# L'influence d'Alexandre GROTHENDIECK en $K$-théorie algébrique et en $K$-théorie topologique.
# par Max KAROUBI

Dans sa démonstration du théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique en 1957, Grothendieck avait introduit un groupe mystérieux à l'époque, noté $K(X)$. Ici $X$ est une variété algébrique quasi-projective non singulière disons sur le corps des complexes. Ce groupe $K(X)$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie $[E]$ de fibrés algébriques par le sous-groupe engendré par les relations $[E] = [E'] + [E"]$, chaque fois qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

On peut considérer les éléments de $K(X)$ comme des "classes" formelles de fibrés vectoriels sur $X$, d'où la terminologie "$K$-théorie", la lettre $K$ suggérant le mot "Klassen" en allemand, la langue maternelle de Grothendieck. Une définition équivalente en termes de faisceaux algébriques cohérents est possible ; cf. [BS] théorème 2 et la remarque au bas de la page 108.

Le groupe $K(X)$ est en fait un foncteur contravariant de $X$ (pour l'image réciproque des fibrés). C'est aussi un foncteur covariant pour les morphismes propres $f : X \longrightarrow Y$. En effet, Grothendieck leur associe des "homomorphismes de Gysin" $f_*^K : K(X) \longrightarrow K(Y)$ qui jouissent de nombreuses propriétés formelles qu'on ne développera pas ici. Cependant, il est important de mentionner le cas où $Y$ est réduit à un point et $X$ projective. Alors $f_*^K(E)$ est la somme alternée suivante (bien connue par Serre et Hirzebruch [H], 1954):

$$\sum (-1)^k dim(H^k(X; E))$$

en convenant d'identifier $E$ au faisceau de ses sections algébriques.

Si $E$ est un fibré algébrique, on peut le voir comme un fibré topologique sur l'espace topologique sous-jacent à $X$ et il a donc des classes caractéristiques de Chern $c_i(E)$ appartenant à $H^{2i}(X; Z)$. En suivant Hirzebruch, écrivons la classe totale de Chern

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots$$

comme un produit formel

$$c(E) = \prod (1 + x_i)$$

où les $x_i$ sont de degré 2. La "classe de Todd" du fibré $E$ est alors définie comme le produit formel

$$Todd(E) = \prod \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

qu'on exprime en chaque degré comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires des $x_i$, donc des $c_i = c_i(E)$. D'après Hirzebruch [H] 1954, on a plus précisément les formules suivantes en bas degrés

(dans la cohomologie rationelle)

$$\begin{array}{rcl} Todd_0(E) & = & 1 \\ Todd_1(E) & = & c_1/2 \\ Todd_2(E) & = & (c_2 + c_1^2)/12 \\ Todd_3(E) & = & c_2 c_1/24 \\ Todd_4(E) & = & (-c_4 + c_3 c_1 + 3c_2^2 + 4c_2 c_1^3 - c_1^4)/720 \\ \dots & & \end{array}$$

Par sa définition même, la classe de Todd est "multiplicative", c'est-à-dire vérifie l'identité

$$Todd(E \oplus F) = Todd(E).Todd(F)$$

On définit par le même formalisme un "caractère de Chern", qui est un homomorphisme d'anneaux de $K(X)$ vers la cohomologie rationelle en degrés pairs $H^{pair}(X)$, par la formule suivante (où $n$ est le rang de $E$)

$$Ch(E) = \sum_{i=1}^{n} exp(x_i)$$

Parallèlement à $f_*^K$, un homomorphisme de Gysin est classiquement défini en cohomologie

$$f_*^H : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$$

Cependant, le diagramme évident (qui représente bien la "vision fonctorielle" de Grothendieck)

