

© 1990 г.

Н. А. Карпенко, А. С. Меркурьев

ГРУППЫ ЧЖОУ ПРОЕКТИВНЫХ КВАДРИК

Построена 5-мерная проективная квадратика Q над некоторым полем, группа Чжоу $CH^4 Q$ которой не является конечно порожденной. Этот результат свидетельствует, что задача вычисления кольца Чжоу проективных квадрик существенно сложнее задачи вычисления их K -теории, решенной Суоном [5].

Пусть X - неприводимое алгебраическое многообразие над некоторым полем F . Циклом коразмерности p на X называется элемент свободной абелевой группы, порожденной замкнутыми неприводимыми подмногообразиями коразмерности p в X . На группе циклов коразмерности p вводится понятие рациональной эквивалентности [1]. Группа классов циклов относительно этой эквивалентности обозначается $CH^p X$ и называется p -й группой Чжоу многообразия X . Класс цикла $\sum n_i Y_i$, где Y_i - замкнутые неприводимые подмногообразия коразмерности p в X , будем обозначать через $\sum n_i [Y_i] \in CH^p X$. Градуированная группа $CH^* X = \coprod_{p \geq 0} CH^p X$ называется группой Чжоу многообразия X . Иногда мы будем использовать нижние индексы для групп Чжоу, полагая $CH_p X = CH^{d-p} X$, где $d = \dim X$. Подгруппу кручения в $CH^p X$ обозначим $TCH^p X$ и положим $\overline{CH^p X} = CH^p X / TCH^p X$.

Для любого неособого многообразия X построена теория пересечений [1-3], состоящая в задании билинейного спаривания $CH^i X \times CH^j X \rightarrow CH^{i+j} X$ для любых $i, j \geq 0$, которое превращает группу Чжоу многообразия X в ассоциативное коммутативное градуированное кольцо с единицей, называемое кольцом Чжоу.

Перечислим несколько хорошо известных свойств и примеров групп Чжоу многообразий [1, 2].

1. Группа $CH^0 X$ порождена классом $[X]$, так что $CH^0 X \cong \mathbb{Z}$.
2. Группа $CH^1 X$ совпадает с группой классов дивизоров многообразия X [4].
3. Если $X = \mathbb{A}_F^n$ - аффинное пространство, то $CH^* X = CH^0 X = \mathbb{Z}$.
4. Если $X = \mathbb{P}_F^n$ - проективное пространство, то градуированное кольцо $CH^* X$ изоморфно фактор-кольцу $\mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$, где h - класс гиперплоскости, имеющий степень 1, т.е. группа $CH^p X$ порождается классом линейного подпространства коразмерности p при $p = 0, 1, \dots, n$.

5. Для любого *плоского* морфизма $f : Y \rightarrow X$ имеется гомоморфизм градуированных групп $f^* : \text{CH}^* X \rightarrow \text{CH}^* Y$, называемый *обратным образом*. Для морфизма проекции $f : X_E \rightarrow X$, где E/F - произвольное расширение полей, гомоморфизм f^* обозначается $\text{res}_{E/F}$. В случае неособых многообразий обратный образ определен для произвольного морфизма $f : Y \rightarrow X$ и является гомоморфизмом градуированных колец.

6. Для любого *собственного* морфизма $f : Y \rightarrow X$ определен гомоморфизм градуированных групп $f_* : \text{CH}_* Y \rightarrow \text{CH}_* X$, который называется *прямым образом*. Если E/F - конечное расширение, $f : X_E \rightarrow X$ - проекция, то f_* обозначается $N_{E/F}$. Композиция $N_{E/F} \circ \text{res}_{E/F}$ совпадает с умножением на $[E:F]$.

Вычисление кольца Чжоу неособого многообразия - одна из интересных и важных задач алгебраической геометрии. К сожалению, класс многообразий, для которых эта задача решена, невелик. Несколько лет назад американский математик Р. Суон поставил задачу вычисления кольца Чжоу квадратичной гиперповерхности в проективном пространстве [5]. В работе [6] собраны результаты, полученные первым автором в этом направлении.

Пусть F - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, φ - невырожденная квадратичная форма над F размерности $d+2$. Уравнение $\varphi = 0$ задает в проективном пространстве \mathbb{P}_F^{d+1} неособую гиперповерхность $X = X(\varphi)$, называемую *квадрикой*, соответствующей форме φ . Ясно, что многообразие X не имеет рациональных точек в том и только в том случае, когда форма φ анизотропна. В § 1 показано, как вычисление кольца $\text{CH}^* X$ сводится к случаю, когда форма φ является анизотропной. Таким образом, достаточно рассматривать анизотропные квадратичные формы, содержательная теория которых возможна, разумеется, только для алгебраически незамкнутых полей. По этой причине мы рассматриваем квадрики над произвольным полем, и ответ в задаче вычисления кольца Чжоу квадрики, очевидно, должен зависеть от арифметики этого поля.

В работе [6] вычислены кольца Чжоу проективных квадрик, размерность которых не превосходит 4. При этом обнаружен интересный эффект - наличие кручения в некоторых группах Чжоу (см. § 1), причем задача вычисления кольца Чжоу сводится к нахождению этого кручения. Однако во всех случаях ненулевая группа $\text{TCN}^p X$ оказывается изоморфной $\mathbb{Z}/2$. Возникает естественный вопрос, верно ли аналогичное утверждение для квадрик больших размерностей. Отрицательный ответ на этот вопрос был получен вторым автором (§ 5): ему удалось обнаружить в группе Чжоу $\text{CH}^4 X$ некоторой 5-мерной квадрики X два различных элемента второго порядка. На основе этого результата первый автор показал, что для любого $p \geq 4$ группа $\text{TCN}^p X$ будет иметь сколь угодно большую мощность при подходящем выборе поля F и квадрики X над F (§ 6). Это обстоятельство практически не оставляет надежды на получение окончательного ответа в задаче вычисления кольца Чжоу проективной квадрики размерности большей 4.

В работе приняты следующие обозначения и соглашения. Мы говорим, что

расширение полей E/F расщепляет квадратичную форму φ , если форма $\varphi_E = \varphi \otimes_F E$ изотропна. «ДиAGONАЛЬНАЯ» квадратическая форма $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$ обозначается $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$; $D(\varphi)$ - множество ненулевых значений формы φ . Квадратичная форма $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \langle 1, -a_2 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ называется n -формой Пфистера. Следующие три условия эквивалентны [7]:

- 1) форма $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ изотропна;
- 2) форма $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ гиперболична;
- 3) $a_n \in D(\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle)$.

Формы φ_1 и φ_2 над полем F называются пропорциональными, если $\varphi_1 \simeq c\varphi_2$ для некоторого $c \in F^*$. Пропорциональные квадратичные формы определяют изоморфные квадрики.

§ 1. Группы Чжоу проективных квадрик: обзор результатов

В этом параграфе перечислим некоторые результаты работы [6] о группах Чжоу проективных квадрик. Фиксируем обозначения: F - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2; φ - квадратичная форма над полем F размерности $d+2$; X - d -мерная проективная кватрика, соответствующая форме φ . Ясно, что многообразие X неособо тогда и только тогда, когда квадратичная форма φ невырождена.

(1.1). Редукция к невырожденному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольной проективной квадрики сводится к случаю неособой квадрики следующим образом. Пусть ψ - невырожденная часть формы φ , Y - проективная кватрика, соответствующая ψ . Имеют место канонические изоморфизмы: $\text{CH}^p X \simeq \text{CH}^p Y$ при $p \leq \dim Y$; $\text{CH}_p X \simeq \text{CH}_p(\mathbb{P}^{n-1})$ при $p \leq n-1$, где $n = \dim \varphi - \dim \psi$ - размерность радикала. Опишем их построение. Многообразие X в проективном пространстве \mathbb{P}^{d+1} является конусом над Y с вершиной \mathbb{P}^{n-1} . Выкидывая вершину, получаем векторное расслоение $j: X \setminus \mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{j^*} Y$. Цепочка морфизмов $Y \xleftarrow{j} X \setminus \mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{i} X$ дает цепочку изоморфизмов $\text{CH}^p Y \xrightarrow{j^*} \text{CH}^p(X \setminus \mathbb{P}^{n-1}) \xleftarrow{i^*} \text{CH}^p X$ при $p \leq \dim Y$. Изоморфизм $\text{CH}_p(\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{j^*} \text{CH}_p X$ (для $p \leq n-1$) индуцирован замкнутым вложением $\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow X$.

