C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 000–000, 2000
Algèbre/*Algebra*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Quelques classes caractéristiques en théorie des nombres

Max KAROUBI [a], Thierry LAMBRE [b],

[a] **UFR de mathématiques, UMR 7586 du CNRS, Université Denis-Diderot, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France**
Courriel : karoubi@math.jussieu.fr
[b] **Département de mathématiques, UMR 7586 et 8628 du CNRS, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France**
Courriel : thierry.lambre@math.u-psud.fr

(Reçu le 10 novembre 1999, accepté après révision le 10 mars 2000)

Résumé. Nous utilisons des idées provenant de l'homologie cyclique [3] et de la K-théorie pour définir une sorte de « caractère de Chern » pour le groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres. Pour un corps quadratique, ce caractère permet de détecter des élements du groupe des classes. Dans le cas cyclotomique, ce caractère est relié aux dérivées logarithmiques de Kummer. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Some characteristic classes in number theory

Abstract. *We use ideas from cyclic homology* [3] *and K-theory to define a kind of "Chern character" for the ideal class group of a number field. In the quadratic case, this character gives nontrivial elements of the class group. In the cyclotomic case, this character is related to the Kummer logarithmic derivatives.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. La trace de Dennis à coefficients

Soient A un anneau unitaire et $n \geq 2$ un entier. On désigne par $\mathrm{Proj}\,(A)$ la catégorie des A-modules à droite, projectifs et de type fini. Pour P dans $\mathrm{Proj}\,(A)$, on pose $nP = P \oplus \cdots \oplus P$ (n facteurs). L'ensemble des triplets (P, α, Q), où P et Q sont dans $\mathrm{Proj}\,(A)$ et où $\alpha : nP \to nQ$ est un isomorphisme de A-modules, s'organise en une catégorie $\mathcal{C}$ dont le groupe de Grothendieck est noté $K(\mathcal{C})$. Soit N le sous-groupe de $K(\mathcal{C})$ engendré par les éléments de la forme $(P, \alpha, Q) + (Q, \beta, R) - (P, \beta\alpha, R)$. Le groupe quotient $K_1(A\,; \mathbf{Z}/n) := K(\mathcal{C})/N$ s'appelle le (premier) groupe de K-théorie à coefficients de A. On note $[P, \alpha, Q] \in K_1(A\,; \mathbf{Z}/n)$ la classe de $(P, \alpha, Q) \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$. De la suite exacte de Bass ([1], p. 375), on

Note présentée par Alain CONNES

PII here

déduit l'extension

$$1 \longrightarrow K_1(A)/(n) \xrightarrow{\rho} K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\partial} K_0(A)_{(n)} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Par ailleurs, supposons que A soit une algèbre sur un anneau commutatif k. Notons $(C_*(A), b)$ le complexe de Hochschild de A. La multiplication par n dans $(C_*(A), b)$, notée $\cdot n : (C_*(A), b) \to (C_*(A), b)$ est un morphisme de complexes. L'homologie du cône $(\mathrm{co}\,(\cdot\, n), d)$ de ce morphisme est notée $\mathrm{HH}_*(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$. On a la suite exacte tautologique

$$0 \longrightarrow \mathrm{HH}_1(A)/(n) \xrightarrow{\rho} \mathrm{HH}_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\partial} \mathrm{HH}_0(A)_{(n)} \longrightarrow 0.$$

Désignons par $\mu : A \otimes_k A \to A$ la multiplication de A et posons $\Omega^1_{\mathrm{nc}}(A) = \ker \mu$. On sait que $\Omega^1_{\mathrm{nc}}(A)$ est le sous-bimodule de $A \otimes_k A$ engendré par les 1-formes différentielles « non commutatives » $d_{\mathrm{nc}}a := 1 \otimes a - a \otimes 1$ avec $a \in A$. La structure de A-bimodule évidente sur $\Omega^1_{\mathrm{nc}}(A)$ peut s'exprimer par la relation $d_{\mathrm{nc}}(a_0a_1) = d_{\mathrm{nc}}(a_0)a_1 + a_0d_{\mathrm{nc}}a_1$ (*cf*. [3] et [4]).