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "f_*^K"] \arrow[d, "Ch"'] & K(Y) \arrow[d, "Ch"'] \\ H^*(X) \arrow[r, "f_*^H"] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

n'est PAS commutatif. La déviation de commutativité est donnée par les classes de Todd des fibrés tangents $TX$ et $TY$ à $X$ et $Y$ respectivement. Plus précisément, pour tout fibré $E$ sur $X$, le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck (RRG) s'écrit ainsi :

$$f_*^H(Ch(E).Todd(TX)) = Ch(f_*^K(E)).Todd(TY)$$

En raison du caractère linéaire des deux membres par rapport à $E$, cette formule est équivalente à la suivante (pour tout élément $x$ de $K(X)$)

$$f_*^H(Ch(x).Todd(TX)) = Ch(f_*^K(x)).Todd(TY)$$

En multipliant par $(Todd(TY))^{-1}$, elle s'écrit également

$$f_*^H(Ch.Todd(Tf)) = Ch(f_*^K(x))$$

où $Todd(Tf) = Todd(TX).f^*(Todd(TY)^{-1})$ est par définition la classe de Todd du "fibré tangent le long des fibres" de $f$, soit formellement $[TX] - [f^*TY]$.

Si $Y$ est un point, cette formule se réduit à celle de Riemann-Roch-Hirzebruch (cf. [H] 1954) :

$$f_*^H(Ch(E).Todd(TX)) = \sum (-1)^k dim(H^k(X; E))$$

qui a été démontrée avant Grothendieck par des méthodes tout à fait différentes. En particulier, le premier membre (à priori rationnel) est un nombre entier, ce qui n'est nullement évident à priori.

Il est important de noter que dans la formule de RRG, on peut remplacer la cohomologie usuelle par une cohomologie plus "algébrique" qui est l'anneau gradué $A(X)$ des classes de cycles algébriques sur $X$ pour l'équivalence linéaire, la graduation étant déterminée par la codimension des cycles. Cet anneau est un invariant plus fin que la cohomologie usuelle qui ne dépend que de la topologie de $X$. Dans ce cadre plus algébrique, Grothendieck a construit une théorie des classes de Chern et du caractère de Chern tout à fait analogue à la théorie classique [G1]. Le caractère de Chern induit alors un isomorphisme

$$K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} A(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

La formule de RRG énoncée plus haut est loin d'être la plus générale. Dans SGA6 [G2], Grothendieck et ses collaborateurs se débarrassent de plusieurs hypothèses gênantes (nécessité d'un corps de base $k$, régularité de $X$ et $Y$, hypothèses trop restrictives de quasi-projectivité pour $X$ et $Y$, etc.). Pour réaliser ce programme, il faut redéfinir le groupe $K(X)$ pour un schéma $X$ le plus général possible. Dans ce cadre, la "bonne" catégorie n'est pas celle des fibrés vectoriels mais celle des complexes parfaits. Par définition, un tel complexe est localement quasi-isomorphe à un complexe borné de fibrés vectoriels. La $K$-théorie est alors décrite à partir de triangles de complexes plutôt que de suites exactes. Ce type de théorie a trouvé des applications importantes dans de nombreux travaux ultérieurs en géométrie et en topologie : Waldhausen [W], Thomason et Trobaugh [TT][1], Schlichting [Sc], etc. Nous y reviendrons un peu plus loin.

Revenons cependant à la $K$-théorie "traditionnelle". Quelques années après Grothendieck, Atiyah et Hirzeburch [A] ont exploité cette idée pour construire une "$K$-théorie topologique", $K^{top}(X)$, autrement dit une théorie construite avec des fibrés vectoriels topologiques (disons à fibre un espace vectoriel complexe pour commencer). Ils ont aussi démontré un théorème de Riemann-Roch différentiable sous la forme suivante [AH] : soit $f : X \longrightarrow Y$ une application différentiable propre entre deux variétés $C^\infty$ telle que le fibré tangent le long des fibres $Tf = [TX] - [f^*TY]$ soit muni d'une structure complexe stable (ou même seulement $^c$spinorielle, cf. [K1] p.289) . On a alors une formule de Riemann-Roch dans ce contexte différentiable qui s'écrit ainsi

$$f_*^H(Ch(x).Todd(Tf)) = Ch(f_*^K(x))$$

Comme en $K$-théorie algébrique, celle-ci mesure la non commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} K^{top}(X) \arrow[r, "f_*^K"] \arrow[d, "Ch"'] & K^{top}(Y) \arrow[d, "Ch"'] \\ H^*(X) \arrow[r, "f_*^H"] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