Далее в этом параграфе рассматриваем только невырожденные квадратичные формы и неособые квадрики. Через $h \in \text{CH}^1 X$ обозначаем класс гиперплоского сечения (более точно, h - обратный образ класса гиперплоскости относительно вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{d+1}$).

(1.2). Случай полностью расщепленной формы. Обозначим через m целую часть числа $(d+1)/2$. Пусть сперва d нечетно, $\varphi = x_0 x_1 + \dots + x_{d-1} x_d + x_d^2$. Квадрика X содержит $(m-1)$ -мерное проективное пространство \mathbb{P}^{m-1} (определяемое, скажем, уравнениями $x_0 = x_2 = x_4 = \dots = x_{d+1} = 0$) и вместе с ним проективные пространства всех меньших размерностей; пусть $l_p \in \text{CH}_p X$ - класс $\mathbb{P}^p \subset X$. Тогда $\text{CH}^p X = \mathbb{Z} \cdot h^p$, $\text{CH}_p X = \mathbb{Z} \cdot l_p$ для $p < m$. Если же d четно, $\varphi = x_0 x_1 + \dots + x_{d-2} x_{d-1} + x_d x_{d+1}$, то циклы $x_0 = x_2 = x_4 =$

$= \dots = x_d = 0$ и $x_1 = x_2 = x_4 = \dots = x_d = 0$ неэквивалентны; пусть $l_m, l'_m \in \text{CH}_m X$ - их классы. Тогда $\text{CH}_m X = \mathbb{Z} \cdot l_m \oplus \mathbb{Z} \cdot l'_m$, а для $p < m$ по-прежнему $\text{CH}^p X = \mathbb{Z} \cdot h^p$, $\text{CH}_p X = \mathbb{Z} \cdot l_p$. Умножение в $\text{CH}^* X$ описывается формулами $h l_p = l_{p+1}$;

$$h^m = \begin{cases} 2l_{m-1}, & \text{если } d \text{ нечетно;} \\ l_m + l'_m, & \text{если } d \text{ четно.} \end{cases}$$

(1.3). Редукция к анизотропному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольных квадратик сводится к анизотропному случаю следующим приемом. Пусть $\varphi = \psi \perp \mathbb{H}$, где ψ - анизотропная часть, \mathbb{H} - гиперболическая плоскость, n - индекс Витта формы φ ; Y - квадратика, соответствующая φ ($\dim Y = d - 2n$); $X = X_E$, где E/F - какое-либо полностью расщепляющее φ расширение. Тогда для $p < n$ гомоморфизмы $\text{res}: \text{CH}^p X \rightarrow \text{CH}^p X$, $\text{res}: \text{CH}_p X \rightarrow \text{CH}_p X$ являются изоморфизмами; для $p = n, n+1, \dots, d-n$ группа $\text{CH}^p X$ канонически изоморфна $\text{CH}^{p-n} Y$.

(1.4). Несложно описать фактор-группы групп Чжоу по кручению $\overline{\text{CH}}^p X$. Для квадратика X без рациональных точек $\overline{\text{CH}}^p X = \mathbb{Z} \cdot h^p$ при $p \neq d/2$. Группа $\overline{\text{CH}}^{d/2} X$ (при четном d) изоморфна либо \mathbb{Z} , либо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (более точное описание см. в [6]). Поэтому группа $\text{CH}^p X$ изоморфна прямой сумме $\text{TCN}^p X \oplus \text{CH}^p X$ и, следовательно, вычисление группы $\text{CH}^p X$ сводится к определению группы кручения $\text{TCN}^p X$.

(1.5). Разумеется, наибольшие трудности при вычислении кольца Чжоу квадратика представляет нахождение подгруппы кручения $\text{TCN}^* X$. При каждом p группа $\text{TCN}^p X$ 2-примарна. Группы $\text{TCN}^0 X$ и $\text{TCN}^1 X$ всегда равны нулю. Группа $\text{TCN}^2 X$ изоморфна $\mathbb{Z}/2$, если форма φ анизотропна, имеет размерность больше 4 и пропорциональна подформе 3-формы Пфистера; в остальных случаях $\text{TCN}^2 X = 0$. Наконец, группа $\text{TCN}^3 X$ конечна для любой квадратика; если $d \leq 7$, то $\text{TCN}^3 X = 0$ или $\mathbb{Z}/2$. О группах $\text{TCN}^p X$ при $p \geq 4$ известно очень мало. Основной результат настоящей статьи - теорема 6.5 - свидетельствует о весьма сложном их строении и практически не оставляет надежд на возможность их вычисления для произвольной квадратика.

(1.6). Приведем последний результат, касающийся произвольной квадратика, - описание нульмерной группы Чжоу. Гомоморфизм степени $\deg: \text{CH}_0 X \rightarrow \mathbb{Z}$ инъективен; его образ равен \mathbb{Z} , если φ изотропна, и $2\mathbb{Z}$ - в противном случае.

(1.7). Пусть φ - 4-мерная форма определителя 1. Опишем группу классов дивизоров $\text{CH}^1 X$. С точностью до пропорциональности φ имеет вид « a, b » и либо гиперболична, либо анизотропна. Хотя гиперболический случай разобран в 1.1, сделаем относительно двумерной квадратика несколько дополнительных замечаний. Квадрика $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ совпадает с образом вложения Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ и содержит два однопараметрических семейства прямых: $\mathbb{P}^1 \times pt$ и $pt \times \mathbb{P}^1$. Две прямые из одного семейства скрещиваются, из разных - пересекаются. Классы всех прямых одного из этих семейств равны элементу $l_1 \in \text{CH}^1 X$, введенному в 1.1, другого - l'_1 . Таким образом, $\text{CH}^1 X$ порождается классами любых двух пересекающихся прямых. Пусть теперь форма $\varphi = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$ анизотропна. Гомоморфизм $\text{res}: \text{CH}^1 X \rightarrow \text{CH}^1 X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

отождествляет $\text{CH}^1 X$ с подгруппой элементов из $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ с четной суммой координат. Рассмотрим простой цикл Z коразмерности 1, заданный уравнениями $x_0^2 - ax_1^2 = 0$, $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$. Выписанные уравнения определяют в \bar{X} две скрещивающиеся прямые, заданные парами уравнений $x_0 = \sqrt{a} x_1$, $x_2 = \sqrt{a} x_3$ и $x_0 = -\sqrt{a} x_1$, $x_2 = -\sqrt{a} x_3$ и определенные над полем $F(\sqrt{a})$. Эти прямые перестановочные под действием образующей группы Галуа расширения $F(\sqrt{a})/F$. Поэтому группа $\text{CH}^1 X$ порождается элементами $[Z]$ и $h = (1, 1)$ (гиперплоское сечение квадрики \bar{X} эквивалентно сумме двух пересекающихся прямых).

(1.8). Цикл "двойная прямая". Предположим, что $\dim \varphi \geq 5$. Сопоставим каждой 4-мерной подформе определителя 1 формы φ (если такие имеются) одномерный простой цикл Z на X . Если, скажем, $\varphi = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 + \varphi(y_i)$, то определим Z уравнениями $x_0^2 - ax_1^2 = 0$, $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$, $y_i = 0$ (для всех i). Цикл Z , который мы будем называть циклом "двойная прямая" (мотивировка такого названия содержится в п.1.7), будет играть ключевую роль в дальнейшем изложении. Вот его главное свойство.

Л е м м а. Положим $\xi = [Z] - h^{d-1} \in \text{CH}_1 X$. Тогда $2\xi = 0$; кроме того, если φ анизотропна, то $\xi \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E/F - квадратичное расширение, полностью расщепляющее 4-мерную подформу, по которой построен Z . Тогда $\text{res}_{E/F}([Z]) = \text{res}_{E/F}(h^{d-1}) = 2l_1 \in \text{CH}_1 X_E$, т.е. $\text{res}_{E/F}(\xi) = 0$. Следовательно, $2\xi = N_{E/F} \circ \text{res}_{E/F}(\xi) = 0$. Утверждение о том, что в анизотропном случае $\xi \neq 0$, доказано в [6].

Итак, мы научились по каждой 4-мерной подформе определителя 1 формы φ (если $\dim \varphi \geq 5$) строить элемент кручения в $\text{CH}_1 X$, отличный от нуля, если φ анизотропна.

