IV. Algèbres semisimples et leurs modules

But : Dualité de Schur-Weyl : $\mathfrak{S}_n \circlearrowright V^{\otimes n} \circlearrowleft GL(V)$.

Conventions : anneau = anneau commutatif ou non commutatif
module = module à gauche

1. Modules simples

Soit A un anneau.

Exemples : 1) $M_n(k)$, $S(V)$, $\Lambda(V)$, $T(V)$, où k est un corps, $n \in \mathbb{N}$ et V un k-espace vectoriel.

2) Soient k un corps et G un groupe. L'algèbre de groupe kG est la k-algèbre de base l'ensemble G et dont la multiplication est donnée sur les vecteurs de la base par la loi de G. La donnée d'un kG-module V est alors équivalente à celle de la représentation

$$\rho_V : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longmapsto \rho_V(g) : v \mapsto gv .$$

Notation : Pour deux A-modules L, M, on note $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ le groupe abélien des morphismes de A-modules $f : L \to M$ et $\mathrm{End}_A(L)$ l'anneau des endomorphismes de L.

Rques : 1) Si A n'est pas commutatif, $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ ne porte pas de structure naturelle de A-module !

2) Si A est une k-algèbre pour un anneau com. k, alors tout A-module est aussi un k-module et $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ porte une structure naturelle de k-module.

Exercice : On a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_A(L_1 \oplus L_2, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(L_1, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(L_2, M)$$

$$f \longleftrightarrow [f_1, f_2]$$

$$\mathrm{Hom}_A(L, M_1 \oplus M_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(L, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(L, M_2)$$

$$f \longleftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Hom}_A({}_AA, M) \xrightarrow{\sim} M \;, \quad f \longmapsto f(1)$$

$$\mathrm{End}_A({}_AA) \xrightarrow{\sim} A^{op} \quad \text{(isom. d'anneaux)}$$

où L, M, L_i, M_i sont des modules et on considère $L_1 \oplus L_2$ comme le module des "vecteurs colonnes" $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. En outre, ${}_AA$ désigne l'anneau A considéré comme module à gauche sur lui-même et A^{op} l'anneau opposé : $a \underset{A^{op}}{\cdot} b := b \underset{A}{\cdot} a$.

Déf : Un A-module est simple s'il est non nul et que ses seuls sous-modules sont 0 et lui-même.

Rque : Donc un A-module est simple ssi il admet exactement deux sous-modules.

Exemples : Soit k un corps

1) Si A est une k-algèbre, tout A-module de k-dimension 1 est simple.
2) Le $M_n(k)$-module k^n est simple.

Lemme de Schur[1] : Soient L, M des A-modules simples.

a) Tout morphisme non nul $f: L \to M$ est inversible. En particulier, $\mathrm{End}_A(L)$ est un corps (non néc. com.).

b) Si A est une k-algèbre pour un corps alg. clos k et L est de k-dimension finie, alors
$$\mathrm{End}_A(L) = k \cdot \mathbb{1}_L .$$

Dém. : a) Si $f \neq 0$, alors $\mathrm{Im} f \neq 0$ et $\mathrm{Ker} f \subsetneq L$. Comme L et M sont simples, on a $\mathrm{Im} f = M$ et $\mathrm{Ker} f = 0$.

b) Soit $f \in \mathrm{End}_A(L)$. Soit $\lambda \in k$ une valeur propre de f. Alors $f - \lambda \mathbb{1}_L$ est non inversible. Donc $f - \lambda \mathbb{1}_L = 0$ par a). ✓

2. Modules semisimples

Soit A un anneau.

Thm 1 : Soit M un A-module. On a équivalence entre

i) M est la somme directe d'une famille de ss-modules simples.

ii) M est la somme d'une famille de sous-modules simples.

iii) Pour tout sous-module $M' \subseteq M$, il existe un sous-module M'' tel que $M = M' \oplus M''$.

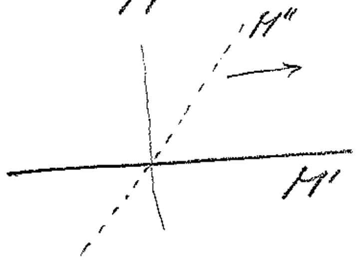
Déf : Le module M est semisimple s'il vérifie ces conditions.