Ici $f_*^K$ est un homomorphisme de Gysin en $K$-théorie topologique dont la définition est sensiblement différente de celle de Grothendieck. Pour un plongement par exemple, elle utilise essentiellement "l'isomorphisme de Thom"

$$K^{top}(X) \to K_c^{top}(\nu)$$

($\nu$ étant le fibré normal à $X$ dans $Y$ et $K_c^{top}$ désignant la $K$-théorie à supports compacts). Celui-ci se déduit des théorèmes de périodicité de Bott qui expriment que la $K$-théorie topologique des sphères $S^n$ est périodique par rapport à $n$ (période 2 dans le cas complexe, 8 dans le cas réel).

[1]En fait, Thomason et Trobaugh supposent toujours quelques conditions du type $X$ quasi-compact et quasi-séparé.

En fait, le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck dans le cas des fibrés algébriques complexes et pour la cohomologie ordinaire résulte du théorème d'Atiyah-Hirzebruch mentionné ci-dessus et d'un théorème de Baum-Fulton-Mac Pherson [BFP] qui exprime la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{top}(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K^{top}(Y) \end{array}$$

Les deux $f_*^K$ sont les homomorphismes de Gysin en $K$-théorie algébrique ou topologique respectivement.

Une différence essentielle entre les $K$-théories algébrique et topologique est que cette dernière est plus calculable. Par exemple le caractère de Chern induit un isomorphisme

$$K^{top}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{pair}(X; \mathbb{Q})$$

Par contre, les deux $K$-théories ont beaucoup de points en commun, notamment l'existence d'opérations non additives en général, définies à l'aide des puissances extérieures de fibrés vectoriels, soit

$$\lambda^k : K(X) \to K(X)$$

qui font de $K(X)$ ce que Grothendieck appelle un $\lambda$-anneau. D'autres opérations $\psi^k$ en $K$-théorie furent introduites ultérieurement par Adams [K1]. Elles s'expriment comme fonctions polynomiales des $\lambda^i$, soit $\psi^k = Q_k(\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$, où $Q_k$ est le polynôme de Newton. Ces opérations $\lambda^k$ et $\psi^k$ sont beaucoup plus manipulables que leurs analogues cohomologiques. Pour s'en convaincre, il suffit de parcourir les ouvrages classiques de topologie algébrique et constater la technicité délicate requise pour définir avec soin les opérations de Steenrod...

La $K$-théorie topologique a connu des applications spectaculaires dans les années 60 et a été une des inspirations d'Atiyah et Singer pour leur célèbre théorème de l'indice [AS]. La manière la plus élégante d'énoncer ce théorème est de définir deux indices "analytique" et "topologique" pour une variété $C^\infty$ compacte $X$

$$i_a : K_c^{top}(T^*X) \to \mathbb{Z} \; et \; i_t : K_c^{top}(T^*X) \to \mathbb{Z}$$

L'homomorphisme $i_a$ est défini grâce aux opérateurs pseudo-différentiels sur $X$ alors que $i_t$ est défini en utilisant essentiellement l'homomorphisme de Gysin en $K$-théorie topologique. L'égalité de ces deux indices est une généralisation du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch (RRH). En considérant des familles d'opérateurs, Atiyah et Singer obtiennent même une généralisation de RRG dans un cadre différentiable mais il est clair que les idées fondamentales de Grothendieck ont inspiré une grande partie de leur formalisme.

