I. Algèbre multilinéaire

1. Produit tensoriel

1.1 Définition, propriété universelle

But : Ramener l'algèbre multilinéaire à l'algèbre linéaire.

Soient A un anneau com. et L, M des A-modules.

Déf : Le produit tensoriel $L \otimes_A M$ est le gr. abélien F/R, où

a) F est le groupe abélien libre sur l'ens. des couples (l, m), $l \in L$, $m \in M$,

b) R est le ss-gr. engendré par les éléments

$$\left.\begin{array}{l} (l_1 + l_2, m) - (l_1, m) - (l_2, m) \\ (l, m_1 + m_2) - (l, m_1) - (l, m_2) \\ (al, m) - (l, am) \end{array}\right\}$$

où $l, l_1, l_2 \in L$, $m, m_1, m_2 \in M$, $a \in A$.

On note $l \otimes m$ l'image de (l, m) dans $L \otimes_A M$ et on l'appelle un tenseur décomposable (= pur = typique).

Rques : 1) Les tenseurs purs engendrent le groupe abélien $L \otimes_A M$. Un élément général de $L \otimes_A M$ est une somme de tenseurs purs.

2) Pour $b \in A$, on a un homomorphisme de gr. ab.

$$\lambda_b : F \longrightarrow F, \quad (l, m) \longmapsto (bl, m).$$

λ_b laisse stable $R \subseteq F$. Donc λ_b induit un homom.

$$\overline{\lambda_b} : L \otimes_A M \longrightarrow L \otimes_A M,$$

déterminé par son effet sur les tenseurs décomposables :

$$\overline{\lambda_b}(l \otimes m) = (bl) \otimes m = l \otimes (bm).$$

<u>Déf</u> (et exercice): La <u>structure de A-module</u> de $L \otimes_A M$ est définie par

$$b(l \otimes m) := (bl) \otimes m, \quad b \in A,\ l \in L,\ m \in M.$$

<u>Exemples</u>: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong 0$, $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}^{2\times 3}$.

<u>Déf</u>: Soit N un A-module. Une appl. $f : L \times M \longrightarrow N$ est <u>bilinéaire</u> si

$$f(l_1 + l_2, m) = f(l_1, m) + f(l_2, m)$$
$$f(l, m_1 + m_2) = f(l, m_1) + f(l, m_2)$$
$$f(al, m) = f(l, am)$$
$$f(al, m) = a f(l, m)$$

pour tous $l_1, l_2, l \in L$, $m_1, m_2, m \in M$, $a \in A$.

<u>Exemple</u>: $\pi : L \times M \longrightarrow L \otimes_A M$, $(l, m) \longmapsto l \otimes m$ est bilinéaire et elle est <u>universelle</u> parmi les appl. bilin. déf. sur $L \times M$ au sens du

<u>Lemme</u> (propr. univ.): Pour toute appl. bilin. $L \times M \xrightarrow{f} N$, il existe une unique appl. A-linéaire

$$\bar{f} : L \otimes_A M \longrightarrow N$$

telle que $\bar{f} \circ \pi = f$, (i.e. $\bar{f}(l \otimes m) = f(l, m)$).

$$\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, "\forall f \text{ bilin.}"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ L \otimes_A M \arrow[ur, "\exists ! \bar{f} \text{ lin.}"'] & \end{tikzcd}$$

Dém.: Vérification basée sur les propriétés univ. du gr. ab. libre et du quotient:

$$\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"', "\text{appl. (ensembliste)}"' near end] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f} \text{ homom.}"] & F/R \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}$ homom. t.q. $\tilde{f}(R) = \{0\}$

✓

<u>Corollaire et déf.</u> : Soient L', M' des A-modules et

$$f : L \longrightarrow L', \quad g : M \longrightarrow M'$$

des appl. A-lin. Alors il existe une appl. A-lin.

$$f \tilde{\otimes} g \quad L \otimes_A M \longrightarrow L' \otimes_A M', \quad l \otimes m \longmapsto f(l) \otimes g(m)$$

bien définie. On a

(1) $$\mathbb{1}_L \tilde{\otimes} \mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{L \otimes M}$$

(2) $$(f_1 \tilde{\otimes} g_1) \circ (f \tilde{\otimes} g) = (f_1 \circ f) \tilde{\otimes} (g_1 \circ g)$$

où $f_1 : L' \longrightarrow L''$ et $g_1 : M' \longrightarrow M''$ sont A-lin.

<u>Dém.</u> :

$$\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d] \arrow[dr, "\text{bilin.!}"] & L' \times M' \arrow[d, "\pi"] \\ L \otimes_A M \arrow[r, dashed, "f \tilde{\otimes} g"'] & L' \otimes_A M' \end{tikzcd}$$

$\pi \circ (f \times g)$ est bilinéaire. D'où l'existence de $f \tilde{\otimes} g$.

Il suffit de vérifier (1) et (2) sur les tenseurs purs (ou bien on fait appel à l'unicité dans la propr. universelle).

<u>Rques</u> : 1) En particulier, $f \tilde{\otimes} g$ est inversible si f et g le sont.

2) La notation $f \tilde{\otimes} g$ n'est pas anodine ! On a une appl.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L, L') \otimes_A \mathcal{L}(M, M') &\longrightarrow \mathcal{L}(L \otimes_A M, L' \otimes_A M') \\ f \otimes g &\longmapsto f \tilde{\otimes} g \end{aligned}$$

ni surj. ni injective en général.

<u>Néanmoins</u>, on écrit souvent $f \otimes g$ au lieu de $f \tilde{\otimes} g$.

Lemme (adjonction) :

Soit $Bil_A(L,M,N) = \{f : L\times M \to N \mid f \text{ bilinéaire}\}$

On a des bijections canoniques

$$\boxed{\mathcal{L}_A(L\otimes_A M, N) \underset{(1)}{\simeq} Bil_A(L,M,N) \underset{(2)}{\simeq} \mathcal{L}_A(L, \mathcal{L}_A(M,N))}$$

Dém : (1) déjà vu.

(2) Les applications suivantes sont inverses l'une de l'autre

$$f \text{ bilin.} \longmapsto (\varphi : l \mapsto (m \mapsto f(l,m)))$$

$$((l,m)\mapsto (\psi(l))(m)) \longleftarrow\!\shortmid \ \psi \quad \checkmark$$

Rque : Formellement, l'opération $L \mapsto L\otimes_A M$ apparaît comme un "adjoint à gauche" de l'opération $N \longmapsto \mathcal{L}_A(M,N)$.