Un système de coordonnées sur $P \in \mathrm{Proj}\,(A)$ est une suite $\mathcal{S} = (x_j, \varphi_j)_{1\le j\le r}$ avec $x_j \in P$ et $\varphi_j \in P^*$ telle que pour tout x de P, on ait $x = \sum_{j=1}^r x_j\varphi_j(x)$. Le rang de P dans le système de coordonnées $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{rg}\,(P, \mathcal{S})$, est la trace de la matrice de l'identité exprimée dans le système de coordonnées $\mathcal{S}$. Ce rang est un élément de A.

La « connexion de Levi-Civita » sur P est le morphisme de k-modules $d_P : P \to P \otimes_A \Omega^1_{\mathrm{nc}}(A)$ défini dans le système de coordonnées $\mathcal{S}$ par

$$d_P\left(\sum_{j=1}^r x_j\varphi_j(x)\right) = \sum_{j=1}^r x_j d_{\mathrm{nc}}\varphi_j(x)$$

pour $x \in P$. Soit $\alpha : P \to Q$ une application A-linéaire. L'application A-linéaire $d_{\mathrm{nc}}\alpha : P \to Q \otimes_A \Omega^1_{\mathrm{nc}}(A)$ est définie par $d_{\mathrm{nc}}\alpha = d_Q \circ \alpha - (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ d_P$. Lorsque α est un isomorphisme, on pose $\alpha^{-1}d_{\mathrm{nc}}\alpha = (\alpha^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ d_{\mathrm{nc}}\alpha$. Après le choix de systèmes de coordonnées $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sur P et Q, on désigne par M et N les matrices respectives de α et α^{-1}. Ces matrices sont à coefficients dans A. La matrice carrée $Nd_{\mathrm{nc}}M$ est à coefficients dans $\Omega^1_{\mathrm{nc}}(A)$, sa trace est notée $\mathrm{tr}\,(\alpha^{-1}d_{\mathrm{nc}}\alpha, \mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

Pour $x = [P, \alpha, Q]$, la *trace de Dennis à coefficients* $\mathrm{D}_1^{(n)} : K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \to \mathrm{HH}_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$ est alors définie comme étant la classe d'homologie dans $(\mathrm{co}\,(\cdot\, n), d)$, du cycle $(\mathrm{tr}\,(\alpha^{-1}d_{\mathrm{nc}}\alpha, \mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathrm{rg}\,(P, \mathcal{S}) - \mathrm{rg}\,(Q, \mathcal{S}'))$. Cette classe d'homologie est indépendante des choix de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

THÉORÈME 1. – *Soient A une algèbre et $n \ge 2$. L'application $\mathrm{D}_1^{(n)}$ est un morphisme de groupes rendant commutatif le diagramme suivant* (*où D_0 et D_1 sont les traces de Dennis usuelles* ([3], [4]).

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1(A)/(n) & \xrightarrow{\rho} & K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n) & \xrightarrow{\partial} & K_0(A)_{(n)} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_1^{(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_0} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{HH}_1(A)/(n) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{HH}_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{HH}_0(A)_{(n)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Supposons A commutative. Alors $K_0(A) = \mathbf{Z} \oplus \widetilde{K}_0(A)$, $K_1(A) = A^\times \oplus SK_1(A)$. Introduisons le groupe $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)/(n)$, où $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)$ est le A-bimodule des formes différentielles de Kähler–de Rham de A. On sait que $\mathrm{D}_1(SK_1(A)) = 0$ et que pour $u \in A^\times$, on a $\mathrm{D}_1(u) = u^{-1}\,\mathrm{d}u$. Notons $\mathrm{d}A^\times/A^\times$ le sous-groupe de $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)$ engendré par les dérivées logarithmiques $u^{-1}\,\mathrm{d}u$ des unités $u \in A^\times$. On a $\rho \circ \mathrm{D}_1(K_1(A)) = \mathrm{d}A^\times/A^\times$. Le théorème précédent conduit au :