L'influence de Grothendieck s'est étendue bien au delà de ces dernières considérations, grâce à un mélange intime de géométrie algébrique et de topologie. Si nous revenons à la géométrie algébrique classique, il paraissait clair dans les années 60 que le problème d'une bonne définition des "foncteurs dérivés" de la $K$-théorie se posait, $K(X)$ n'étant que le premier groupe $K_0(X)$ de cette série de foncteurs. Des définitions de $K_1$ et de $K_2$ avaient déjà été proposées par Bass et Milnor [Ba],[M1], motivées par des applications arithmétiques intéressantes. Le déclic est venu de Grothendieck lui-même qui avait eu le premier l'idée d'associer un ensemble simplicial à une catégorie arbitraire (appelé aussi nerf de cette catégorie), bien qu'il ne l'ait jamais publiée. Ainsi les simplexes de dimension 0 sont les objets, ceux de dimension 1 les flèches, ceux de dimension 2 les flèches composables, etc. La réalisation géométrique de cet ensemble simplicial est un objet intéressant en soi. On retrouve par exemple l'espace classifiant d'un groupe discret $G$, en considérant une catégorie avec un seul objet, les morphismes étant les éléments du groupe.

Pour définir les groupes $K_n(X)$ (avec $K_0(X) = K(X)$), Quillen [Q] associe à $X$ une catégorie astucieuse $Q(X)$, dont les objets sont les fibrés vectoriels $E$ sur $X$, un morphisme de $E$ vers $F$ étant donné par un sous-fibré $F'$ de $F$ et une surjection de $F$' sur $E$

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d] & F \\ E & \end{tikzcd}$$

La loi de composition dans cette catégorie s'exprime simplement par une juxtaposition de diagrammes. Quillen définit alors les groupes $K_n(X)$ comme les groupes d'homotopie de l'ensemble simplicial associé à $Q(X)$ (avec un décalage de degrés). On les notera simplement $\pi_{n+1}(Q(X))$. Il n'est pas difficile de voir que $\pi_1(Q(X))$ est bien le groupe $K(X)$ de Grothendieck.

Quillen a explicité de nombreuses applications de sa définition. Par exemple, si $X = Spec(A)$, le calcul (rationnel) de $K_*(X)$ est équivalent à celui de l'homologie rationnelle du groupe linéaire discret infini $GL(A) = colim \;\; GL_n(A)$. Plus précisément $H_*(GL(A); \mathbb{Q})$ est une algèbre extérieure graduée sur les groupes $K_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Le cas où $A$ n'est pas commutatif peut être traité de manière analogue en remplaçant les fibrés vectoriels sur $X$ par les modules projectifs de type fini sur $A$.

Par exemple, si $A$ est l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres avec $r_1$ places complexes et $r_2$ places réelles, on déduit des calculs de Borel [Bo] et du fait que les $K_n(X)$ sont des groupes abéliens de type fini [Q] les résultats suivants :

$$\begin{array}{rcl} K_{2j}(X) & & est\ un\ groupe\ fini\ pour\ j > 0 \\ K_{4j-1}(X) & = & Z^{r_1} \oplus\ un\ groupe\ fini \\ K_{4j+1}(X) & = & Z^{r_1+r_2} \oplus\ un\ groupe\ fini \end{array} \tag{1}$$

Comme illustrations de ces techniques, voici deux applications spectaculaires de la $K$-théorie algébrique "supérieure" que nous venons de définir.