1.2 Propriétés de base

Soit A un anneau com.

<u>Prop</u> : Soient L, M, N des A-modules. On a des isom. can.

a) $A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$, $a \otimes m \longmapsto am$

b) $L \otimes_A (M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} (L \otimes_A M) \otimes_A N$, $l \otimes (m \otimes n) \mapsto l \otimes (m \otimes n)$

c) $L \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A L$, $m \otimes l \mapsto l \otimes m$

d) $(L \oplus M) \otimes N \xrightarrow{\sim} (L \otimes N) \oplus (M \otimes N)$, $(l, m) \otimes n \mapsto (l \otimes n, m \otimes n)$

<u>Dém.</u> : a) L'appl. $\tilde{\varphi} : A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto am$ est <u>bilinéaire</u> (car M est un A-module). Donc la règle $a \otimes m \mapsto am$ définit bien une appl. <u>A-linéaire</u> $\varphi : A \otimes_A M \to M$. Soit

$$\psi : M \longrightarrow A \otimes_A M, \quad m \longmapsto 1 \otimes m.$$

Alors ψ est A-linéaire, on a $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_M$ et

$$\psi\varphi(a \otimes m) = \psi(am) = 1 \otimes am = a \otimes m$$

pour tous $a \in A$ et $m \in M$. Comme les tenseurs décomposables engendrent $A \otimes M$, il s'ensuit que $\psi\varphi = \mathbb{1}_{A \otimes_A M}$.

b), c), d) : Dans chaque cas, il faut vérifier que la règle donnée définit bien une appl. A-lin. et exhiber son inverse. Exercice ! ✓

Exemple : Posons $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous avons

$$C_6 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{15} \cong (C_2 \oplus C_3) \otimes_{\mathbb{Z}} (C_3 \oplus C_5)$$

$$\underset{d)}{\cong} \cancel{C_2 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3} \oplus \cancel{C_2 \otimes_{\mathbb{Z}} C_5} \oplus C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3 \oplus \cancel{C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_5}$$

$$= C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3 \underset{!}{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \underset{a)}{=} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

<u>Corollaire</u> : a) Si L et F sont libres de bases $l_1, \dots, l_p$ et $f_1, \dots, f_q$, alors $L \otimes_A F$ est libre de base $l_i \otimes f_j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. En particulier,

$$rg(L \otimes_A F) = (rg L) \cdot (rg F)$$

b) Si L est libre de base $l_1, \dots, l_p$ et M qcq, alors

$$M \oplus \dots \oplus M \xrightarrow{\sim} L \otimes_A M$$
$$(m_1, \dots, m_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} l_i \otimes m_i$$

<u>Dém.</u> : La donnée de la base $l_1, \dots, l_p$ équivaut à la donnée de l'isomorphisme $A^p \xrightarrow{\sim} L$, $(a_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} a_i l_i$.

On a $\quad L \otimes_A F \xleftarrow{\sim} A^p \otimes_A A^q \xleftarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i=1}^{p} A\right) \otimes_A A^q \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{p} (A \otimes_A A^q) \xleftarrow{\sim} A^{pq}$.

De même pour b). ✓

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules.

<u>Rappel</u> : $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i = 0 \text{ pour presque tout } i \in I\}$.

La famille des injections can. $\iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ est <u>universelle</u> : pour toute famille d'appl. lin. $f_j : M_j \longrightarrow N$, il existe une unique appl. lin. $f : \bigoplus_{i \in I} M \longrightarrow N$ t.q. $f \circ \iota_j = f_j$, $\forall j$ (à savoir : $f((m_i)) = \sum_{i \in I} f(m_i)$).

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{j''} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & M_{j'} \arrow[r] \arrow[drr, bend left] & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[dr, dashed] & \\
M_j \arrow[urr] \arrow[rrr, bend right] & & & N
\end{tikzcd}$$

<u>Prop.</u> : Soit N un A-module. On a un isom. can.

$$\varphi : \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N), \quad (m_i) \otimes n \longmapsto (m_i \otimes n).$$

Dém. : On vérifie que φ est bien définie et on exhibe un inverse, grâce à la propriété universelle de $\bigoplus_{i\in I} M_i$. ✓

<u>Cor.</u> Si L et F sont libres de bases $(l_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$, alors $L\otimes_A F$ est libre de base $(l_i\otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

<u>Dém.</u> : Comme dans le cas de rang fini, grâce à la prop. ✓

<u>Exemple</u> : $A[X]$ est libre de base X^i, $i\in\mathbb{N}$.
Donc $A[X]\otimes_A A[X]$ est libre de base $X^i\otimes X^j$, $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, et l'appl. $A[X]\otimes_A A[X] \longrightarrow A[X,Y]$, $X^i\otimes X^j \longmapsto X^iY^j$ est un isomorphisme.

<u>Rque</u> : On a une appl. can.
$$\Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)\otimes_A N \longrightarrow \prod_{i\in I}(M_i\otimes_A N)$$
mais elle n'est ni surjective ni injective en général.

<u>Lemme</u> : Si L, M sont des A-modules annulés par un idéal I de A, alors on a l'isom. can.
$$\varphi : L\otimes_A M \xrightarrow{\sim} L\otimes_{A/I} M, \quad l\otimes m \longmapsto l\otimes m.$$

Dém. : $L\otimes_A M$ est encore annulé par I. L'appl.
$$L\times M \longrightarrow L\otimes_A M, \quad (l,m)\longmapsto l\otimes m$$
est A/I-bilinéaire et induit un inverse de φ. ✓

Exemple : $A/I \otimes_A A/I \simeq A/I\otimes_{A/I} A/I \simeq A/I$

<u>Prop.</u> : Soient L et M des A-modules libres de bases $e_1, \dots, e_p$ et $f_1, \dots, f_q$. Soient $\varphi : L \to L$ et $\psi : M \to M$ des endomorphismes de matrices $B \in M_p(A)$ et $C \in M_q(A)$. Alors la matrice de

$$\varphi \otimes \psi : L \otimes_A M \longrightarrow L \otimes_A M$$

dans la base

$$e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_2, \dots, e_p \otimes f_q \quad \text{(ordre lex.)}$$

resp. $$e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_2, \dots, e_p \otimes f_q \quad \text{(ordre antilex.)}$$

est
$$\begin{bmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1p}C \\ b_{21}C & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ b_{p1}C & \cdots & b_{pp}C \end{bmatrix} \text{(1a)} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} Bc_{11} & \cdots & Bc_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ Bc_{q1} & & Bc_{qq} \end{bmatrix} \text{(1b)} \qquad (1)$$