COROLLAIRE 2. – *Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre commutative et $n \ge 2$ un entier. On désigne par S le sous-groupe de $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)$ engendré par $n\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)$ et $\mathrm{d}A^\times/A^\times$. Alors la « classe* *caractéristique secondaire* » $\mathrm{d}_1^{(n)} : \widetilde{K}_0(A)_{(n)} \to \Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)/S$, *définie pour* $x = \partial(y) \in \widetilde{K}_0(A)_{(n)}$ *par* $\mathrm{d}_1^{(n)}(x) = \mathrm{D}_1^{(n)}(y) \bmod S$ *est un morphisme de groupes abéliens, non trivial en général.*

2. Le cas des anneaux d'entiers d'un corps de nombres

THÉORÈME 3. – *Soient A l'anneau des entiers d'un corps de nombres F, de groupe des classes* $\mathrm{Cl}\,(A)$. *Le groupe $K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$ s'identifie au groupe*

$$\mathcal{U}(A\,;\,\mathbf{Z}/n) = \big\{[u] \in F^\times/(n) \mid \exists\, I \textit{ idéal fractionnaire de } A \textit{ tel que } uA = I^n\big\}.$$

De plus, l'extension (1) vue plus haut se réduit à la suite exacte bien connue :

$$1 \longrightarrow A^\times/(n) \longrightarrow \mathcal{U}(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Cl}\,(A)_{(n)} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

où $A^\times$ est le groupe des unités de A, la flèche ∂ consistant à envoyer $[u]$ sur l'idéal I.

Pour construire des éléments explicites du groupe $\mathcal{U}(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \cong K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$, on utilise le lemme suivant.

LEMME 4. – *Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres F et soit u un élément non nul de A. Pour que $[u] \in F^\times/(n)$ appartienne à $K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$, il suffit que la norme $N(u)$ soit une puissance n-ième dans $\mathbf{Z}$ et que $(N(u), N_1(u)) = 1$, $N_1(u)$ étant le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de u, considéré comme endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel F.*

Voici un exemple d'application du lemme.

PROPOSITION 5. – *Supposons F quadratique de discriminant δ. Soit p un nombre premier impair. On suppose qu'il existe $(\alpha, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\alpha^2 - 4b^p = \delta$ avec $(\alpha, b) = 1$ et $\alpha \notin (\mathbf{Z}/b)^{\times(p)}$. Si $\delta < -4$ ou si $\delta > 0$ et F d'unité fondamentale $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{\delta})/2$ telle que $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\alpha)/2 \in (\mathbf{Z}/b)^{\times(p)}$, on a* $\mathrm{Cl}\,(A)_{(p)} \neq 0$.

Démonstration. – Le lemme 4 appliqué à $u = (\alpha + \sqrt{\delta})/2$ montre que $[u]$ appartient à $K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$. Le morphisme d'anneaux $f : A \to \mathbf{Z}/b$ défini par $f((x + y\sqrt{\delta})/2) = (x + y\alpha)/2$ induit un morphisme de groupes

$$f_1^{(p)} \;:\; K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/p) \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}/b\,;\,\mathbf{Z}/p) \cong (\mathbf{Z}/b)^\times/(p)$$

tel que $f_1^{(p)}([u]) = [\alpha] \neq 0$. Si $\delta < -4$, ceci et (2) montrent $\mathrm{Cl}\,(A)_{(p)} \neq 0$. Si $\delta > 0$ et si $\partial([u]) = 0$, alors $[u]$ appartient à $A^\times/(p)$ et de l'hypothèse $f(\varepsilon) \in (\mathbf{Z}/b)^{\times(p)}$, on tire $f_1^{(p)}(A^\times/(p)) = 0$, ce qui est en contradiction avec $f_1^{(p)}([u]) \neq 0$, donc $\partial([u]) \neq 0$ et $\mathrm{Cl}\,(A)_{(p)} \neq 0$. $\square$

Remarque 6. – L'élément non trivial construit ici coïncide avec celui découvert par Yamamoto [7]. À partir de cet élément, cet auteur en déduit pour tout entier n un nombre infini de corps quadratiques dont le groupe des classes possède un facteur $\mathbf{Z}/n$.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des diviseurs premiers du discriminant δ du corps F. De $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A) = \prod_{p\in\mathcal{R}} \Omega^1_{\mathrm{dR}}(A \otimes \mathbf{Z}_p)$, on déduit $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)/(p) = 0$ si $(p, \delta) = 1$. Les classes caractéristiques $\mathrm{D}_1^{(p)}$ et $\mathrm{d}_1^{(p)}$ ne peuvent donc détecter d'éléments non triviaux de $\mathrm{Cl}\,(A)_{(p)}$ que si p est ramifié dans A. Donnons un exemple.