(1.9). Квадрики размерности не выше 4. Кольцо Чжоу квадрики, размерность которой не превосходит 4, полностью вычислено в [6]. Приведем описание группы $\text{TCH}_1 X$. Для коники и для квадратичной поверхности группа $\text{TCH}_1 X$ равна нулю. Пусть размерность X равна 3 и 4. Тогда $\text{TCH}_1 X = \mathbb{Z}/2$, если φ анизотропна и содержит 4-мерную подформу определителя 1; $\text{TCH}_1 X = 0$ - в противном случае. Ясно, что ненулевой элемент группы $\text{TCH}_1 X$ - это элемент кручения, построенный в 1.8; если φ содержит несколько 4-мерных подформ определителя 1, то соответствующие элементы кручения равны. Отметим, что последнее утверждение перестает быть верным уже для 5-мерной квадрики (теорема 5.1).

(1.10). В заключение параграфа приведем одно утверждение, легко доказываемое с помощью результатов [6]. Пусть $\dim X = 5$, квадратичная форма φ содержит 4-мерную подформу определителя 1, индекс алгебры $C_0(\varphi)$ равен 4 ($C_0(\varphi)$ - четная часть алгебры Клиффорда $C(\varphi)$ формы φ ; $C_0(\varphi)$ является центральной простой F -алгеброй, если размерность φ нечетна [7]). Тогда $\text{TCH}^3 X = 0$.

§ 2. Локальные системы

Пусть F - произвольное поле. Будем рассматривать неприводимые алгебраические многообразия над полем F , называя их для краткости просто многообразиями.

Множество точек многообразия X , имеющих коразмерность p (размерность p), обозначим X^p (соответственно X_p).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что на многообразии X задана локальная система (абелевых групп) V_* , если

1) для каждой точки $x \in X$ задан набор абелевых групп $V_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, причем $V_n(x) = 0$ при $n < 0$;

2) для каждой пары $x \in X^p$, $x' \in X^{p+1}$ заданы гомоморфизмы $d_{xx'}: V_n(x) \rightarrow V_{n-1}(x')$, причем $d_{xx'} = 0$, если x не специализируется в x' (т.е. x' не принадлежит замыканию множества $\{x\}$);

3) для любой точки $x \in X^p$ и любого $v \in V_n(x)$ множество $\{x' \in X^{p+1} \mid d_{xx'}(v) \neq 0\}$ конечно; в частности, гомоморфизмы $d_{xx'}$ индуцируют гомоморфизм $d_n^p: \prod_{x \in X^p} V_{n-p}(x) \rightarrow \prod_{x \in X^{p+1}} V_{n-p-1}(x)$;

4) для любых точек $x \in X^{p-1}$, $z \in X^{p+1}$ выполняется равенство $\sum_{y \in X^p} d_{yz} \circ d_{xy} = 0$,

левая часть которого имеет смысл в силу 3.

П. 4 означает, что для каждого n набор групп $V_n^p = \prod_{x \in X^p} V_{n-p}(x)$ и гомоморфизмов d_n^p (при переменном p) является комплексом, который мы обозначим V_n^* . Группы когомологий $H^p(V_n^*)$ комплекса V_n^* будем обозначать $H^p(X, V_n)$ или $H_{d-p}(X, V_{n-d})$, где $d = \dim X$, и называть группами V -когомологий многообразия X . Ясно, что $H^p(X, V_n) = 0$ при $p > n$ или $p > d$.

Пусть V_* , V'_* - локальные системы на X . Морфизм локальных систем $V_* \rightarrow V'_*$ - это набор гомоморфизмов $V_n(x) \rightarrow V'_n(x)$ для каждых n, x , согласованный с гомоморфизмами $d_{xx'}$. Морфизм $V_* \rightarrow V'_*$ индуцирует гомоморфизм групп когомологий $H^p(X, V_n) \rightarrow H^p(X, V'_n)$.

П р и м е р 2.1. На произвольном многообразии X определим локальную систему K_* . Пусть $K_n(x) = K_n(F(x))$ - n -я K -группа Квиллена поля вычетов $F(x)$ точки $x \in X$. Гомоморфизмы $d_{xx'}: K_n(F(x)) \rightarrow K_{n-1}(F(x'))$ определяются стандартным образом [2]. При этом $H^p(X, K_p) = \text{CH}^p X$ - группа Чжоу коразмерности p .

П р и м е р 2.2. Аналогично определим локальную систему K_*^M , взяв в качестве $K_n^M(x)$ n -ю K -группу Милнора $K_n^M(F(x))$ [8-10]. Стандартный гомоморфизм из K -группы Милнора в K -группу Квиллена определяет морфизм локальных систем $K_*^M \rightarrow K_*$. Возникающие отображения групп когомологий $H^p(X, K_{p+1}^M) \rightarrow H^p(X, K_{p+1})$ являются изоморфизмами при $i = 0, 1, 2$. В частности, $H^p(X, K_p^M) = \text{CH}^p X$.

Пусть V_* - локальная система на X и $Y \subset X$ - подмногообразие. Ограничение $V_*|_Y$, очевидно, является локальной системой на Y . Группы когомологий $H^p(Y, (V_*|_Y)_n)$ будем обозначать сокращенно $H^p(Y, V_n)$.

П р е д л о ж е н и е 2.3. Пусть V_* - локальная система на X , $Y \subset X$ - замкнутое подмногообразие коразмерности m , $U = X \setminus Y$. Тогда для каждого n имеется точная последовательность групп когомологий

$$\dots \longrightarrow H^{p-m}(Y, V_{n-m}) \longrightarrow H^p(X, V_n) \longrightarrow H^p(U, V_n) \longrightarrow H^{p-m+1}(Y, V_{n-m}) \longrightarrow \dots$$

Доказательство. Для каждого p множество X^p является дизъюнктивным объединением множеств U^p и Y^p . Точная последовательность когомологий возникает из короткой точной последовательности комплексов

$$0 \longrightarrow (V_*|_Y)_{n-m}^* \longrightarrow V_n^* \longrightarrow (V_*|_U)_n^* \longrightarrow 0.$$

Пример 2.4. В условиях предложения 2.3 возьмем $V_* = K_*$ (или K_*^M). Конец возникающей K -когомологической последовательности совпадает с известной точной последовательностью для групп Чжоу $CH^{n-m}Y \longrightarrow CH^n X \longrightarrow CH^n U \longrightarrow 0$.

§ 3. Спектральная последовательность, связанная с плоским морфизмом

Теорема 3.1. Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ - плоский морфизм многообразий, V_* - локальная система на X . Для каждого целого n имеется спектральная последовательность $E_1^{p,q}(n) = \coprod_{y \in Y^p} H^q(X_y, V_{n-p}) \implies H^{p+q}(X, V_n)$, где X_y - слой морфизма π над точкой y ; эта спектральная последовательность сосредоточена в пределах $0 \leq p \leq \dim Y$, $0 \leq q \leq \dim X - \dim f(X)$, $p+q \leq n$.

Доказательство. Введем на комплексе V_n^* фильтрацию, положив $F^p(V_n^i) = \coprod_{\substack{x \in X^n \\ \text{codim}_y \pi(x) \geq p}} V_{n-1}^i(x) \subset V_n^i$ при каждом p, i . Эта фильтрация, очевидно,

ограничена и согласована с дифференциалом, следовательно, индуцирует спектральную последовательность $E_1^{p,q} \implies H^{p+q}(X, V_n)$ [11]. Вычислим первый член $E_1^{p,q}$ этой спектральной последовательности. Так как морфизм π плоский, то для любой точки $y \in Y^p$ имеем $X^1 \cap X_y = X_y^{1-p}$ [1], откуда

$$F^{p/p+1}V_n^1 = \coprod_{\substack{x \in X^1 \\ \pi(x) \in Y^p}} V_{n-1}^1(x) = \coprod_{y \in Y^p} \coprod_{x \in X_y^{1-p}} V_{n-1}^1(x),$$

т.е.

$$F^{p/p+1}V_n^* = \coprod_{y \in Y^p} (V_*|_{X_y})_{n-p}^{*1-p}.$$

Следовательно,

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^{p/p+1}V_n^*) = \coprod_{y \in Y^p} H^q(X_y, V_{n-p}).$$

Утверждение теоремы о расположении спектральной последовательности очевидно, если учесть, что слой плоского морфизма π над произвольной точкой имеет размерность $\dim X - \dim F(X)$, если непуст.