On a

$$tr(\varphi \otimes \psi) = (tr\varphi)(tr\psi) \qquad (2)$$
$$det(\varphi \otimes \psi) = (det\varphi)^{rg M}(det\psi)^{rg L}. \qquad (3)$$

<u>Dém.</u> : (1) On a

$$(\varphi \otimes \psi)(e_j \otimes f_s) = \varphi(e_j) \otimes \psi(f_s) = \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ij} e_i\right) \otimes \left(\sum_{r=1}^{q} c_{rs} f_r\right)$$
$$= \sum_{i,r} b_{ij} c_{rs} (e_i \otimes f_r) \quad ✓$$

(2) On a $$tr(\varphi \otimes \psi) = \sum_{i=1}^{p} b_{ii}\, tr(C) = tr(B)\,tr(C) = tr(\varphi)\,tr(\psi)$$

(3) $$det(\varphi \otimes \psi) = \underset{(1b)}{det(\varphi \otimes 1\!\!1_M)}\ \underset{(1a)}{det(1\!\!1_L \otimes \psi)} \underset{\uparrow \text{ 2 bases dist. !}}{=} det(\varphi)^{rg M} (det \psi)^{rg L}. \quad ✓$$

1.3 Produit tensoriel par un dual

Soient A un anneau com. et L, M des A-modules.

Soit $L^\vee = \mathcal{L}(L, A)$

Prop. : On a une appl. lin. can.

$$\varphi : L^\vee \otimes_A M \longrightarrow \mathcal{L}(L, M), \ f \otimes m \longmapsto (l \mapsto f(l).m)$$

Elle est bijective si

a) L est libre de type fini

ou si b) M est libre et L de type fini

Rques : Supposons que A est un corps com. .

1) Les images par φ des tenseurs purs sont les appl. lin. de rang 1.
2) L'image de φ est le ss-esp. des appl. lin. de rang fini.
3) Si L et M sont de dim. infinie, l'appl.

$$\underbrace{\mathcal{L}(L, A)}_{L^\vee} \otimes_A \underbrace{\mathcal{L}(A, M)}_{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{L \otimes_A A}_{L}, \underbrace{A \otimes_A M}_{M})$$

$$f \otimes g \longmapsto f \tilde{\otimes} g$$

n'est pas surjective. ⌋

Dém. de la prop. : φ est bien défini car

$$L^\vee \times M \longrightarrow \mathcal{L}(L, M), \ (f, m) \longmapsto (l \mapsto f(l).m)$$

est bilinéaire.

a) Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de L et $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$ la base duale.

Alors $\psi : \mathcal{L}(L, M) \to L^\vee \otimes_A M, \ g \longmapsto \sum e_i^\vee \otimes g(e_i)$

est inverse de φ.

b) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de M et, pour $j \in I$, soit $e_j^\vee \in M^\vee$ t.q. $e_j^\vee(e_i) = \delta_{ij}$, $i,j \in I$. Alors

$$\psi : \mathcal{L}(L,M) \longrightarrow L^\vee \otimes_A M,\ g \longmapsto \sum_{j\in I} (e_j^\vee \circ g) \otimes e_j$$

est bien définie (L de type fini $\Rightarrow$ $e_j^\vee \circ g = 0$ pour presque tout $j \in I$) et inverse de φ. ✓

1.4 Produit tensoriel et suites exactes

Soient $L \xrightarrow{u} M$ une appl. A-lin. et X un A-module.

On étudie

$$u \otimes_A 1\!\!1_X : L \otimes_A X \longrightarrow M \otimes_A X.$$

Constat 1: u injectif $\not\Rightarrow$ $u \otimes_A 1\!\!1_X$ injectif.

Exemple : $\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$

est injective, mais $u \otimes_{\mathbb{Z}} 1\!\!1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ est nulle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{(2\cdot) \otimes 1\!\!1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \wr & & \wr \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad 0 \quad} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

Constat 2: u surjectif $\Rightarrow$ $u \otimes_A 1\!\!1_X$ surj. (relever les tenseurs purs !)

On a mieux:

Prop. : Soit $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$ une suite exacte

(i.e. v surj. et $\ker v = \operatorname{Im} u$). Alors

$$L \otimes_A X \xrightarrow{u \otimes 1\!\!1_X} M \otimes_A X \xrightarrow{v \otimes 1\!\!1_X} N \otimes_A X \longrightarrow 0$$

est exacte.

Dém. : On a $(v \otimes 1\!\!1_X) \circ (u \otimes 1\!\!1_X) = (v \circ u) \otimes 1\!\!1_X = 0$. Donc $v \otimes 1\!\!1_X$ induit une appl. A-lin.

$$\varphi : M \otimes_A X / \operatorname{Im}(u \otimes 1\!\!1_X) \longrightarrow N \otimes_A X.$$

Il suffit de montrer que c'est un isom. On construit un inverse induit par une appl. bilin.

$$b : N \times X \longrightarrow M \otimes_A X / \operatorname{Im}(u \otimes 1\!\!1_X).$$

Pour $(n,x) \in N \times X$, on choisit m t.q. $v(m)=n$ et on pose

$$b(n,x) := \text{classe de } m\otimes x \text{ dans } M\underset{A}{\otimes} X / \mathrm{Im}(u\otimes 1_X).$$

On vérifie que b est bien défini et bilinéaire et induit un inverse de φ. ✓

Corollaire : Soient des suites exactes

$$L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

$$X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$$

Alors la suite

$$(L\underset{A}{\otimes} Y) \oplus (M \underset{A}{\otimes} X) \xrightarrow{[i\otimes 1,\, 1\otimes j]} M\underset{A}{\otimes} Y \xrightarrow{p\otimes q} N\underset{A}{\otimes} Z \longrightarrow 0$$

est exacte.

Dém. : Les lignes et les colonnes du diagramme suivant sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
L\otimes X \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes X \arrow[r, "p\otimes 1_X"] \arrow[d, "1\otimes j"] & N\otimes X \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes j"] & 0 \\
L\otimes Y \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d] & M\otimes Y \arrow[r, "p\otimes 1"] \arrow[d] \arrow[dr, "p\otimes q"] & N\otimes Y \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes q"] & 0 \\
L\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & N\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

1) $p\otimes q$ est surjectif car composé des surjections $1\otimes q$ et $p\otimes 1$.