Exemples : Soit k un corps.

1) Pour $A = M_n(k)$, le module ${}_A A$ est semisimple :
$$A = AE_{11} \oplus AE_{22} \oplus \dots \oplus AE_{nn}, \quad AE_{ii} \xrightarrow{\sim} k^n$$

[1] Issai Schur, 1875 (Mogilyov) – 1941 (Tel Aviv) ; Lemme : entre 1904 et 07.

2) Soit $A \subseteq M_2(k)$ la ss-algèbre des matrices triangulaires supérieures $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $a, b, d \in k$. Alors $M = k^2$ n'est pas semi-simple car $M' = ke_1$ n'admet pas de supplémentaire A-stable M'' :



Lemme 2 : Soient M un module, $M' \subseteq M$ un ss-module et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de ss-modules simples de M t.q. $M = M' + \sum_{i \in I} M_i$.
Il existe une partie $J \subseteq I$ t.q. $M = M' \oplus \bigoplus_{i \in J} M_i$.

Dém. : Soit Λ l'ensemble ordonné des parties $J' \subseteq I$ telles que la somme $M' + \sum_{i \in J'} M_i$ est directe. Alors Λ est non vide (p.ex. $\emptyset \in \Lambda$) et stable par réunions croissantes. Soit $J \in \Lambda$ un élément maximal (Zorn[1]). Supposons que $M_0 = M' \oplus \bigoplus_{i \in J} M_i$ est un ss-module strict. Alors il existe $k \in I$ t.q. $M_k \not\subseteq M_0$. Mais alors $M_k \cap M_0 = \{0\}$ car M_k est simple. Donc $J \cup \{k\} \in \Lambda$. Cette contradiction montre que l'on a bien $M_0 = M$. ✓

Dém. du thm. : i) $\Rightarrow$ ii) est clair et ii) $\Rightarrow$ i) résulte du lemme 2.
i) $\Rightarrow$ iii) : Supposons que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Par le lemme 2, il existe $J \subseteq I$ tel que pour $M'' = \bigoplus_{i \in J} M_i$, on a $M' \oplus M'' = M$.
iii) $\Rightarrow$ ii) : Première étape : Tout ss-module non nul $M_0 \subseteq M$ contient un ss-module simple.

Dém. : Soit $0 \neq v \in M_0$. Le ss-module cyclique Av contient

[1] Max Zorn, 1906 (Krefeld) - 1993 (Bloomington), Lemme : entre 1934 et 36.

un sous-module maximal Iv, image d'un idéal à gauche maximal I contenant le noyau du morph.

$$A \longrightarrow Av, \quad a \longmapsto av.$$

Soit $M'' \subseteq M$ un ss-module t.q. $M = Iv \oplus M''$. Alors

$$Av = Iv \oplus (Av \cap M'')$$

et $Av \cap M''$ est simple car isomorphe à Av/Iv.

Deuxième étape : l'affirmation.

Soit $M_0 \subseteq M$ le ss-module somme de tous les ss-modules simples de M. Si $M_0 \neq M$, il existe un ss-module non nul M'' t.q. $M_0 \oplus M'' = M$. Mais alors M'' contient un ss-module simple S et $M_0 \oplus S \supsetneq M_0$. Cette contradiction montre qu'on a bien $M_0 = M$. ✓

Exemple : Soient k un corps et G un groupe fini t.q. $|G| \in k^\times$. Alors tout kG-module est semisimple. En effet, soient M un kG-module et $M' \subseteq M$ un ss-module. Soient $i : M' \hookrightarrow M$ l'inclusion et $p : M \to M'$ une application k-linéaire t.q. $p \circ i = \mathbb{1}_{M'}$. Soit

$$\pi : M \longrightarrow M', \quad m \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p(g^{-1}m).$$

Alors π est kG-linéaire (!) et $\pi \circ i = \mathbb{1}_{M'}$. Donc $M'' = \mathrm{Ker}(\pi)$ est un kG-ss-module et $M = M' \oplus M''$.

Lemme 3 : Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de modules. Si M est semisimple, alors M' et M'' le sont.

Dém : Exercice ! ✓

⚠ La réciproque est fausse ! (voir l'exemple 2), p. 128).