**Théorème de Matsumoto** [M1] *Si $F$ est un corps, $K_2(F)$ est isomorphe naturellement au quotient de $F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^*$ par le sous-groupe engendré par les relations $u \otimes (1-u)$, où $u \in F - \{0, 1\}$.*

**Théorème de Merkurjev Suslin** [Sr]. *Si $F$ est un corps, on a un isomorphisme naturel*

$$K_2(F)/nK_2(F) \cong H^2(G; (\mu_n)^{\otimes 2})$$

*où $\mu_n$ désigne le groupe des racines de l'unité dans la clôture algébrique de $F$, de groupe de Galois $G$. Si on suppose en outre $\mu_n \subset F$, ce groupe $K_2(F)/nK_2(F)$ est isomorphe à la $n$-torsion du groupe de Brauer de $F$.*

*Exemple* : si $n = 2$, on montre ainsi que tout élément de la 2-torsion du groupe de Brauer d'un corps quelconque est la classe du produit tensoriel d'algèbres de quaternions.

Un lien plus direct avec la géométrie algébrique découvert par Quillen [Q] est le suivant : soit $\mathcal{K}_p$ le faisceau sur $X$ associé au préfaisceau

$$U \to K_p(U)$$

Le groupe de cohomologie $H^p(X; \mathcal{K}_p)$ est alors isomorphe au groupe de Chow $A^p(X)$. Nous renvoyons le lecteur au livre de Srinivas [Sr] pour de nombreuses autres applications de la théorie de Quillen.

Une idée maîtresse dans l'œuvre de Grothendieck a été l'introduction des catégories dérivées. Ce formalisme a permis à Waldhausen [W] puis à Thomason-Trobaugh [TT] de définir les groupes $K_n(X)$ avec de bonnes propriétés formelles pour des schémas quasiment arbitraires, ce que nous avions déjà évoqué un peu plus haut. En effet, dans SGA6, Grothendieck et ses collaborateurs [G2] définissent le groupe $K_0$ d'une catégorie dérivée et d'un schéma $X$. Pour définir les groupes $K_n$ pour $n > 0$, on considére aussi la catégorie des complexes parfaits de faisceaux sur $X$. Dans cette catégorie, on a la notion de quasi-isomorphisme et de cofibration, notions que Waldhausen et Thomason-Trobaugh utilisent de manière abstraite pour étendre la définition de Quillen au cadre plus général des schémas. Comme dans le cas des fibrés vectoriels sur les variétés, on associe à une catégorie de complexes parfaits un ensemble simplicial dont les groupes d'homotopie sont (à un décalage près) les groupes $K_n(X)$ recherchés.

A cette occasion, Thomason et Trobaugh répondent à une question laissée ouverte dans SGA 6. Soit $X$ un schéma et $\mathcal{F}$ un complexe parfait au-dessus d'un ouvert affine $U$ de $X$. Alors on peut l'étendre (à quasi-isomorphisme près) en un complexe parfait sur $X$ si et seulement si sa classe dans $K_0(U)$ appartient à l'image de l'homomorphisme de restriction $K_0(X) \to K_0(U)$. Ce résultat est une application frappante des méthodes de $K$-théorie à la géométrie algébrique.

Parallèlement à la $K$-théorie algébrique qui s'est développée après Grothendieck, sous l'impulsion de Bass, Milnor, Quillen, Waldhausen, Thomason... , la $K$-théorie topologique ne s'est pas arrêtée à Atiyah, Hirzebruch, Singer et d'autres. Dès la fin des années 60 et surtout dans les années 70, elle a pris un nouveau départ dans le cadre de l'analyse fonctionnelle (les premières amours de Grothendieck !). Ainsi pour toute algèbre de Banach $A$ non nécessairement commutative, on peut définir [K1] des groupes de $K$-théorie topologiques $K_n(A)$ qui sont périodiques de période 8 dans le cas réel et 2 dans le cas complexe (théorèmes analogues à ceux de Bott).

Cette périodicité a beaucoup intrigué les algébristes, car les groupes $K_n$ de Quillen et Thomason sont loin d'être périodiques. Il existe cependant une "périodicité galoisienne" cachée ; cf. par exemple [FG], où plusieurs versions algébriques de la périodicité de Bott sont présentées.