Дополнительно отметим, что дифференциал в члене E_1 определяет локальную систему $H^q(\pi, V_*)$ на Y при помощи равенства $H^q(\pi, V_n)(y) = H^q(X_y, V_n)$, причем $H^q(\pi, V_n)^* = E_1^{*,q}$. Следовательно, $E_2^{p,q} = H^p(H^q(\pi, V_n)^*) = H^p(Y, H^q(\pi, V_n))$.

§ 4. Группы $D_n(\varphi)$

Начиная с этого места рассматриваются только те поля, характеристика которых не равна 2. Пусть φ - произвольная (возможно, вырожденная) квадратичная форма над полем F , $X(\varphi)$ - соответствующая проективная квадратика. Рассмотрим гомоморфизм N :

$$: H_0(X(\varphi), K_n) \longrightarrow K_n(F), \text{ индуцированный гомоморфизмом } \coprod_{x \in X(\varphi)_0} K_n(F(x)) \longrightarrow$$

 $\longrightarrow K_n(F), \text{ отображающим } K_n(F(x)) \text{ в } K_n(F) \text{ при помощи отображения нормы } N_{F(x)/F}.$
 Определим группу $D_n(\varphi)$, положив $D_n(\varphi) = \text{Im } N \subset K_n(F)$. Очевидно, что $D_n(\varphi) = K_n(F)$, если форма φ изотропна. Эпиморфизм $N : H_0(X(\varphi), K_n) \longrightarrow D_n(\varphi)$ совпадает при $n = 0$ с гомоморфизмом степени и является ввиду 1.1 и 1.6 изоморфизмом.

Л е м м а 4.1. Пусть U - аффинная квадратика, заданная уравнением $\varphi = c$, где $c \in F$. Имеется канонический эпиморфизм $H_0(U, K_n) \longrightarrow D_n(\varphi \perp \langle -c \rangle) / D_n(\varphi)$, являющийся при $n = 0$ изоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Искомый эпиморфизм возникает из следующей коммутативной диаграммы с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(X(\varphi), K_n) & \longrightarrow & H_0(X(\varphi \perp \langle -c \rangle), K_n) & \longrightarrow & H_0(U, K_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ D_n(\varphi) & \longrightarrow & D_n(\varphi \perp \langle -c \rangle) & \longrightarrow & D_n(\varphi \perp \langle -c \rangle) / D_n(\varphi) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

При $n=0$ обе вертикальные стрелки становятся изоморфизмами, откуда следует второе утверждение леммы.

Л е м м а 4.2. Группа $D_n(\varphi)$ совпадает с образом гомоморфизма $N' : \coprod K_n(E) \longrightarrow K_n(F)$, где суммирование ведется по всем конечным расширениям E/F , расщепляющим φ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку поле вычетов любой точки $x \in X(\varphi)_0$ расщепляет φ , включение $D_n(\varphi) \subset \text{Im } N'$ очевидно. Наоборот, если E/F - расщепляющее φ расширение, то $E \supset F(x)$ для некоторой $x \in X(\varphi)_0$, что доказывает обратное включение.

Л е м м а 4.3. Пусть φ - форма Пфистера, ψ - подформа φ , причем $\dim \psi > \dim \varphi / 2$. Тогда $D_n(\varphi) = D_n(\psi)$ при всех n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что у форм φ и ψ одинаковые поля расщепления, и воспользуемся леммой 4.2.

Л е м м а 4.4. (см. [12]). Если φ - форма Пфистера, то $D_1(\varphi) = D(\varphi)$.

З а м е ч а н и е. Для произвольной квадратичной формы φ можно аналогично определить группы $D_n^M(\varphi) \subset K_n^M(F)$: $D_n^M(\varphi) = \text{Im } (N : H_0(X(\varphi), K_n^M) \longrightarrow K_n^M(F))$. Группы $D_n^M(\varphi)$ и $D_n(\varphi)$ совпадают при $n=0, 1, 2$; кроме того, свойства 4.1 - 4.4 групп D_n выполняются и для D_n^M . Всюду в дальнейшем изложении K_n и D_n можно заменить на K_n^M и D_n^M .

В заключении параграфа построим с помощью введенных групп важный пример локальной системы на многообразии.

П р и м е р 4.5. Пусть X - произвольное многообразие, φ - квадратичная форма над кольцом регулярных функций $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ многообразия X , скажем, $\varphi = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$,

где f_1, f_2, \dots, f_k - регулярные функции на X . Для каждой точки $x \in X$ получаем квадратичную форму $\varphi_x = \langle f_1(x), \dots, f_k(x) \rangle$ (возможно, вырожденную) над полем $F(x)$. Группы $D_n(\varphi_x)$ образуют в локальной системе K_* подсистему, которую мы будем обозначать $D_*(\varphi)$. Таким образом, $D_n(\varphi)(x)$ есть по определению $D_n(\varphi_x)$.

Л е м м а 4.6. (см. [2])

$$H^p(\mathbb{A}_F^n, K_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } p > 0; \\ K_m(F), & \text{если } p = 0. \end{cases}$$

Л е м м а 4.7. Пусть L - поле дискретного нормирования с полем вычетов E , F - подполе в кольце целых элементов поля L , φ - квадратичная форма над полем F . Если форма φ_L изотропна, то форма φ_E также изотропна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. По условию $\sum_{i=1}^n a_i f_i^2 = 0$ для некоторых элементов $f_i \in L$, не все из которых равны 0, причем можно считать, что элементы f_i целы и хотя бы один из них имеет ненулевой вычет $\bar{f}_1 \in E^*$. Следовательно, равенство $\sum_{i=1}^n a_i \bar{f}_i^2 = 0$ показывает, что форма φ_E изотропна.

С л е д с т в и е 4.8. Пусть Y - многообразие над полем F , $y \in Y$ - неособая точка, φ - квадратичная форма над F . Если форма $\varphi_{F(Y)}$ изотропна, то форма $\varphi_{F(y)}$ также изотропна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как точка y неособа, то найдется последовательность полей $L_0 = F(Y)$, $L_1, L_2, \dots, L_n = F(y)$, где $n = \text{codim } y$, причем для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$ поле L_i обладает дискретным нормированием с полем вычетов L_{i+1} . Осталось применить лемму 4.7 n раз.

Л е м м а 4.9. Пусть φ - квадратичная форма над полем F . Тогда если рассматривать φ как квадратичную форму над кольцом регулярных функций аффинного пространства \mathbb{A}_F^n , то

$$H^p(\mathbb{A}_F^n, D_m(\varphi)) = \begin{cases} D_m(\varphi), & \text{если } p = 0; \\ 0, & \text{если } p > 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по числу n . Рассмотрим сначала случай $n=1$. Утверждение леммы тривиально при $p > 1$. В случае $p=1$ достаточно заметить, что группа $H^1(\mathbb{A}_F^1, D_m(\varphi))$ порождается образами гомоморфизмов нормы $H^1(\mathbb{A}_E^1, K_m) \rightarrow H^1(\mathbb{A}_F^1, D_m(\varphi))$, где E пробегает множество конечных расширений поля F , расщепляющих форму φ , а также то, что группа $H^1(\mathbb{A}_E^1, K_m)$ нулевая по лемме 4.6.

Пусть теперь $p=0$. Нам нужно показать, что $H^0(\mathbb{A}_F^1, D_m(\varphi)) = D_m(\varphi)$, т.е. $D_m(\varphi_L) \cap K_m(F) = D_m(\varphi)$, где $L = F(\mathbb{A}^1)$. Рассмотрим гомоморфизм специализации в рациональной точке $x \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$:

$$s_x: K_m(L) \longrightarrow K_m(F),$$

определенный по формуле $s_x(u) = \partial_x(\{\pi_x\} \cdot u)$, где π_x - какой-либо простой элемент в

локальном кольце точки x и $\partial_x: K_{m+1}(L) \rightarrow K_m(F)$ - "вычет" в точке x [2]. Так как композиция

$$K_m(F) \rightarrow K_m(L) \xrightarrow{s_x} K_m(F)$$

совпадает с тождественным гомоморфизмом, то нам достаточно показать, что $s_x(D_m(\varphi_L)) \subset D_m(\varphi)$.