3. Théorèmes de Burnside et de Wedderburn

Soit k un corps algébriquement clos.

Thm 1 (Burnside[1]) : Soient A une k-algèbre et S un A-module simple de k-dimension finie. Alors l'application

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_k(S), \quad a \mapsto (x \mapsto ax)$$

est surjective.

Exemple : Si G est un groupe et $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ une représentation irréductible (= kG-module simple) dans un espace vectoriel de dimension finie V sur $k = \bar{k}$, alors tout endom. k-lin. de V est combinaison linéaire des opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$.

Dém du thm. : Soient $f : S \longrightarrow S$ un endom. k-linéaire et $v_1, \dots, v_n$ une base de S sur k. Notons

$$\mathrm{diag}(f) = \begin{bmatrix} f & & 0 \\ & f & \\ & & \ddots \\ 0 & & f \end{bmatrix} : S^n \longrightarrow S^n, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

C'est un endomorphisme k-linéaire du module semisimple S^n. Le ss-module

$$M' = A.\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \subseteq S^n$$

admet un ss-module supplémentaire M''. Soit $p : S^n \longrightarrow M'$ la projection sur M' le long de M''. Alors p est A-linéaire. Par le lemme de Schur (partie 6)), p est donné par une matrice de scalaires $p_{ij} \in k$. Donc p commute avec $\mathrm{diag}(f)$ et $\mathrm{diag}(f)$ envoie $M' = \mathrm{Im}(p)$ sur lui-même. Mais alors $\begin{bmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{bmatrix} \in A.\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

[1] William Burnside, 1852 (Paddington, London) - 1927 (Cotleigh, Kent)

✓

Déf : Une k-algèbre est simple si elle est non nulle et ses seuls idéaux bilatères sont 0 et elle-même.

Thm 2 (Wedderburn[1]) : Toute k-algèbre simple de dimension finie sur k est isomorphe à $M_n(k)$ pour un entier $n \geq 1$.

Dém. : Considérons le A-module à gauche ${}_AA$. Soit $I \subseteq {}_AA$ un ss-module (= idéal à gauche) non nul de dimension minimale. Alors I est un A-module simple. On obtient un morphisme d'algèbres

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_k(I) \quad (\cong M_n(k))$$

qui est surjectif, d'après le thm de Burnside. Il est aussi injectif car A n'admet pas d'idéal bilatère propre non nul. ✓

3. Algèbres semisimples

Soit k un corps algébriquement clos.

Lemme 1 : Soit A une k-algèbre de dimension finie. On a équiv. entre

i) Le module ${}_AA$ est semisimple ;

ii) tout A-module est semisimple ;

iii) A est isomorphe à un produit fini d'algèbres simples ;

iv) A est isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_k(V_i)$ pour des espaces vectoriels $V_1, \dots, V_r$ de dimension finie.

Déf : L'algèbre A est semisimple si elle vérifie ces conditions.

---

[1] Joseph Wedderburn, 1882 (Forfar, Écosse) - 1948 (Princeton, É.-U.)

Dém : i) $\Rightarrow$ ii) Tout A-module est quotient d'une somme de copies de ${}_AA$, donc semisimple (L 2.3).

ii) $\Rightarrow$ i) clair.

i) $\Rightarrow$ iii) Soit $A = S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}$ une décomposition de A en une somme de modules simples où les m_i sont ≥ 1 et les S_i non isomorphes 2 à 2. On a les isomorphismes d'algèbres :

$$A^{op} \xrightarrow{\sim} End_A({}_AA) \simeq End_A(S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r})$$

$$= Hom_A(S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}, S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r})$$

$$\underset{\text{Schur a)}}{\simeq} Hom_A(S_1^{m_1}, S_1^{m_1}) \times \dots \times Hom_A(S_r^{m_r}, S_r^{m_r})$$

$$\underset{\text{Schur b)}}{\simeq} M_{m_1}(k) \times \dots \times M_{m_r}(k)$$

Comme on a $M_n(k) \xrightarrow{\sim} M_n(k)^{op}$, $X \mapsto {}^tX$, on obtient l'affirmation.

iii) $\Rightarrow$ iv) par le thm de Wedderburn.