Si $A$ et $B$ sont des $C^*$-algèbres, Kasparov [Bl] a même réussi à définir des "bifoncteurs" $KK_n(A, B)$ par des méthodes analytiques et montré que le théorème d'Atiyah-Singer peut se démontrer par un simple formalisme de "$KK$-théorie". Il n'existe pas d'analogue de ces bifoncteurs pour les schémas ni même les variétés algébriques.

C'est sans aucun doute les travaux de Connes [C] qui ont donné à la $K$-théorie topologique ses lettres de noblesse les plus récentes dans le cadre de la "géométrie non commutative", un concept paradoxalement éloigné de la problématique initiale de Grothendieck.

Faute de place, nous nous limiterons à une seule application de la $K$-théorie topologique concernant les $C^*$-algèbres $AF$ (pour "approximativement finies"). Une telle algèbre est l'adhérence dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert d'une limite inductive d'algèbres complexes semi-simples de dimension finie. Alors deux telles algèbres $AF$, soient $A$ et $B$, sont isomorphes si et seulement si les groupes ordonnés $K_0(A)$ et $K_0(B)$ sont isomorphes. Un élément de $K_0$ est dit "positif" s'il est la classe d'un "vrai" module (pas seulement une différence), notion qui permet de définir une relation d'ordre sur $K_0$.

On pourra consulter [Bl], [C] et [R] par exemple pour de nombreuses applications de toutes ces idées en analyse et en physique théorique.

Pour conclure ce bref exposé, il convient de mentionner la $K$-théorie hermitienne, intermédiaire entre la $K$-théorie algébrique et la $K$-théorie topologique. On la note $KQ(X)$ ou plus précisément ${}_\epsilon KQ(X)$ en tenant du compte du signe de symétrie $\epsilon = \pm 1$. Très sommairement, on la construit comme la $K$-théorie algébrique des fibrés vectoriels $E$, en se donnant en plus une forme $\epsilon$-hermitienne non dégénérée sur $E$. Nous allons donner deux applications frappantes des méthodes de Grothendieck à cette toute nouvelle théorie.

La première est due à Voevodsky [V]. Par des méthodes astucieuses combinant les idées de Grothendieck et Verdier sur les catégories dérivées et triangulées et une topologie adéquate sur les schémas (dite de Nisnevich), Voevodsky a réussi à démontrer la conjecture de Milnor [M2] que nous allons maintenant décrire.

Soit $F$ un corps de caractéristique différente de 2 et soit $W(F)$ l'anneau de Witt défini à partir des formes quadratiques non dégénérées sur les $F$-espaces vectoriels $E$ de dimension finie (les espaces hyperboliques étant identifiés à 0). L'idéal fondamental $I(F)$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif $W(F) \to \mathbb{Z}/2$, défini par la dimension de $E$ modulo 2. Les puissances $I^n(F)$ de cet idéal définissent alors une filtration décroissante de $W(F)$. La conjecture de Milnor, démontrée par Voevodsky, est la suivante : les quotients successifs $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ sont isomorphes par des flèches explicites à certains groupes $k_n^M(F) = K_n^M(F)/2$ . Ici les groupes de "$K$-théorie de Milnor" $K_n^M(F)$ (à ne pas confondre avec ceux de Quillen) sont définis de manière purement algébrique comme dans le théorème de Matsumoto cité plus haut. Le groupe $K_n^M(F)$ est ainsi le quotient du produit tensoriel de $F^*$ $n$ fois par lui-même - en tant que $\mathbb{Z}$-module - par le sous-groupe engendré par les produits tensoriels $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ , lorsque $x_i + x_j = 1$ pour un couple $(i, j)$ avec $i \neq j$.

