmapsto x^p$ le générateur de $\Gamma = Gal(F_\infty, \mathbb{F}_p)$, $F_m = F_\infty^{\langle \varphi^m \rangle}$ le sous-corps à p^m éléments (en particulier $F_1 = \mathbb{F}_p$),

I_m et I_∞ des systèmes de représentants des indécomposables sur F_m et F_∞.

Γ agit sur $Rep(Q, v, F_\infty) = \prod_{\alpha \in Q_1} Hom_{F_\infty}\left(F_\infty^{v(s(\alpha))}, F_\infty^{v(t(\alpha))}\right)$ (en agissant sur les coeff. des matrices), et I_∞ est muni de l'action induite. On a la bijection de la digression

$$I_m \xrightarrow{\sim} I_\infty / \langle \varphi^m \rangle, \quad X \longmapsto \overline{X}$$

déterminée par

$$F_\infty \otimes_{F_m} X \simeq \bigoplus_{Y \in \overline{X}} Y$$

En particulier, on a

$$\underline{\dim}_{F_m} X = |\overline{X}| \cdot \underline{\dim}_{F_\infty} Y .$$

Soit $\iota(s, v)$ = nombre de Γ-orbites dans I_∞ qui sont de cardinal s et formées de rep. de vecteur dim v.

On a $\iota(s, v) \leq \iota_1(s \cdot v) < \infty$ et $\iota(v) = \sum_{s \in \mathbb{N}} s\, \iota(s, v)$.

Il suffit de montrer que les $\iota(s, v)$ ne dépendent pas de l'orientation des flèches. Pour cela, on va montrer que $l(s,v)$ se calcule en fonction des $l_m(v)$ (ce qui suffit par l'Étape 1).

Soit O une φ^--orbite de cardinal s et de vecteur dim v dans I_∞.

Donc $O \cong \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ en tant qu'ensemble muni de l'action de $\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

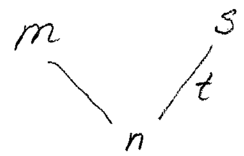
Sous l'action de $\langle \varphi^m \rangle \cong m\mathbb{Z}$, O se décompose donc en des φ^{m-}-orbites de cardinal

$$\frac{PPCM(m,s)}{m} = \frac{ms}{m \cdot PGCD(m,s)} = \frac{s}{PGCD(m,s)}$$

qui sont au nombre de $PGCD(m,s)$. Donc O fournit $PGCD(m,s)$ éléments de I_m et leur vecteur dim. est $\frac{s}{PGCD(m,s)} \cdot v$.

Il s'ensuit que

$$l_m(w) = \sum_{\substack{s,v \text{ t.q.} \\ w = \underbrace{\frac{s}{PGCD(m,s)}}_{t} \cdot v}} \underbrace{PGCD(m,s)}_{n} \cdot l(s,v)$$



$$= \sum_{n|m} n \cdot \sum_{\substack{t \text{ t.q.} \\ PGCD(\frac{m}{n},t)=1 \text{ et} \\ \frac{1}{t} w \in \mathbb{N}^{Q_0}}} l(nt, \tfrac{1}{t} w)$$

$$= m\, l(m,w) + \sum_{\substack{n<m \\ n|m}} n\, l(n,w) + \sum_{n \leq m} n \sum_{t>1} l(nt, \tfrac{1}{t} w)$$

Donc $l(m,w)$ se calcule en fonct. de $l_m(w)$ et des $l(s,v)$ où $(v,s) < (w,m)$ pour l'ordre lexicographique.