iv) $\Rightarrow$ i) Si $A = M_{m_1}(k) \times \dots \times M_{m_r}(k)$, alors A est égal à la somme de ses idéaux $A \cdot (0, \dots, 0, E_{ii}, 0, \dots, 0)$ ("idéaux colonnes") ; qui sont simples. ✓

<u>Exemple</u> : Soit G un groupe fini t.q. $|G| \in k^\times$. Alors tout kG-module est semisimple. Donc kG est isomorphe à un produit d'algèbres simples. Plus précisément, la démonstration montre que $kG \simeq \prod_{i=1}^{r} End_k(S_i)$,

où $S_1, \dots, S_r$ sont les facteurs simples de kG^{kG}. D'où

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} (\dim S_i)^2 .$$

<u>Thm 2</u> : Soit A une k-algèbre semisimple de dimension finie. Soit ${}_A A \cong S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}$ une décomposition où les S_i sont simples et non isomorphes 2 à 2.

a) Tout A-module simple est isomorphe à l'un des S_i.

b) Tout A-module est somme de copies des S_i.

c) Pour tout A-module M, l'application canonique

$$\varphi_M : \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes_k S_i \longrightarrow M, \quad \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{r} f_i(x_i)$$

est un isomorphisme.

d) Si $U_1, \dots, U_r$ sont des espaces vectoriels de dim. finie, l'image de $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_k(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes S_i)$ est la ss-algèbre $\prod_{i=1}^{r} k \cdot 1\!\!1_{U_i} \otimes_k \mathrm{End}_k(S_i)$.

Dém. : a) Soient M un A-module simple et m un élément non nul de M. Alors le morphisme de A-modules

$${}_A A \longrightarrow M, \quad a \longmapsto am$$

est surjectif (car son image est non nulle). Donc pour l'une des inclusions $S_i \hookrightarrow A$ de l'un des S_i dans ${}_A A$, la composée $S_i \hookrightarrow A \twoheadrightarrow M$ est non nulle, donc inversible.

b) Soit N un A-module. Il est quotient d'une somme de copies de ${}_A A$, i.e. il existe un ensemble I et un morphisme surjectif $f : \bigoplus_I A \longrightarrow N$. Le noyau $M' = \ker f$ admet un supplémentaire A-stable M'' qui est somme directe de copies des S_i, d'après le lemme 2.2. On a $M'' \xrightarrow{\sim} N$.

c) Notons $FM = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes S_i$. Clairement,

le morphisme

$$\varphi_{S_j} : FS_j \longrightarrow S_j$$

est inversible pour $1 \leq j \leq r$. Si L_1 et L_2 sont deux

A-modules, les inclusions $L_i \hookrightarrow L_1 \oplus L_2$ induisent un isom.

$$(FL_1) \oplus (FL_2) \xrightarrow{\sim} F(L_1 \oplus L_2)$$

et la composée

$$(FL_1) \oplus (FL_2) \xrightarrow{\sim} F(L_1 \oplus L_2) \longrightarrow L_1 \oplus L_2$$

est donnée par $\begin{bmatrix} \varphi_{L_1} & 0 \\ 0 & \varphi_{L_2} \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que φ_M est

un isomorphisme si M est une somme finie de copies des S_i.

Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ pour une famille quelconque de modules M_i,

le morphisme induit par les inclusions

$$\bigoplus_{i \in I} FM_i \longrightarrow F(\bigoplus_{i \in I} M_i)$$

est toujours inversible (grâce au fait que $\dim_k S_j < \infty$, $1 \leq j \leq r$)

et la composée

$$\bigoplus_{i \in I} FM_i \longrightarrow F(\bigoplus_{i \in I} M_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

toujours donnée par $\bigoplus_{i \in I} \varphi_{M_i}$. D'où l'affirmation dans le cas

général.

d) On peut supposer que $A = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_k(V_i)$ pour des espaces

vectoriels V_i de dimension finie. Alors $S_i = V_i$ muni de

l'action naturelle et l'application $A \longrightarrow \mathrm{End}_k(S_i) = \mathrm{End}_k(V_i)$

est la projection. Alors la vérification est facile. ✓

Rque : Dans c), l'image de $\mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes_k S_i \longrightarrow M$ est le plus grand ss-module de M isomorphe à une somme de copies de S_i. Il s'appelle la <u>composante isotypique</u> de type S_i de M. Si M_{S_i} désigne ce ss-module, on a $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{S_i}$ et $f(M_{S_i}) \subseteq N_{S_i}$ pour <u>tout morphisme</u> $f : M \to N$.