Пусть E/L - конечное расширение, расщепляющее форму φ_L . По лемме 4.2 достаточно показать, что

$$s_x(N_{E/L}(K_m(E))) \subset D_m(\varphi).$$

Пусть Y - неособая проективная кривая и $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ - сюръективный морфизм такие, что расширение полей $F(Y)/F(\mathbb{P}^1)$ изоморфно расширению E/L . Из коммутативной диаграммы [2]

$$\begin{array}{ccc} K_{m+1}F(Y) & \xrightarrow{N} & K_{m+1}F(\mathbb{P}^1) \\ \downarrow \cup \partial_y & & \downarrow \partial_x \\ \coprod_{\pi(y)=x} K_m F(y) & \xrightarrow{\sum N_{F(y)/F}} & K_m F \end{array}$$

находим, что $s_x(N(u)) = \partial_x(\{\pi_x\} \cdot N(u)) = \partial_x(N(\{\pi_x\} \cdot u)) = \sum_{\pi(y)=x} N_{F(y)/F}(\partial_y(\{\pi_x\} \cdot u))$ для любого $u \in K_m F(Y)$. Следствие 4.8 утверждает, что расширение $F(y)/F$ расщепляет форму φ для любой точки $y \in Y$. Поэтому опять по лемме 4.2 получаем $s_x(N(u)) \in D_m(\varphi)$, что и требовалось доказать.

Индукционный переход $n-1 \Rightarrow n$. Рассмотрим спектральную последовательность 3.1 для проекции $\pi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$:

$$E_1^{p,q} = \coprod_{y \in (\mathbb{A}^{n-1})^p} H^q(\mathbb{A}_{F(y)}^1, D_{m-p}(\varphi)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{A}_F^n, D_m(\varphi)).$$

По доказанному выше $E_1^{p,q} = 0$ при $q \geq 1$ и $E_1^{p,0} = D_m(\varphi)$. Поэтому $H^1(\mathbb{A}_F^n, D_m(\varphi)) = E_2^{1,0} = H^1(\mathbb{A}_F^{n-1}, D_m(\varphi))$, и мы можем применить индукционное предположение.

§ 5. Группа CH_1 для квадратик

Этот параграф посвящен доказательству следующего утверждения.

Т е о р е м а 5.1. Пусть Q - проективная 5-мерная квадратика над полем F , заданная формой $\langle 1, -a, -b, ab, -c, -d, cd \rangle$ ($a, b, c, d \in F^*$); $\xi_1, \xi_2 \in TCH_1 Q$ - элементы кручения, соответствующие 2-подформам Пфистера « a, b » и « c, d » в смысле 1.8. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $\xi_1 = \xi_2$;
- 2) существуют такие $\lambda, \mu \in F^*$, что « a, b, λ » \simeq « c, d, μ » и « a, b, c, d » \simeq « $-1, a, b, \lambda$ ».

В случае, если $-1 \in F^{*2}$, формулировка теоремы значительно упрощается.

С л е д с т в и е 5.2. Если в условиях теоремы дополнительно предположить,

что $-1 \in F^{*2}$, то $\xi_1 = \xi_2$ тогда и только тогда, когда 4-форма Пфистера « a, b, c, d » гиперболична.

Доказательство леммы. Если $-1 \in F^{*2}$, то из условия 2 теоремы следует, очевидно, что форма « a, b, c, d » гиперболична. Наоборот, если форма « a, b, c, d » гиперболична, то выполняется условие 2, так как можно взять $\lambda = \mu = 1$.

Лемма 5.3. Если U - аффинная квадратика, заданная уравнением « a, b » = c , где $a, b \in F^*$, $c \in F$, то $CH_1 U = 0$.

Доказательство. Имеем точную последовательность $CH_1 Y \rightarrow CH_1 X \rightarrow CH_1 U \rightarrow 0$, где X, Y - проективные квадрики, соответствующие формам « a, b » $1 < -c$ и « a, b ». Если $c \neq 0$, то X невырождена, и равенство $\text{Coker}(CH_1 Y \rightarrow CH_1 X) = 0$ легко получить, используя результаты из § 1. При $c = 0$ группа $CH_1 X$ изоморфна, согласно 1.1, группе $CH_0 Y$, и композиция $CH_1 Y \rightarrow CH_1 X \xrightarrow{\sim} CH_0 Y$ совпадает с умножением на h . Равенство $\text{Coker}(CH_1 Y \xrightarrow{h} CH_0 Y) = 0$ следует из 1.6 и 1.7.

Пусть ψ - n -мерная квадратичная форма над F ($n \geq 2$); $a, b, c \in F^*$; $\varphi = \langle a, b \rangle \perp (-\psi)$; U - аффинная квадратика размерности $n+3$, определенная уравнением $\varphi = e$. Примем сокращенное обозначение $D_m(a_1, a_2, \dots, a_k) = D_m(\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle)$ (см. § 4).

Предложение 5.4. Рассмотрим ψ как регулярную функцию на $A^n = A_F^n$. Тогда $CH_1 U = H^{n-1}(A^n, D_{n-1}(a, b, \psi + e))$.

Доказательство. Рассматривая ψ как функцию на A^n , мы получаем плоский морфизм $\pi: U \rightarrow A^n$, слоем которого над произвольной точкой $v \in A^n$ является трехмерная аффинная (возможно, вырожденная) квадратика U_v , заданная над полем $F(v)$ уравнением « a, b » = $\psi(v) + e$. По теореме 3.1 имеем спектральную последовательность

$$E_1^{p,q} = \coprod_{v \in (A^n)^p} H^q(U_v, K_{n+2-p}) \implies H^{p+q}(U, K_{n+1}).$$

Нас интересует группа $CH_1 U = H^{n+2}(U, K_{n+2})$. На диагонали $p+q=n+2$ имеется только две априори ненулевые группы - $E_1^{n,2}$ и $E_1^{n-1,3}$. Однако $E_1^{n,2} = \coprod CH^2 U_v = 0$ по лемме 5.3. Отсюда, так как $E_1^{p,q} = 0$ при $q > 3$ или $p+q > n+2$, получаем

$$CH_1 U = H^{n+2}(U, K_{n+2}) = E_\infty^{n-1,3} = E_2^{n-1,3} = \text{Coker}(E_1^{n-2,3} \xrightarrow{d_1} E_1^{n-1,3}).$$

По лемме 4.1, учитывая лемму 4.3, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E_1^{n-2,3} = \coprod_{v \in (A^n)^{n-2}} H^3(U_v, K_4) & \xrightarrow{d_1} & \coprod_{v \in (A^n)^{n-1}} H^3(U_v, K_3) = E_1^{n-1,3} \\ \downarrow & & \downarrow \} \\ \coprod_{v \in (A^n)^{n-2}} \frac{D_1(a, b, \psi(v) + e)}{D_1(a, b)} & \longrightarrow & \coprod_{v \in (A^n)^{n-1}} \frac{D_0(a, b, \psi(v) + e)}{D_0(a, b)}, \end{array}$$

в которой левая вертикальная стрелка является эпиморфизмом, а правая -

изоморфизмом. Следовательно, коядра горизонтальных стрелок канонически изоморфны. Учитывая, что

$$\text{Coker} \left(\coprod_{v \in (\mathbb{A}^n)^{n-2}} D_1(a, b) \longrightarrow \coprod_{v \in (\mathbb{A}^n)^{n-1}} D_0(a, b) \right) = H^{n-1}(\mathbb{A}^n, D_{n-1}(a, b)) = 0$$

по лемме 4.9, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \text{CH}_1 U &= \text{Coker} \left(\coprod_{v \in (\mathbb{A}^n)^{n-2}} D_1(a, b, \psi(v)+e) \longrightarrow \coprod_{v \in (\mathbb{A}^n)^{n-1}} D_0(a, b, \psi(v)+e) \right) = \\ &= H^{n-1}(\mathbb{A}^n, D_{n-1}(a, b, \psi+e)), \end{aligned}$$

и предложение доказано.