Dans un autre ordre d'idées, Schlichting [Sc] a réussi à étendre la théorie de Grothendieck et Thomason-Trobaugh dans un cadre hermitien. Il a pu ainsi redémontrer de manière purement algébrique les théorèmes de périodicité de Bott sous une forme beaucoup plus générale. Dans ce but, on introduit des théories intermédiaires ${}_\epsilon U$ et ${}_{-\epsilon}V$ comme "fibres" des foncteur "hyperbolique"

$$K \to_\epsilon KQ$$

et "oubli"

$${}_{-\epsilon}KQ \to K$$

respectivement, pour des schémas quasiment arbitraires (cf. [K2] et [Sc]). Schlichting démontre alors que les théories ${}_{-\epsilon}V$ et ${}_\epsilon U$ sont les mêmes à un décalage de degrés près. Ceci lui permet de redémontrer dans le cadre des groupes classiques un de mes théorèmes [K2] : pour une algèbre de Banach involutive réelle ou complexe, on a une équivalence d'homotopie naturelle entre les composantes connexes des espaces suivants (où $GL(A)$ et ${}_\epsilon O(A)$ sont respectivement les groupes linéaire et orthogonal "infinis")

$$GL(A)/{}_\epsilon O(A) \text{ } et \text{ } \Omega({}_{-\epsilon}O(A)/GL(A)) \qquad (H)$$

Pour pouvoir écrire ces quotients de groupes classiques, on remarque qu'on a une suite d'inclusions (la dernière en doublant la taille des matrices)

$${}_\epsilon O(A) \subset GL(A) \subset {}_{-\epsilon}O(A)$$

Il est facile de voir que l'équivalence d'homotopie $(H)$ implique les théorèmes de périodicité de Bott classiques en choisissant pour $A$ les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ avec des involutions adéquates. Ce dernier exemple montre à quel point les $K$-théories algébrique et topologique sont imbriquées et le travail qui reste à faire pour mieux comprendre les relations entre elles.

**Quelques souvenirs personnels sur Grothendieck.**

Dans un certain sens, mon parcours mathématique a commencé de manière parallèle à celui de Luc Illusie, entré comme moi à l'Ecole Normale Supérieure et qui a été ensuite élève de Grothendieck. Nous participions tous les deux au séminaire Cartan-Schwartz en 1963/64, où nous commencions à comprendre l'utilité de la $K$-théorie. A cette occasion, je voudrais rendre hommage à Henri Cartan qui a été mon patron de thèse, décédé cette année 2008 à l'âge de 104 ans.

Après ce séminaire de 1963/64, j'avais commencé à avoir des idées sur ma thèse, un peu par hasard, à la suite de nombreux entretiens avec Henri Cartan et Shih Weishu. Quelques éléments étaient déjà écrits en 1965. C'est de cette année que date ma première rencontre avec Grothendieck qui, avec sa générosité habituelle, n'a pas hésité à me prodiguer ses conseils, bien que je n'ai pas été formellement un de ses élèves. Ainsi, par exemple, cette phrase de lui dont je me souviens, après une première rédaction de thèse qu'il avait lue avec soin : "Karoubi, ce n'est pas ainsi qu'on écrit des mathématiques". J'ai eu bien sûr l'occasion de l'écouter à maintes reprises, notamment dans un cours sur le calcul fonctoriel donné à l'Université d'Alger fin 1965, où j'effectuais mon service militaire (sic) dans le cadre de la coopération. Il faut ajouter qu'à cette époque, Grothendieck, avec d'autres mathématiciens français comme Godement, Serre... se déplaçaient plusieurs semaines à Alger pour y donner des cours. Ceux-ci ont contribué au développement d'un Département de Mathématiques, bien nécessaire après la guerre douloureuse (1954-1962) qui s'était conclue par l'indépendance de l'Algérie.

Pendant les années suivantes, Grothendieck est resté attentif à la progression de mes travaux en $K$-théorie, où je cherchais des applications de ses idées. Par exemple, pour démontrer un théorème, j'avais introduit la notion relativement simple d'enveloppe pseudo-abélienne d'une catégorie additive. Cette définition n'avait pas échappé à la perspicacité de Grothendieck qui, comme chacun sait, l'a utilisée plus tard dans sa théorie des motifs. Je l'ai appris d'ailleurs de manière inopinée lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Study à Princeton en 1967 : un visiteur m'a ainsi interpellé, en m'apprenant que Grothendieck utilisait dans ses travaux une notion de catégorie "karoubienne". J'en ai été le premier surpris !