Thm 3 : Soit A une k-algèbre associative. Soit V un A-module semisimple de k-dimension finie. Alors l'image de la représentation associée $A \xrightarrow[\rho]{} \mathrm{End}_k(V)$ est une algèbre semisimple.

Dém. : On peut supposer que $A \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ et que ρ est l'inclusion. Décomposons V en somme de modules simples :

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_d$$

Pour chaque V_i, choisissons une k-base $v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}$. Considérons le A-module semisimple

$$W = V_1^{n_1} \oplus V_2^{n_2} \oplus \dots \oplus V_d^{n_d}.$$

On a le morphisme de A-modules à <u>gauche</u>

$${}_A A \longrightarrow W, \quad a \longmapsto (a.v_{1,1}, \dots, a.v_{d,n_d}),$$

qui est clairement injectif. Donc ${}_A A$ est semisimple en tant que ss-module d'un module semisimple (L 2.3). ✓

Déf : Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ une partie. Le <u>commutant</u> de $\mathcal{U}$ est

$$\mathrm{Comm}(\mathcal{U}) = \{ f \in \mathrm{End}_k(V) \mid f \circ u = u \circ f, \ \forall u \in \mathcal{U} \}.$$

Le <u>bicommutant</u> de $\mathcal{U}$ est $\mathrm{Comm}(\mathrm{Comm}(\mathcal{U}))$.

Rque : On a toujours $\mathcal{U} \subset \mathrm{Comm}(\mathrm{Comm}(\mathcal{U}))$.

<u>Thm 4</u> : Soient V un espace vectoriel de dim. finie et $A \leq \mathrm{End}_k(V)$ une algèbre semisimple. Alors $B = \mathrm{Comm}(A)$ est semisimple et $A = \mathrm{Comm}(B)$. Plus précisément, si $V_1, \dots, V_r$ sont les représentations irréductibles de A et $V \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes_k V_i$, où $U_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, V)$, alors

$$A \underset{(1)}{\simeq} \prod_{i=1}^{r} k\mathbb{1}_{V_i} \otimes \mathrm{End}_k(V_i) \quad \text{et} \quad B \underset{(2)}{\simeq} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_k(U_i) \otimes k\mathbb{1}_{V_i}$$

Dém. : On a (1) par le thm 2 d). On a, grâce au lemme de Schur :

$$\mathrm{Comm}(A) = \mathrm{End}_A\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes V_i\Big) \cong \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_A(U_i \otimes V_i, U_j \otimes V_j)$$

$$\underset{\text{Schur}}{=} \prod_i \mathrm{Hom}_A(U_i \otimes V_i, U_i \otimes V_i) \cong \prod_i \underbrace{\mathrm{Hom}_k(U_i, U_i)}_{= \mathrm{End}_k(U_i)} \otimes_k \underbrace{\mathrm{Hom}_A(V_i, V_i)}_{\underset{\text{Schur}}{=} k\mathbb{1}_{V_i}}$$

✓

<u>Corollaire</u> : $\{A\text{-modules simples}\}/\text{isom} \simeq \{B\text{-modules simples}\}/\text{isom}$

$$U_i \longleftrightarrow V_i$$

<u>4. Dualité de Schur-Weyl</u>

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $k \geq 1$.

Soit $\rho : \mathfrak{S}_k \to Gl(V^{\otimes k})$ la représentation donnée par l'action

$$\sigma . (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}.$$

Soit $\varphi : Gl(V) \to Gl(V^{\otimes k})$ la repr. donnée par l'action

$$f(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_k).$$

Soient $A \subseteq \underline{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ resp. $B \subseteq End_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ les ss-algèbres images de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$ resp. $\mathbb{C}\,Gl(V)$. Notons que $A \subseteq Comm(B)$ et $B \subseteq Comm(A)$.