2) $(p\otimes q)\circ[i\otimes 1,\, 1\otimes j] = [pi\otimes q,\, p\otimes qj] = [0,0] = 0.$

Donc $\mathrm{Ker}(p\otimes q) \supseteq \mathrm{Im}[i\otimes 1,\, 1\otimes j]$

3) Une "chasse au lion" donne l'autre inclusion !

$$\begin{tikzcd}
 & & ④\ t \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & z\ ③ \arrow[d, mapsto, "1\otimes j"] \\
⑤\ u \arrow[r, mapsto, "i\otimes 1"] & x-x' & x' \quad x \arrow[rr, mapsto, "p\otimes 1"] \arrow[drr, mapsto, "p\otimes q"'] & & y\ ② \arrow[d, mapsto] \\
 & & & & 0\ ①
\end{tikzcd}$$

$$x = x' + (x-x') = (1\otimes j)(t) + (i\otimes 1)(u)$$

✓

Corollaire : a) Pour des ss-modules $L' \subseteq L$ et $M' \subseteq M$, on a

$$L/L' \otimes_A M/M' \simeq L \otimes_A M \Big/ \big((\text{image de } L \otimes_A M') + (\text{image de } L' \otimes_A M) \big)$$

b) Pour des idéaux I, J de A, on a

$$A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$$

c) On a $\quad A/I \otimes_A M \simeq M/IM.$

Dém. : On utilise les suites exactes

$$L' \longrightarrow L \longrightarrow L/L' \longrightarrow 0$$

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

1.5 Restriction et extension des scalaires

Soient A, B des anneaux (com., avec 1).
Soit $g : A \longrightarrow B$ un morph. d'anneaux
(p.ex. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, ...)

Soit M un B-module.

Constat : Le groupe abélien M devient un A-module pour la mult.

$$a.m := g(a)m \quad , \quad a \in A, m \in M.$$

Déf : On appelle restriction de M à A (ou "le long de g")
le A-module $M|_A$ (ou $_gM$) obtenu ainsi.

Rque : En particulier, $B|_A$ est un A-module.

Exemple : V un $\mathbb{C}$-esp. vect. $\Rightarrow$ $V|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$-esp. vect. ss-jacent.

Idée : On "oublie" une partie de la structure donnée.

Soit M un A-module.

Constat : $B\otimes_A M$ devient un B-module via
$$b'(b\otimes m) := (b'b)\otimes m.$$

Déf : $M^B := B\otimes_A M$ est le module obtenu par extension des scalaires de A à B.

Exemples : 1) V un $\mathbb{R}$-esp. vect.
$$\Rightarrow V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V \text{ son "complexifié"}$$

2) M un $\mathbb{Z}$-module $\Rightarrow M^{\mathbb{Q}} = M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$-esp. vect.

p.ex. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0 \quad (n\geq 1)$.

Lemme : M libre de base $e_1,\dots,e_p$ sur A
$\Rightarrow B\otimes_A M$ libre de base $1\otimes e_1,\dots,1\otimes e_p$ sur B.

Dém : On a $A^p \xrightarrow{\sim} M$ (par $e_1,\dots,e_p$).

Donc $B^p \xrightarrow{\sim} B\otimes_A A^p \xrightarrow{\sim} B\otimes_A M$ et l'image de la base can. est $1\otimes e_1,\dots,1\otimes e_p$. ✓

Rques : 1) Quel est le module $(B\otimes_A M)|_A$?

Réponse : $(B\otimes_A M)|_A = (B|_A)\otimes_A M$ (!)

2) L'extension des scalaires ne préserve pas l'injectivité :
$$(\mathbb{Z}\xrightarrow{\cdot 2}\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\xrightarrow{0}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

<u>Lemme</u> : M libre de base $e_1, \dots, e_p$ sur A.

a) $M^B = B \underset{A}{\otimes} M$ est libre de base $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$ sur B.

b) $\varphi : M \to M$ endom. de matrice $C \in M_p(A)$ dans $e_1, \dots, e_p$

$\Rightarrow \varphi^B : M^B \to M^B$ endom. de matrice

$\rho(C) := (\rho(c_{ij}))$ dans $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$.

<u>Exemple</u> : $C \in M_p(\mathbb{R})$ matrice d'un endom. $\varphi : V \to V$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de base $e_1, \dots, e_p$

$\Rightarrow C \in M_p(\mathbb{C})$ est la matrice de l'endom. complexifié $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ dans la base $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$.

<u>Dém. du lemme</u> : a) On a $A^p \xrightarrow{\sim} M$ par $e_1, \dots, e_p$.

Donc $B^p = B \underset{A}{\otimes} A^p \xrightarrow{\sim} B \underset{A}{\otimes} M$ par $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$

b) On a $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} e_i$, $1 \leq j \leq p$. Donc

$$\varphi^B(1\otimes e_j) = (\mathbb{1}\otimes\varphi)(1\otimes e_j) = \sum_{i=1}^{p} 1\otimes c_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{p} \rho(c_{ij})\otimes e_i = \sum_{i=1}^{p} \rho(c_{ij})(1\otimes e_i).$$

<u>Rques</u> : 1) Quel est le module $(B \underset{A}{\otimes} M)|_A$? Réponse : $(B|_A) \underset{A}{\otimes} M$!

2) L'extension des scalaires ne préserve pas l'injectivité.

$\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $(2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Mais si $u : L \to M$ est injectif et $B|_A$ est libre (p.ex.), alors $u^B : L^B \to M^B$ est injectif.

<u>Lemme</u> (adjonction) : Soit N un B-module. On a des bijections canoniques :

$$\mathcal{L}_B(M^B, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M, N|_A)$$

$$f \longmapsto (m \mapsto f(1\otimes m))$$

$$(b\otimes m \mapsto b\,g(m)) \longleftarrow g$$

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[d, mapsto] & M \arrow[r, "\forall f \text{ A-lin.}"] \arrow[d] & N \\
1\otimes m & M^B = B \underset{A}{\otimes} M \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"', "\text{B-lin.}"] &
\end{tikzcd}$$

2. Algèbres tensorielle, symétrique, extérieure

2.1 Applications multilinéaires

Soient A un anneau com., $p \geq 1$ un entier, $N_1, \dots, N_p$ des A-mod.