Рассмотрим теперь следующий частный случай. Пусть $a, b, c, d \in F^*$, $n=2$, $\psi = \langle c, d \rangle$, $e = -cd$, т.е. 5-мерная аффинная квадрика U задается уравнением

$$x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = cy^2 + dz^2 - cd.$$

Исследуем группу $\text{CH}_1 U = H^1(\mathbb{A}^2, D_1(a, b, cy^2+dz^2-cd))$ (мы считаем, что на \mathbb{A}^2 заданы координаты y и z). Спектральная последовательность групп D -когомологий, связанная с проекцией $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$, $(y, z) \mapsto z$, дает точную последовательность

$$H^0(\mathbb{A}_{F(z)}^1, D_1(a, b, f)) \xrightarrow{\alpha} \coprod_{v \in (\mathbb{A}^1)^1} H^0(\mathbb{A}_{F(v)}^1, D_0(a, b, f(v))) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathbb{A}^2, D_1(a, b, f)),$$

где $f = cy^2 + dz^2 - cd$. Рассмотрим точку $w \in \mathbb{A}^1$, заданную уравнением $z^2 = c$. Так как $F(w) = F(\sqrt{c})$ и $f(w) = cy^2 = (\sqrt{c} \cdot y)^2$ - квадрат, то 3-форма Пфистера $\langle a, b, f(w) \rangle$ гиперболична, т.е. $D_0(a, b, f(w)) = \mathbb{Z}$. Несложно вычислить образ элемента $1 \in \mathbb{Z} = H^0(\mathbb{A}_{F(w)}^1, D_0(a, b, f(w)))$ при отображении β в группе $H^1(\mathbb{A}^2, D_1(a, b, f)) = \text{CH}_1 U$: он равен классу кривой C на U , определенной уравнениями $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z^2 = c$, $x_0 = yz$.

Предложение 5.5. Цикл C рационально эквивалентен нулю на U , т.е. $[C] = 0 \in \text{CH}_1 U$, в том и только в том случае, когда найдутся такие $\lambda, \mu \in F^*$, что $\langle a, b, \lambda \rangle \simeq \langle c, b, \mu \rangle$ и $\langle a, b, c, d \rangle \simeq \langle -1, a, b, \lambda \rangle$.

Доказательство. Ясно, что $[C] = 0 \in \text{CH}_1 U$ тогда и только тогда, когда элемент $1 \in H^0(\mathbb{A}_{F(w)}^1, D_0(a, b, f(w)))$ принадлежит образу гомоморфизма α . Так как при каждом $v \in \mathbb{A}^1$ группа $H^0(\mathbb{A}_{F(v)}^1, D_0(a, b, f(v)))$ отождествляется с подгруппой в \mathbb{Z} ,

группа $H^0(\mathbb{A}_{F(z)}^1, D_1(a, b, f))$ - с подгруппой $D_1(a, b, f) \cap F(z)^*$ в $F(z)^*$, а гомоморфизм α отождествляется с ограничением гомоморфизма $F(z)^* \rightarrow \coprod_{v \in (\mathbb{A}^1)^1} \mathbb{Z}$, сопоставляющего

каждой рациональной функции ее дивизор, на подгруппу $D_1(a, b, f) \cap F(z)^*$, то ясно, что $[C] = 0 \in \text{CH}_1 U$ тогда и только тогда, когда простой цикл w является дивизором некоторой функции из $D_1(a, b, f) \cap F(z)^*$, т.е. когда при некотором $e \in F^*$ функция $e(z^2 - c)$ принадлежит $D_1(a, b, f)$. Так как $D_1(a, b, f) = D(a, b, f)$ по лемме 4.4, то

последнее условие означает в точности, что 4-форма Пфистера $\langle a, b, f, e(z^2-c) \rangle$ гиперболична [7], т.е. выполняются следующие условия [7].

1) Образ формы $\langle a, b, f \rangle$ в поле функций кривой в A^2 , определяемой уравнением $z^2=c$, - гиперболическая форма.

2) Образ формы $\langle a, b, e(z^2-c) \rangle$ в поле функций кривой в A^2 , определяемой уравнением $f=cy^2+dz^2-cd=0$, - гиперболическая форма.

3) Специализация формы $\langle a, b, f, e(z^2-c) \rangle$ в какой-нибудь рациональной точке $y \in A^2$ (например, заданной уравнениями $y=z=0$) - гиперболическая форма.

Условие 1 выполняется автоматически, так как если $z^2=c$, то $f=cy^2+dz^2-cd=cy^2=(zy)^2$ - квадрат. Условие 2 означает, что 3-форма Пфистера $\sigma = \langle a, b, -cde \rangle$ гиперболична над универсальным полем расщепления квадратичной формы $\langle c, d, -cd \rangle$, т.е. класс формы σ в кольце Витта делится на класс формы $\langle c, d \rangle$ ([13], Satz 2.1) и, следовательно, форма $\langle c, d \rangle$ является тензорным сомножителем формы $\langle a, b, -cde \rangle$ [7]: $\langle a, b, -cde \rangle \approx \langle c, d, \mu \rangle$ при некотором $\mu \in F^*$. Наконец, условие 3 состоит в том, что форма $\langle a, b, -cd, -ce \rangle$ гиперболична, т.е. $\langle a, b, -cd, d \rangle \approx \langle a, b, -cd, -cde \rangle$. Полагая $\lambda = -cde$, получаем

$$\begin{aligned} \langle a, b, c, d \rangle &\approx \langle a, b, -cd, d \rangle \approx \langle a, b, -cd, \lambda \rangle \approx \\ &\approx \langle c, d, -cd, \mu \rangle \approx \langle c, d, -1, \mu \rangle \approx \langle a, b, -1, \lambda \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть Q' - гиперплоское сечение квадрики Q , соответствующее подформе $\langle 1, -a, -b, ab, -c, -d \rangle$. Аффинная квадратика $U = Q \cap Q'$ подробно рассмотрена выше. Заметим, что ξ_1 принадлежит образу гомоморфизма $i_*: CH_1 Q' \rightarrow CH_1 Q$, т.е. ограничение ξ_1 на U равно нулю. С другой стороны, ограничение ξ_2 на U равно $[C]$, где C - построенная выше кривая. Поэтому если $[C] \neq 0$, то $\xi_1 \neq \xi_2$. Если же $[C] = 0$, то ξ_2 также принадлежит образу гомоморфизма i_* . Однако группа $CH_1 Q'$ изоморфна $Z \cdot h^3$ или $Z \cdot h^3 \oplus Z/2$, или $Z \cdot l_1$ (см. § 1), так что подгруппа кручения в $\text{Im } i_*$ равна 0 или $Z/2$. Поэтому элементы кручения ξ_1 и ξ_2 , принадлежащие $\text{Im } i_*$, совпадают.

§ 6. Основная теорема

Пусть F - произвольное поле, содержащее $\sqrt{-1}$; $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$; φ' - квадратичная форма $\langle a_1, a_2, a_1 a_2, b_1, b_2, b_1 b_2 \rangle$, $\varphi = \langle 1 \rangle \varphi'$; U - аффинная квадратика, определенная уравнением $\varphi' = -1$ над полем F .

Лемма 6.1. $CH^p U = 0$ при $p=1, 2, 3$.

Доказательство. Пусть X и X' - проективные квадрики, определенные уравнениями $\varphi=0$ и $\varphi'=0$ соответственно. Используем результаты § 1 и точную последовательность

$$CH^{p-1} X' \rightarrow CH^p X \rightarrow CH^p U \rightarrow 0.$$

При $p=1$ сразу получаем $CH^1 U = 0$, так как $CH^1 X = Z \cdot h$ и $h \in \text{Im } (CH^0 X' \rightarrow CH^1 X)$. При $p=2$

точная последовательность показывает, что $CH^2U \neq 0$ только, если $TCH^2X \neq 0$. Последнее означает, согласно 1.5, что форма φ анизотропна и пропорциональна подформе 3-формы Пфистера, т.е. $\varphi_1 < \det \varphi >$ - анизотропная 3-форма Пфистера. Однако форма $\varphi_1 < \det \varphi > = \langle a_1, a_2, a_1 a_2, b_1, b_2, b_1 b_2, 1, 1 \rangle$ содержит гиперболическую плоскость $\mathbb{H} = \langle 1, 1 \rangle$, следовательно, изотропна, откуда $CH^2U = 0$. Осталось рассмотреть группу CH^3U . Если форма φ' анизотропна, то алгебры кватернионов $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ F \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ F \end{pmatrix}$ не имеют общего квадратичного поля расщепления [7], поэтому индекс алгебры $C_0(\varphi) = C(\varphi')$, изоморфной алгебре матриц второго порядка над тензорным произведением $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ F \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ F \end{pmatrix}$ [7], равен 4 и, согласно 1.10, $TCH^3X = 0$; поэтому $CH^3X = \mathbb{Z} \cdot h^3$, откуда $CH^3U = 0$. Если же форма φ' изотропна, то ввиду 1.3 доказываемое утверждение сводится к лемме 5.3. Лемма доказана.