$$\mathfrak{S}_k \circlearrowright V^{\otimes k} \circlearrowleft Gl(V)$$

<u>Thm 1</u> (Schur-Weyl*): A et B sont semisimples et

$$A = Comm(B), \quad B = Comm(A).$$

Dém. : Tout $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$-module est semisimple (Exemple p. 129). Donc $V^{\otimes k}$ est semisimple en tant que $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$-module. Comme $V^{\otimes k}$ est aussi de dim. finie sur $\mathbb{C}$, l'algèbre A est semisimple (Thm 3.3). Alors $B' := Comm(A)$ est semisimple et $A = Comm(B')$ (Thm 3.4). Il reste à montrer que $B = Comm(A)$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V. Alors les

$$e_J = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}, \quad J = (j_1, \dots, j_k), \quad J \in \{1, \dots, n\}^k,$$

forment une base de $V^{\otimes k}$. On a

$$\sigma e_J = e_{\sigma(J)}, \quad \text{où} \quad \sigma(j_1, \dots, j_k) = (j_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, j_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Soit $T \in End_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ de matrice $(a_{I,J})$ dans la base (e_I). Alors on vérifie que

$$T \in Comm(A) \iff a_{I,J} = a_{\sigma(I), \sigma(J)}, \quad \forall I, J, \forall \sigma.$$

On aimerait montrer qu'un tel T est dans l'image de $\mathbb{C}\,Gl(V)$. Calculons cette image : soit $g \in Gl(V)$ de matrice (g_{ij}).

---

* Hermann Weyl, 1885 (Elmsdorf) – 1955 (Zurich)

On a

$$\varphi(g)(e_J) = g(e_{j_1}) \otimes \cdots \otimes g(e_{j_k}) = \sum_I g_{I,J}\, e_I ,$$

où

$$g_{I,J} = g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_k j_k} .$$

Notons qu'on a bien $g_{\sigma(I),\sigma(J)} = g_{I,J}$ ce qui confirme que $B \subseteq \mathrm{Comm}(A)$. Munissons V d'un produit scalaire hermitien pour lequel $e_1, \ldots, e_n$ est orthonormé. Alors $V^{\otimes k}$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ héritent d'un produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g \rangle = tr(f^* g) , \quad f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k}),$$

où f^* est l'adjoint de f. Pour montrer que $B = \mathrm{Comm}(A)$, il suffit de montrer que l'orthogonal de B dans $\mathrm{Comm}(A)$ s'annule. L'orthogonal de B dans $\mathrm{Comm}(A)$ est formé des T de matrice $(a_{I,J})$ tels que $a_{I,J} = a_{\sigma(I),\sigma(J)}$, $\forall \sigma$, et

$$\sum \overline{a_{I,J}}\, g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_k j_k} = 0$$

pour tous $g \in Gl(V)$. Pour un T fixé, c'est une égalité polynomiale pour les coefficients de $g \in Gl(V)$. Comme $Gl(V)$ est dense dans $\mathrm{End}(V)$ et que $\mathbb{C}$ est infini, on a donc l'égalité

$$\sum_{I,J} a_{I,J}\, X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k} = 0$$

dans $\mathbb{C}[X_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]$. Regroupons les termes dans ce polynôme. Posons

$$X_{I,J} = X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k} .$$

Alors nous avons

$$X_{I,J} = X_{I',J'} \overset{!}{\iff} \exists\, \sigma \in \mathfrak{S}_k \text{ t.q. } \begin{cases} I' = \sigma(I) \\ J' = \sigma(J) \end{cases} .$$

Soit Γ un système de représentants des orbites de $\mathfrak{S}_k$ dans l'ensemble des couples de suites (I,J). Alors on a

$$0 = \sum_{(I,J)} a_{I,J} X_{I,J} = \sum_{(I,J) \in \Gamma} \sum_{(I',J') \in \mathfrak{S}_k \cdot (I,J)} \underbrace{a_{I',J'} X_{I',J'}}_{= a_{I,J} X_{I,J}}$$

$$= \sum_{(I,J) \in \Gamma} \underbrace{|\mathfrak{S}_k \cdot (I,J)|}_{\neq 0} \cdot a_{I,J} \underbrace{X_{I,J}}_{\text{monômes distincts 2 à 2}}$$

Il s'ensuit que $a_{I,J} = 0$ pour tous I,J, ce qu'il fallait démontrer. ✓