Déf : Soit M un A-module. Une appl. $f : N_1 \times \dots \times N_p \longrightarrow M$ est multilinéaire si, pour tout $1 \leq i \leq p$ et tous $n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_p$, $n_j \in N_j$, l'appl.

$$N_i \longrightarrow M, \; n \longmapsto f(n_1, \dots, n_{i-1}, n, n_{i+1}, \dots, n_p)$$

est A-linéaire.

Exemple : $N_1 \times N_2 \longrightarrow M$ est multilin. ssi elle est bilin. (!)

Déf. :

$$\bigotimes_{i=1}^{p} N_i := \begin{cases} N_1 & , p = 1 \\ N_1 \otimes_A \left(\bigotimes_{i=2}^{p} N_i\right) & , p \geq 2. \end{cases}$$

Lemme : a) L'appl. can.

$$\pi : N_1 \times \dots \times N_p \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{p} N_i, \quad (n_1, \dots, n_p) \longmapsto n_1 \otimes \dots \otimes n_p$$

est multilinéaire et universelle parmi les appl. multilin. définies sur $N_1 \times \dots \times N_p$.

b) Pour tout $1 \leq j < p$, on a un isom. can.

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{j} N_i\right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i=j+1}^{p} N_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^{p} N_i .$$

c) Si N_i est libre sur $(e_{ij})_{j \in J_i}$, alors $\bigotimes_{i=1}^{p} N_i$ est libre sur les $e_{1j_1} \otimes \dots \otimes e_{pj_p}$, $(j_1, \dots, j_p) \in \prod_{i=1}^{p} J_i$.

Dém. : b) par assoc. de $\otimes_A$, c) par le cor. 1.2, a) $\mathcal{ML} = \{$appl. multilin.$\}$

$$\mathcal{ML}(N_1 \times \dots \times N_p, M) \underset{!}{\simeq} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{ML}(N_2 \times \dots \times N_p, M)) \underset{réc.}{\simeq} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{L}(\bigotimes_{i=2}^{p} N_i, M))$$

$$\underset{p.u., \otimes}{\simeq} \mathcal{L}(N_1 \otimes_A \bigotimes_{i=2}^{p} N_i, M). \quad ✓$$

2.2 Anneaux gradués :

Soit R un anneau (non néc. com.).

Déf : Une graduation de R est une décomposition

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n \quad (*)$$

du groupe abélien R telle que $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ pour tous $i,j \in \mathbb{N}$. Les éléments $x \in R_i$ sont dits homogènes de degré i et on écrit $\deg(x) = i$.

Déf : Si R est une algèbre sur un anneau com. A, alors $(*)$ est une graduation d'algèbre si les R_n sont des A-ss-modules.

Exemple : $A[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} AX^n$ est une graduation de A-alg.

$$A[X_1, X_2] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{i+j=n} A X_1^i X_2^j \Big)$$

Soit R un anneau gradué (i.e. muni d'une graduation).

Déf : Un idéal (bilatère) $I \lhd R$ est homogène si on a

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I \cap R_n)$$

Rque : Un idéal est homogène s'il est engendré par des éléments homogènes (et réciproquement).

Déf : Un morph. $f : R \longrightarrow S$ entre anneaux gradués est homogène si $f(R_n) \subseteq S_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Lemme : Soient $I \lhd R$ un idéal gradué et $\pi : R \longrightarrow R/I$ la projection. Alors $R/I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi(R_n)$ est une graduation et $\pi : R \longrightarrow R/I$ est homogène.

Dém. : On a $R/I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n / \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n/I_n$. ✓

2.3 L'algèbre tensorielle

Soit M un module sur un anneau com. A.

Posons $T^0(M) = A$ et $T^i(M) = M^{\otimes i}_A := \bigotimes_{j=1}^{i}{}_A M$.

Déf : L'algèbre tensorielle sur M est

$$T(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M)$$

munie de la mult. donnée par

$$T^i(M) \times T^j(M) \longrightarrow T^{i+j}(M)$$
$$(m_1 \otimes \dots \otimes m_i \,,\, m_1' \otimes \dots \otimes m_j') \longmapsto m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes m_1' \otimes \dots \otimes m_j' .$$

Rques : 1) La mult. est bien définie (2.1 a), associative et admet 1_A pour unité. $T(M)$ est une A-algèbre graduée (non com. en général) engendrée par $M \hookrightarrow T(M)$.

2) Si M est libre de base $(e_i)_{i\in I}$, alors le A-module $T^n(M)$ est libre de base les "mots" (2.1c)

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n} \,,\quad n\in\mathbb{N},\ (i_1,\dots,i_n)\in I^n,$$

et la mult. est induite par la concaténation des mots.

Notation : $A\langle X_1,\dots,X_n\rangle := T(AX_1 \oplus \dots \oplus AX_n)$ = alg. de pol. non com.

Lemme (propr. univ.) : L'inclusion can : $M \to T(M)$ est le morph. universel vers une A-algèbre, i.e. pour toute A-algèbre B, pour tout morph. de A-modules $f : M \to B$, il existe un unique morph. de A-algèbres $\tilde{f} : T(M) \to B$ t.q. $\tilde{f} \circ \mathrm{can} = f$.

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(T(M), B) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M, B_{mod})$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f"', "A\text{-lin.}"] \arrow[d, "can"'] & B \\ T(M) \arrow[ur, bend right, "\exists ! \tilde{f}", "A\text{-mult.}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Dém.</u> : $\tilde{f}$ est déterminée par $\tilde{f}\,|\,T^n(M)$. On doit avoir : $\tilde{f}(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = \tilde{f}(m_1 \cdots m_n)$

$$= f(m_1) \cdots f(m_n) \qquad (*)$$

D'où l'unicité. Pour l'existence, on définit $\tilde{f}$ par $(*)$, grâce au Lemme 2.1 a). ✓

<u>Corollaire</u> (fonctorialité) : Pour toute appl. A-lin. $f : M \longrightarrow N$, il existe un unique morph. de A-alg.

$T(f) : T(M) \longrightarrow T(N)$ t.q. $T(f) \circ \iota_M = \iota_N \circ f$.