Пусть Y - произвольное многообразие над полем F , $\theta \in Y$ - общая точка. Для каждой точки $u \in Y$ через i_u обозначим естественный морфизм $U_{F(u)} \rightarrow U \times Y$.

Л е м м а 6.2. *Имеет место точная последовательность*

$$CH^4 Y \xrightarrow{\pi^*} CH^4(U \times Y) \xrightarrow{i_\theta^*} CH^4(U_{F(\theta)}) \rightarrow 0,$$

где $\pi: U \times Y \rightarrow Y$ - проекция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим спектральную последовательность K -когомологий 3.1, связанную с морфизмом проекции $\pi: U \times Y \rightarrow Y$:

$$E_1^{p,q}(4) = \coprod_{y \in Y} H^q(U_{F(y)}, K_{4-p}) \implies H^{p+q}(U \times Y, K_4).$$

По лемме 6.1 имеем $E_1^{4-q,q} = \coprod_{y \in Y} CH^q_{F(y)} = 0$ при $q=1, 2, 3$, т.е. все группы $E_1^{p,q}$ на диагонали $p+q=4$, кроме $E_1^{0,4}$ и $E_1^{4,0}$, равны нулю. Следовательно, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccc} E_1^{4,0} & \longrightarrow & CH^4(U \times Y) & \longrightarrow & E_1^{0,4} \longrightarrow 0 \\ \parallel & & & & \parallel \\ \coprod_{y \in Y} CH^0(U_{F(y)}) & & & & CH^4(U_{F(\theta)}) \end{array}$$

Осталось заметить, что образ первого гомоморфизма этой последовательности совпадает с образом гомоморфизма $\pi^*: CH^4 Y \rightarrow CH^4(U \times Y)$.

Л е м м а 6.3. *Пусть $\xi \in CH^4(U \times Y)$ и $u \in Y$ - произвольная точка. Если $i_u^*(\xi) \neq 0 \in CH^4(U_{F(u)})$, то и $i_\theta^*(\xi) \neq 0 \in CH^4(U_{F(\theta)})$. Иначе говоря, существует гомоморфизм $CH^4 U_{F(\theta)} \rightarrow CH^4(U_{F(u)})$, замыкающий коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
 & i_{\theta}^* & \\
 & \longleftarrow & \\
 \text{CH}^4(U_{F(\theta)}) & & \text{CH}^4(U \times Y) \\
 & \searrow & \swarrow i_y \\
 & & \text{CH}^4(U_{F(y)})
 \end{array}$$

Доказательство. Пусть $i_{\theta}^*(\xi)=0$. Тогда по лемме 6.3 $\xi=\pi^*(\xi')$ для некоторого $\xi' \in \text{CH}^4 Y$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 U \times Y & \xleftarrow{i_y} & U_{F(y)} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \alpha \\
 Y & \xleftarrow{\beta} & \text{Spec } F(y)
 \end{array}$$

получаем $i_y^*(\xi)=i_y^* \circ \pi^*(\xi')=\alpha^* \circ \beta^*(\xi')=0$, так как $\text{CH}^4(\text{Spec } F(y))=0$.

Положим $a_3=a_1 a_2$, $b_3=b_1 b_2$, и пусть Y - гиперповерхность в \mathbb{A}^7 , определенная уравнением $\prod_{i=1}^3 (a_i x_i^2 + b_i y_i^2) = t^2$ (x_i, y_i, t - координаты в \mathbb{A}^7). Для произвольного множества A обозначим через F_A композит полей функций $F(Y^{(\alpha)})$, где $Y^{(\alpha)}=Y$ для всех $\alpha \in A$.

Лемма 6.4. Любая анизотропная квадратичная форма над полем F остается анизотропной и над полем F_A .

Доказательство. Достаточно доказать, что расширение $F(Y)/F$ не расщепляет анизотропных квадратичных форм. Это получается из следствия 4.8, поскольку многообразие Y содержит неособую рациональную точку $x_i=1, y_i=0$ ($i=1, 2, 3$), $t=a_3$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 6.5. Пусть F - поле, содержащее $\sqrt{-1}$; элементы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ таковы, что форма $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$ анизотропна; A - произвольное множество (возможно, бесконечное). Пусть Q - проективная квадратика над полем $F_A \supset F$, соответствующая форме $\langle 1, a_1, a_2, a_1 a_2, b_1, b_2, b_1 b_2 \rangle$. Тогда группа $\text{TCH}^4 Q$ содержит по крайней мере $\text{card } A$ различных элементов.

Замечание 6.6. Взяв бесконечное множество A , получаем 5-мерную квадратичку Q с бесконечной группой $\text{TCH}^4 Q = \text{TCH}_1 Q$. Более общо, для любого $p \geq 4$ ($q \geq 1$) можно построить квадратичку с бесконечной группой $\text{TCH}^p(\text{TCH}_q)$, взяв, скажем, форму, задающую Q , и добавив к ней $p-4$ гиперболических плоскостей ($q-1$ гиперболических плоскостей). Отметим, что, согласно § 1, группы TCH^p при $p \geq 3$ и группа TCH_0 являются конечными для любой квадратички.

Доказательству теоремы предположим некоторые предварительные построения. Пусть, как и раньше, U - аффинная квадратичка

$$1 + a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2 + b_1 V_1^2 + b_2 V_2^2 + b_3 V_3^2 = 0$$

над полем F (напомним, что $a_3 = a_1 a_2$, $b_3 = b_1 b_2$). Предположим, что даны некоторое расширение E/F и элементы $x_i, y_i \in E^*$ ($i=1, 2, 3$), причем $\prod_{i=1}^3 (a_i x_i^2 + b_i y_i^2) = t^2$ при некотором $t \in E^*$. Через $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ обозначаем стандартный базис пространства квадратичной формы φ_E , где $\varphi = \langle 1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \rangle$ - квадратичная форма над F . Определитель 4-мерной подформы, порожденной векторами $e, x_i f_i + y_i g_i$ ($i=1, 2, 3$), равен t^2 . Следовательно, эта подформа определяет на проективном замыкании квадрики U_E простой цикл "двойная прямая" (см. 1.8), ограничение которого на U_E мы обозначаем через C . Кривая C задается системой уравнений

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B_3 = 0, \\ 1 + (a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2) A_1^2 = 0, \\ t A_3 = (a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2)(a_2 x_2^2 + b_2 y_2^2) A_1 A_2, \end{cases}$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ - координаты в ортогональном базисе $x_i f_i + y_i g_i, b_i y_i f_i - a_i x_i g_i$ ($i=1, 2, 3$). Переходя к координатам U_i, V_i , как несложно проверить, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_i U_i - x_i V_i = 0 \quad (i=1, 2, 3), \\ a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2 + (a_1 x_1 U_1 + b_1 y_1 V_1)^2 = 0, \\ t(a_3 x_3 U_3 + b_3 y_3 V_3) = (a_3 x_3^2 + b_3 y_3^2)(a_1 x_1 U_1 + b_1 y_1 V_1)(a_2 x_2 U_2 + b_2 y_2 V_2). \end{cases}$$

Пусть теперь $E = F(Y)$. Выписанная система уравнений определяет замкнутое подмногообразие в $U \times_F Y$, которое мы обозначим через Z . По определению обратный образ Z при морфизме $U_E \rightarrow U \times_F Y$ совпадает с кривой $C \subset U_E$, построенной выше. Для каждой точки $y \in Y$ через i_y обозначаем, как и раньше, естественный морфизм $U_{F(y)} \rightarrow U \times_F Y$; пусть Z_y - цикл $i_y^*(Z)$ на $U_{F(y)}$. Как мы уже знаем, $Z_\theta = C$ для общей точки $\theta \in Y$. Рассмотрим две замкнутые точки u и v на Y , определенные соответственно уравнениями $x_1 = 1, y_1 = 0, t = a_3$ и $x_1 = 0, y_1 = 1, t = b_3$. Вычислим цикл Z_u на U . Очевидно, он задается уравнениями

$$\begin{cases} V_1 = V_2 = V_3 = 0, \\ 1 + a_1 U_1^2 = 0, \\ U_3 = U_1 U_2, \end{cases}$$

т.е. является ограничением на U цикла "двойная прямая", связанного с подформой $\langle 1, a_1, a_2, a_3 \rangle$ в φ . Аналогично цикл Z_v является ограничением "двойной прямой", связанной с подформой $\langle 1, b_1, b_2, b_3 \rangle$ в φ .