En conclusion, je garde de Grothendieck le souvenir d'une personnalité hors norme sur tous les plans par sa volonté très forte de faire partager ses idées (mathématiques et philosophiques), sa disponibilité sans limite pour les autres et ses conceptions sur ce qu'il est important de faire de notre vie. C'est avec un immense regret que je l'ai vu quitter prématurément la scène scientifique et couper ses relations (pour des raisons qui lui sont propres) avec les nombreux mathématiciens qui l'ont admiré et continuent à le faire, en trouvant tous les jours de nouveaux prolongements et applications de ses idées.

## Références (liste non exhaustive)


[A] M..F. Atiyah. $K$-theory. Benjamin, New York (1967).

[AS] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators. Ann. of Math. 87 (1968), 484-530, 531-545 (avec G. Segal), 546-604.

[AH] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959) 276-281 .

[Ba] H. Bass. Algebraic $K$-theory, Benjamin, New York (1968).

[Be] J. Berrick. An approach to Algebraic $K$-theory. Pitman (1982).

[Bl] B.Blackadar. $K$-theory of operator algebras. Springer (1986).

[BFP] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson. Riemann Roch and topological $K$-theory for singular varieties. Acta Math 143 (1979), 155-192 .

[Bo] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (1974), 235-272 .

[BS] A. Borel et J.-P. Serre. Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 97-136 .

[C] A. Connes. Noncommutative Geometry. Academic Press, San Diego (1994).

[FG] E. Friedlander and D. Grayson. Handbook of $K$-theory. Springer (2005).

[FW] E. Friedlander and C. Weibel. School on Algebraic $K$-theory and applications. An overview of the subject. ICTP Trieste (1997).

[G1] A. Grothendieck. La théorie des classes de Chern. Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 137-154.

[G2] A. Grothendieck, P. Berthelot et L. Illusie (SGA6). Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer Lecture Notes in Maths 225 (1971).

[H] F. Hirzebruch. Topological methods in Algebraic Geometry. Springer $2^e$ édition (1965).

[K1] M. Karoubi. $K$-theory, an introduction. Grundlehren 226, Springer (1978). Nouvelle édition (2008) dans la série "Classics in Mathematics".

[K2] M. Karoubi. Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne. Annals of Math. 112, (1980) 259-282.

[K3] M. Karoubi. Homologie cyclique et K-théorie. Astérisque 149. Société Mathématique de France (1987).

[M1] J. Milnor. Introduction to Algebraic $K$-theory. Annals of Math. Studies 197. Princeton University Press (1974).

[M2] J. Milnor. Algebraic $K$-theory and quadratic forms. Inventiones Math. 9 (1969) 318-344.

[Q] D. Quillen. Higher Algebraic $K$-theory. Springer Lecture Notes in Math. 341 (1973).

[R] J. Rosenberg. Algebraic $K$-theory and its applications. Graduate Texts in Maths. 147. Springer (1994).

[Sc] M. Schlichting. The Mayer-Vietoris principle for the Grothendieck-Witt group of schemes (à paraître au Journal of $K$-theory).

[Sr] V. Srinivas. Algebraic $K$-theory. Birkhauser (1996).

[TT] R. Thomason and T. Trobaugh. Higher Algebraic $K$-theory of schemes and of derived categories. In the Grothendieck Festshrift, vol. III. Prog. in Maths Vol. 88, Birkhauser (1990) 247-435.

[V] V. Voevodsky. The Milnor conjecture. Preprint 1996, available at http://www.math.uiuc.edu/$K$-theory/0170/

[W] F. Waldhausen. Algebraic $K$-theory of spaces. Springer Lecture Notes 1126 (1983) 318-419.