On a $T(Id_M) = Id_{T(M)}$ et $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

Dém. :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_M"'] \arrow[dr] & N \arrow[d, "\iota_N"] \\ T(M) \arrow[r, dashed, "T(f)"'] & T(N) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ T(L) \arrow[r, "T(g)"'] \arrow[rr, bend right, "T(f) \circ T(g)"'] & T(M) \arrow[r, "T(f)"'] & T(N) \end{tikzcd}$$

. ✓

2.4 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Soient A un anneau com., M un A-module, $n \geq 1$ un entier et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique. On a une action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur $M_A^{\otimes n}$:

$$\sigma(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma^{-1}(n)}$$

Γ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \otimes m_4$

$m_4 \otimes m_1 \otimes m_2 \otimes m_3$

Déf : $t \in T^n(M)$ est

symétrique $:\Longleftrightarrow \sigma t = t\ ,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

antisymétrique $:\Longleftrightarrow \sigma t = \mathrm{sgn}(\sigma)\, t\ ,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\mathcal{S}^n(M) = \{$tenseurs sym. dans $T^n(M)\}$

$\mathcal{A}^n(M) = \{$tenseurs antisym. dans $T^n(M)\}$

Lemme : Soit $P_n : T^nM \longrightarrow T^nM,\ t \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t$

Alors $\mathrm{Im}\, P_n \subseteq \mathcal{S}^n(M)$ et si $1/n! \in A$, alors $\frac{1}{n!} P_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{S}^n(M)$.

Dém. : Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\tau P_n(t) = \tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \tau\sigma t = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sigma' t = P_n t.$$

Donc $\mathrm{Im}\, P_n \subseteq \mathcal{S}^n$. Pour $t \in \mathcal{S}^n$, on a $\sigma t = t,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, et donc

$$P_n t = (n!)\, t \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{1}{n!} P_n\right)(t) = t.$$

Il s'ensuit $\frac{1}{n!} P_n$ est idempotent et d'image $\mathcal{S}^n(M)$. ✓

Lemme : Soit $Q_n : T^nM \longrightarrow T^nM,\ t \longmapsto \sum_{t \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma t.$

Alors $\mathrm{Im}\, Q_n \subseteq \mathcal{A}^n(M)$ et si $1/n! \in A$, alors $1/n!\, Q_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{A}^n(M)$.

Dém. : analogue. ✓

2.5 Algèbre symétrique

A un anneau com., M un A-module.

Déf: Pour $n \geq 1$:

$I_n :=$ ss-module de $T^n(M)$ engendré par les

$$m_1 \otimes \dots \otimes m_n - \sigma.(m_1 \otimes \dots \otimes m_n), \ \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

$$I_0 := 0.$$

$$I := \bigoplus_{n \geq 0} I_n \subseteq T(M).$$

Rques: 1) I est un idéal bilatère de $T(M)$ (car stable par mult. à gauche et à droite par les $m \in M$).

2) I est engendré par les $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, $m_1, m_2 \in M$. (car $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions d'éléments voisins).

Déf: L'algèbre symétrique sur M est le quotient $S(M) := T(M)/I$.

Rques: 1) $S(M)$ est une algèbre commutative, graduée. On a

$$A = S^0(M) \text{ et } M = S^1(M).$$

2) L'inclusion $M \xrightarrow[\text{can}]{} S(M)$ est universelle parmi les appl. A-lin. de M dans une algèbre commutative :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\forall f \ A\text{-lin.}"] \arrow[d] & B \ \ A\text{-alg. com.} \\
T(M) \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[d] & \\
S(M) \arrow[uur, dashed, "\exists 1\, \tilde{f} \text{ morph. de } A\text{-alg.}"'] &
\end{tikzcd}$$

f_1 morph. d'alg.
$f_1(I) = 0$ car B com.

Thm: Si M est libre de base $e_1, \dots, e_n$, alors $S(M)$ est libre de base $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_n^{i_n}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.

<u>Rques</u>: 1) On a donc un isom. d'alg.

$$S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n], \quad e_i \longmapsto X_i.$$

2) Pour la dém., on se servira du produit tensoriel de A-algèbres :

<u>Lemme et déf</u> : Soient B et C des A-algèbres. <u>L'algèbre produit tensoriel</u> est le A-module $B \otimes_A C$ muni de l'unique mult. A-bilinéaire t.q.

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc', \quad \forall b, b' \in B, \forall c, c' \in C.$$

<u>Rques</u> : 1) On a des morph. d'algèbres canoniques

$$\varphi_1 : B \longrightarrow B \otimes C, \quad b \longmapsto b \otimes 1_C$$
$$\varphi_2 : C \longrightarrow B \otimes C, \quad c \longmapsto 1_B \otimes c$$

et leurs images commutent :

$$(b \otimes 1)(1 \otimes c) = b \otimes c = (1 \otimes c)(b \otimes 1).$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ B \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

$f_1(b) f_2(c) = f_2(c) f_1(b)$

2) <u>Propriété univ.</u> : Pour toute A-alg. D et tous morph. de A-alg.

$$f_1 : B \longrightarrow D \quad \text{et} \quad f_2 : C \longrightarrow D,$$

t.q. $f_1(b) f_2(c) = f_2(c) f_1(b)$, il existe un unique morph. de A-alg. $f : B \otimes_A C \longrightarrow D$ t.q. $f \circ \varphi_1 = f_1$ et $f \circ \varphi_2 = f_2$. On a $f(b \otimes c) = f_1(b) f_2(c)$. Exo !

3) Si B et C sont commutatives, alors $B \otimes_A C$ est commutative.

<u>Prop</u> : On a un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$\varphi : S(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{\sim} S(M_1) \otimes_A S(M_2)$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2$$

Dém. : Existence de φ : propr. univ. de $S(M_1 \oplus M_2)$.

Existence d'un inverse : les

$$M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow S(M_1 \oplus M_2)$$

induisent

$$S(M_i) \xrightarrow[\psi_i]{} S(M_1 \oplus M_2) \ , \ i = 1,2 ,$$

qui induisent $\psi : S(M_1) \otimes_A S(M_2) \longrightarrow S(M_1 \oplus M_2)$. ✓

<u>Dém. du thm</u> : A montrer : $S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n]$, $e_i \mapsto X_i$.

$n = 1$: $T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A e_1^i$, $I = 0$, $S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1]$.

$n \geq 2$: $M = Ae_1 \oplus M'$ où $M' = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

$$S(Ae_1 \oplus M') \xrightarrow{\sim} S(Ae_1) \otimes_A S(M') \xrightarrow{\sim} A[X_1] \otimes_A A[X_2, \dots, X_n]$$
$$\xrightarrow{\sim} A[X_1, X_2, \dots, X_n]. \ ✓$$

<u>Lien avec les tenseurs symétriques</u>

Lemme : Soit $n \geq 1$. Supposons que $1/n! \in A$.