Рассмотрим теперь многообразие $U \times Y_1 \times Y_2$, где $Y_1 = Y_2 = Y$, и две его проекции π_1 и π_2 на $U \times Y$. Рассмотрим цикл $\Lambda = \pi_1^*(Z) - \pi_2^*(Z)$ на этом многообразии. Пусть $\eta \in Y_1 \times Y_2$ - общая точка. Вычислим цикл Λ_η на $U_{F(\eta)}$. Пусть $\theta_j \in Y_j$ - общая точка и C_j - цикл на $U_{F(\theta_j)}$, описанный выше (обозначавшийся ранее через C). Ясно, что $F(\eta) = F(\theta_1) \cdot F(\theta_2)$.

Так как композиция $U_{F(\eta)} \rightarrow U_{\times_F Y_1 \times_F Y_2} \xrightarrow{\pi_j} U_{\times_F Y_j}$ совпадает с $U_{F(\eta)} \rightarrow U_{F(\theta_j)} \rightarrow U_{\times_F Y_j}$, то

$$\pi_1^*(Z)_\eta = Z_{\theta_1} \otimes_{F(\theta_1)} F(\eta) = C_1 \otimes_{F(\theta_1)} F(\eta)$$

и аналогично $\pi_2^*(Z)_\eta = C_2 \otimes_{F(\theta_2)} F(\eta)$, следовательно,

$$\Lambda_\eta = \pi_1^*(Z)_\eta - \pi_2^*(Z)_\eta = C_1 \otimes_{F(\theta_1)} F(\eta) - C_2 \otimes_{F(\theta_2)} F(\eta).$$

Пусть теперь $w=(u,v) \in Y_1 \times Y_2$; вычислим Λ_w . Так как композиция $U \xrightarrow{i_w} U_{\times_F Y_1 \times_F Y_2} \rightarrow U_{\times_F Y_1}$ совпадает с i_u , то $\pi_1^*(Z)_w = i_u^*(Z) = Z_u$. Аналогично $\pi_2^*(Z)_w = Z_v$. Поэтому $\Lambda_w = \pi_1^*(Z)_w - \pi_2^*(Z)_w = Z_u - Z_v$.

Предложение 6.7. Циклы $C_1 \otimes F(\eta)$ и $C_2 \otimes F(\eta)$ на $U_{F(\eta)}$ неэквивалентны.

Доказательство. Пусть X и X' - проективные квадрики над полем F , соответствующая формам φ и φ' . Имеем точную последовательность $\text{CH}^3 X' \rightarrow \text{CH}^4 X \rightarrow \text{CH}^4 U \rightarrow 0$. По условию форма $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$ анизотропна, поэтому «двойные прямые» на X , соответствующие подформам $\langle 1, a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $\langle 1, b_1, b_2, b_3 \rangle$ формы φ , неэквивалентны. Форма φ' анизотропна и имеет определитель, равный 1, следовательно, не может содержать 4-мерной подформы определителя 1, откуда в силу 1.9 группа $\text{CH}^3 X'$, а следовательно, и ее образ в $\text{CH}^4 X$ не содержат кручения. Поэтому ограничения этих «двойных прямых» на U - циклы Z_u и Z_v - также неэквивалентны, т.е. $[\Lambda_w] \neq 0 \in \text{CH}^4 U$. Отсюда, согласно лемме 6.3, $[\Lambda_\eta] \neq 0 \in \text{CH}^4(U_{F(\eta)})$, т.е. циклы $C_1 \otimes F(\eta)$ и $C_2 \otimes F(\eta)$ неэквивалентны.

Доказательство теоремы 6.5. Пусть $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ - стандартный базис пространства квадратичной формы $\langle 1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \rangle$ над полем F_A . Поле F_A содержит для каждого $\alpha \in A$ поле функций $F(Y^{(\alpha)})$ и вместе с ним элементы $x_i^{(\alpha)}, y_i^{(\alpha)}$ ($i=1, 2, 3$), $t^{(\alpha)}$, причем $\prod_{i=1}^3 (a_i x_i^{(\alpha)^2} + b_i y_i^{(\alpha)^2}) = t^{(\alpha)^2}$. Определитель 4-мерной подформы $\psi^{(\alpha)}$, порожденной векторами $e, e_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)} f_i + y_i^{(\alpha)} g_i$ ($i=1, 2, 3$), равен t^2 . Следовательно, эта подформа определяет некоторый элемент кручения $\xi^{(\alpha)} \in \text{ТCH}^4 Q$ (см. 1.8). Мы докажем, что все элементы $\xi^{(\alpha)}$ ($\alpha \in A$) различны.

Фиксируем $\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$, и докажем, что $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$.

Идея доказательства состоит в проведении такой «специализации» переменных x, y , чтобы векторы $e, e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}, e_3^{(\alpha)}, e_1^{(\beta)}, e_2^{(\beta)}, e_3^{(\beta)}$ стали попарно ортогональными. Тогда циклы $\xi^{(\alpha)}$ и $\xi^{(\beta)}$ можно будет сравнить с помощью теоремы 5.1. Подберем такую «специализацию». Нужно добиться, чтобы $(e_i^{(\alpha)}, e_i^{(\beta)}) = 0$ при $i=1, 2, 3$ (остальные пары ортогональны с самого начала). Поскольку

$$(e_i^{(\alpha)}, e_i^{(\beta)}) = a_i x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)} + b_i y_i^{(\alpha)} y_i^{(\beta)},$$

подходящей «специализацией» будет $x_i^{(\beta)} = y_i^{(\alpha)} = 0, x_i^{(\alpha)} = y_i^{(\beta)} = 1$. При этом получим $\psi^{(\alpha)} = \langle a_1, a_2 \rangle, \psi^{(\beta)} = \langle b_1, b_2 \rangle$, и условие $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$ станет эквивалентно условию

анизотропности формы $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$ в силу теоремы 5.1.

Оформим строго изложенную идею доказательства. Заменяв F на $F_{A \setminus \{\alpha, \beta\}}$, сведем доказательство к случаю $A = \{\alpha, \beta\}$ (форма $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$ остается анизотропной в силу леммы 6.4). В обозначениях предложения 6.7 пусть $Y_1 = Y^{(\alpha)}$, $Y_2 = Y^{(\beta)}$. Тогда $F_A = F(\eta)$, где $\eta \in Y_1 \times_F Y_2$ - общая точка, и

$$(\xi^{(\alpha)} - \xi^{(\beta)}) \Big|_{U_{F(\eta)}} = [C_1 \otimes F(\eta)] - [C_2 \otimes F(\eta)] \neq 0 \in \text{CH}^4(U_{F(\eta)}).$$

Следовательно, $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$. Теорема доказана.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Х а р т с х о р н Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
- [2] Q u i l l e n D. Higher K-theory. I // Lect. Notes. Math. 1973. Vol.341. P.77-139.
- [3] С е р р Ж.-П. Локальная алгебра и теория кратностей // Математика. 1963. Т.7, №5. С.3-93.
- [4] Ш а ф а р е в и ч И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.
- [5] S w a n R.G. K-theory of quadric hypersurfaces // Ann. Math. 1985. Vol.122, №1. P.113-154.
- [6] К а р п е н к о Н.А. Алгебро-геометрические инварианты квадратичных форм // Алгебра и анализ. 1990. Т.2, вып.1. С. 141-162.
- [7] L a m T.Y. The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, Reading, Mas. 1973.
- [8] К а т о К. Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles // Contemp. Math. 1986. Vol.55, №1. P.241-254.
- [9] В а с с Н., Т а т е J. The Milnor ring of a global field // Lect. Notes Math. 1973. Vol.342. P.349-446.
- [10] М и л н о р J. Algebraic K-theory and quadratic forms // Invent. Math. 1970. Vol.9, №4. P.318-344.
- [11] К а р т а н А., Э й л е н б е р г С. Гомологическая алгебра. М.: Изд-во иностр. лит. 1960.
- [12] М е р к у р ж е в А.С., С у с л и н А.А. On the norm residuc homomorphism of degree three. LOMI Preprints. 1986. E-9-86.
- [13] А р а с о н J.K. Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen // J. Algebra. 1975. Vol.36. P.448-491.

Ленинградский
государственный университет
199034, Ленинград,
Университетская наб., 7/9

Поступило 14 июня 1989 г.