Alors $T^n(M) = \mathcal{S}_n(M) \oplus I_n$ et $S^n(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n(M)$.

Dém. : La "moyenne" $p_n : T^n(M) \to T^n(M)$, $x \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma x$

est un projecteur sur $\mathcal{S}_n(M)$ et $I_n \subseteq \operatorname{Ker}(p_n)$. Or dans le quotient $T^n(M) / I_n = S^n(M)$, p_n induit l'identité. Donc $\operatorname{Ker}(p_n) \subseteq I_n$. ✓

2.6 Algèbre extérieure

A anneau com., M un A-module.

Déf : Pour $n \geq 2$, soit $J_n \subseteq T^n(M)$ le ss-module eng. par les $m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ t.q. $m_i = m_{i+1}$ pour un $1 \leq i < n$.

Soient $J_0 = 0$, $J_1 = 0$ et $J = \bigoplus_{n \geq 0} J^n$.

Rque : $J \subseteq T(M)$ est un idéal bilatère. Il est engendré par les $m \otimes m$, $m \in M$.

Déf : L'<u>algèbre extérieure</u> sur M est $\Lambda(M) := T(M)/J$.

On note $\wedge$ le produit dans $\Lambda(M)$.

Exemple : M libre de rang $1 \Rightarrow T(M) \simeq A[X]$, $\Lambda(M) \simeq A[X]/(X^2)$.
"algèbre des nombres duaux"

Rques : 1) L'appl. $can : M \longrightarrow \Lambda(M)$ est A-linéaire et vérifie $(can(m))^2 = 0$ pour tous $m \in M$. Elle est universelle pour ces propriétés. Tout $g : L \longrightarrow M$ A-linéaire induit $\Lambda(g) : \Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(M)$ ...

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f\ A\text{-lin.}", "f(m)^2=0"'] \arrow[d, "can"'] & B \ (A\text{-alg.}) \\ \Lambda(M) \arrow[ur, dashed, "\exists 1 \tilde{f}"', "\text{morph. } A\text{-alg.}"] & \end{tikzcd}$$

2) $\Lambda(M)$ est graduée et $\pi : T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ homogène.
On a $A \xrightarrow{\sim} \Lambda^0(M)$, $M \xrightarrow{\sim} \Lambda^1(M)$.

3) Pour $m_1, m_2 \in M$, on a $m_1 \wedge m_2 = - m_1 \wedge m_2$
car $(m_1 + m_2) \wedge (m_1 + m_2) = 0$.

4) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $m_1, \dots, m_n \in M$: $m_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge m_{\sigma(n)} = sgn(\sigma)\, m_1 \wedge \dots \wedge m_n$.
car $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpos. d'éléments voisins.

Exercice : $\Lambda(M)$ est une <u>algèbre alternée</u>, i.e. pour $x, y \in \Lambda(M)$ homog. de degrés impairs, on a $x \wedge y = - y \wedge x$ et $x^2 = 0$.

Thm: Si M est libre de base $e_1, \dots, e_n$, alors $\Lambda^p(M)$ est libre de base

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, \; i_j \in \{1, \dots, n\}, \; p \geq 1.$$

En particulier, $\Lambda^n(M)$ est libre de rang 1 et $\Lambda^p(M) = 0$ pour $p > n$.

Rque : Pour la dém., on se sert du produit tensoriel gradué :

Lemme et déf. : Soient B et C des A-algèbres graduées. Le module gradué $B \otimes_A C$ avec
$$(B \otimes_A C)_n = \bigoplus_{p+q=n} (B_p \otimes_A C_q)$$
devient une alg. graduée pour la mult. donnée par
$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = (-1)^{(\deg c)\cdot(\deg b')}\, bb' \otimes cc'$$
(transposition d'éléments impairs $\Downarrow$ signe)

pour tous $b, b' \in B$, $c, c' \in C$ homogènes. On l'appelle produit tensoriel gradué et on le note $B \overset{g}{\otimes}_A C$.

Dém. : A vérifier surtout : la mult. est associative ! Exercice ! ✓

Rques : 1) Le produit tens. grad. de deux alg. alternées est alterné !

2) On a des morph. d'alg.
$$\varphi_1 : B \longrightarrow B \overset{g}{\otimes}_A C, \quad b \longmapsto b \otimes 1_C$$
$$\varphi_2 : C \longrightarrow B \overset{g}{\otimes}_A C, \quad c \longmapsto 1_B \otimes c$$
qui vérifient
$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_2(c) = (-1)^{(\deg b)(\deg c)} \varphi_2(c)\varphi_1(b), \quad b, c \text{ homog.},$$
(anticommutation)

et qui sont universels pour cette propriété :

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\
B \arrow[r, "f_1"'] \arrow[rr, bend right, "f_1"'] & B \overset{g}{\otimes}_A C \arrow[r, dashed, "f"] & D
\end{tikzcd}$$
D A-alg.

$\forall f_1, f_2$ qui anti-commutent $\exists 1\, f$ morph. d'algèbres

<u>Prop.</u> : Soient M_1, M_2 des A-modules. On a un isom. can. homog.

$$\varphi : \Lambda(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{\sim} \Lambda(M_1) \overset{g}{\otimes} \Lambda(M_2)$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2 .$$

<u>Dém.</u> : φ existe grâce à la propr. univ. de $\Lambda(M_1 \oplus M_2)$.

Les appl. $\quad \psi_i : M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \Lambda(M_1 \oplus M_2)$

donnent un inverse ψ, grâce à la propr. univ. de $\overset{g}{\underset{A}{\otimes}}$. ✓

Dém. du thm. : $e_1, \dots, e_n$ base de $M \overset{?}{\Longrightarrow} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ base de $\Lambda^p(M)$.
$i_1 < \dots < i_p$

$n = 1$: $\Lambda(M) \simeq A[X]/(X^2)$ ✓

$n > 1$: $M = Ae_1 \oplus M'$, $M' = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

$$\Lambda(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda(Ae_1) \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} \Lambda(M') \xleftarrow{\sim} (A \underset{A}{\otimes} \Lambda(M')) \oplus (Ae_1 \otimes \Lambda(M'))$$

$$\Lambda^p(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda^{p-1}(M') \oplus \Lambda^p(M')$$
$$e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \longleftarrow (e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, 0)$$
$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \longleftarrow (0, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}). \quad ✓$$

<u>2.7 Déterminant</u>

A anneau com., L un A-module libre de rang n.

Rque : $\Lambda^n(L)$ libre de rang 1 $\Longrightarrow$ ses endom. sont des <u>homothéties</u>.

<u>Déf</u> : Le <u>déterminant</u> $\det(f)$ d'un endom. $f : L \to L$ est l'unique scalaire t.q. $\Lambda^n(f)(x) = (\det f) . x$, $\forall x \in \Lambda^n(L)$.

<u>Rques</u> : 1) $\Lambda^n(f \circ g) = \Lambda^n(f) \circ \Lambda^n(g) \Longrightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

2) $e_1, \dots, e_n$ une base de L, $B \in M_n(A)$ matrice de f

$$\Longrightarrow \Lambda^n(f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)$$
$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} (b_{i_1,1} e_{i_1}) \wedge (b_{i_2,2} e_{i_2}) \wedge \dots \wedge (b_{i_n,n} e_{i_n})$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \, \mathrm{sgn}(\sigma)}_{= \det B} \, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

__But :__ Calculer également les matrices des $\Lambda^k(f) : \Lambda^k(L) \to \Lambda^k(L)$ pour $2 \leq k < n$ ($\rightsquigarrow$ autres coeff. du pol. car. de f).

__Notations:__ Pour $k \geq 0$: $\mathcal{P}_k$ = {parties à k éléments de $\{1, \dots, n\}$}.

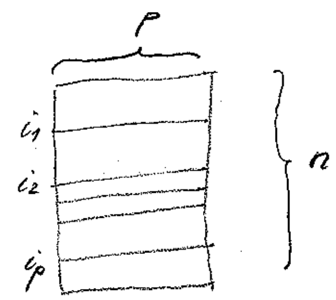
Pour $I \in \mathcal{P}_k$ d'éléments $i_1 < \dots < i_k$: $e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$.

Pour $X \in M_{p \times q}(A)$ et $I \subseteq \{1, \dots, p\}$, $J \subseteq \{1, \dots, q\}$:

$$X_{I,J} := \text{matrice extraite } (x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}.$$

__Lemme :__ Soient $X \in M_{n \times p}(A)$ et $x_j := \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \in L$, $1 \leq j \leq p$.

Alors $$x_1 \wedge \dots \wedge x_p = \sum_{I \in \mathcal{P}_p} \det(X_{I, \{1,\dots,p\}}) \, e_I$$

X : 

__Dém. :__ $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$

$$= \Big(\sum_{i_1} x_{i_1 1} e_{i_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_p} x_{i_p p} e_{i_p}\Big)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_p} x_{i_1,1} \cdots x_{i_p,p} \, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

$$= \sum_{\iota} x_{\iota(1),1} \cdots x_{\iota(p),p} \, e_{\iota(1)} \wedge \dots \wedge e_{\iota(p)},$$

où la somme porte sur les __injections__ $\iota : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, n\}$. Or toute injection ι se factorise de façon unique en $\iota = \lambda\sigma$, où σ est une permutation de $\{1, \dots, p\}$ et λ une injection __croissante.__

Donc :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_p = \sum_\lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{\lambda\sigma(1),1} \cdots x_{\lambda\sigma(p),p} \underbrace{e_{\lambda\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda\sigma(p)}}_{= \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(p)}}$$

$$= \sum_\lambda \det\left(X_{\{\lambda(1), \dots, \lambda(p)\}, \{1, \dots, p\}} \right) \cdot e_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(p)} . \checkmark$$

Prop. : Pour $f : L \to L$ de matrice B dans la base $e_1, \dots, e_n$, la matrice de $\Lambda^k(f) : \Lambda^k(L) \to \Lambda^k(L)$ dans la base des e_I, $I \in \mathcal{P}_k$, est $(\det(B_{I,J}))_{I,J \in \mathcal{P}_k}$.

Dém. : $\Lambda^k(f)(e_I) = f(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(e_{i_k})$. ✓

Prop. : Pour $f : L \to L$ et B comme ci-dessus et $\lambda, \mu \in A$, on a

$$\det(\lambda \mathbb{1}_L + \mu f) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}(\Lambda^k(f))\, \mu^k \lambda^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{I \in \mathcal{P}_k} \underbrace{\det(X_{I,I})}_{\text{mineur principal}} \Big) \mu^k \lambda^{n-k}.$$

Dém. : On a

$$\Lambda^n(\lambda \mathbb{1}_L + \mu f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = (\lambda e_1 + \mu f(e_1)) \wedge \dots \wedge (\lambda e_n + \mu f(e_n))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^k \lambda^{n-k} A_k$$

pour des $A_k \in \Lambda^n(L)$ à déterminer. Pour $I \in \mathcal{P}_k$, soit $\bar{I}$ le complémentaire de I. On a

$$A_k = \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \left(f(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(e_{i_k}) \wedge e_{\bar{I}} \right) \cdot \varepsilon(\bar{I}),$$

où $\varepsilon(I) \in \{1,-1\}$ est défini par

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varepsilon(I)\; e_I \wedge e_{\bar I}.$$

On a

$$\sum_{I \in \mathcal{P}_k} f(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(e_{i_k}) \wedge e_{\bar I}\, \varepsilon(I) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \Lambda^k(f)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \wedge e_{\bar I} \cdot \varepsilon(I)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \Big(\sum_{J \in \mathcal{P}_k} \det(B_{J,I})\, e_J \Big) \wedge e_{\bar I} \cdot \varepsilon(I)$$

$0 \neq e_J \wedge e_{\bar I}$
$\iff J = I$

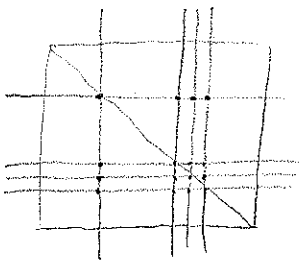
$$= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \det(B_{I,I})\, \underbrace{e_I \wedge e_{\bar I} \cdot \varepsilon(I)}_{e_1 \wedge \dots \wedge e_n}$$

$$= tr(\Lambda^k(f)) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \quad \checkmark$$

Application:

$$\chi_f(X) = \text{pol. caract. de } f = \det(X \cdot \mathbb{1} - f)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{tr(\Lambda^k(f))}_{\text{= somme des "mineurs principaux" de } B.} X^{n-k}$$



mineur principal d'ordre 4.