PROPOSITION 7. – *Supposons F quadratique et soit n un diviseur impair du discriminant δ de F. On suppose qu'il existe $(\alpha, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\alpha^2 - 4b^n = \delta$ avec $(\alpha, b) = (\alpha, n) = 1$. Si $\delta < -4$ ou si $\delta > 0$ et d'unité fondamentale $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{\delta})/2$ telle que $n \mid \varepsilon_2$, alors $\mathrm{Cl}\,(A)$ possède un élément d'ordre n.*

Démonstration. – On a $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)/n = \mathbf{Z}/n\,\mathrm{d}\omega$ avec $\omega = \sqrt{\delta}/2$ ou $\omega = (1+\sqrt{\delta})/2$ suivant que δ est congru à 0 ou 1 modulo 4. Le lemme 4 appliqué à $u = (\alpha + \sqrt{\delta})/2$ montre que $[u]$ appartient à $K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/n)$. Un calcul conduit à $\mathrm{D}_1^{(n)}([u]) = 2/\alpha\,\mathrm{d}\omega \neq 0$. Si $\delta < -4$, ceci montre que $\mathrm{Cl}\,(A)$ possède un élément d'ordre n. Si $\delta > 0$, de $n \mid \varepsilon_2$, on tire $\mathrm{d}A^\times/A^\times \subset n\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)$. La classe secondaire $\mathrm{d}_1^{(n)}$ est donc à valeurs dans $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(A)/(n)$ et $\mathrm{d}_1^{(n)}(\partial([u]) = \mathrm{D}_1^{(n)}([u]) \neq 0$ d'où un élément d'ordre n dans $\mathrm{Cl}\,(A)$.
Par exemple, soit $F = \mathbf{Q}[\sqrt{\delta}])$ avec $\delta = -4\,294\,967\,295$. De $\delta = 1^2 - 4\cdot 4^{15}$, on déduit un élément de 15-torsion dans $\mathrm{Cl}\,(A)$. Ou encore soit $\delta = 231$, $p = 3$; l'unité fondamentale $\varepsilon = (430 + 24\sqrt{d})/2$ du corps quadratique réel $f = \mathbf{Q}[\sqrt{\delta}]$ satisfait les conditions requises et de $\delta = 17^2 - 4\cdot(-2)^3$, on déduit un élément d'ordre 3 dans $\mathrm{Cl}\,(A)$. $\square$

3. Application à la cyclotomie

Soient p un nombre premier impair et $\zeta = \zeta_p$ une racine primitive p-ième de l'unité. Le corps cyclotomique $F = \mathbf{Q}[\zeta]$ a pour groupe de Galois $G = (\mathbf{Z}/p)^\times$. Soit g un générateur de G opérant dans F par $g\zeta = \zeta^s$ avec $(p, s) = 1$. L'anneau des entiers A de F est $\mathbf{Z}[\zeta]$. L'extension (2) se scinde en deux parties, dont la partie antisymétrique pour la conjugaison complexe s'écrit

$$1 \longrightarrow \mu_p \xrightarrow{\rho} K_1^-(A\,;\,\mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Cl}\,(A)^-_{(p)} \longrightarrow 1$$

On pose $\mathrm{d}_p^- = \dim_{\mathbf{Z}/p} \mathrm{Cl}\,(A)^-_{(p)} = \dim_{\mathbf{Z}/p} K_1(A\,;\,\mathbf{Z}/p) - 1$.

Introduisons l'anneau de groupe $R = \mathbf{Z}/p[\tau]/(1-\tau^p)$. Le groupe de Galois G opère dans R par $g\tau = \tau^s$. Le $\mathbf{Z}/p$-espace vectoriel $\Omega^1_{\mathrm{dR}}(R)/(p)$ se scinde en $\Omega^- \oplus \Omega^+$, où Ω^- est de dimension $(p+1)/2$. Il existe une base $(f_0, f_1, \ldots, f_{(p-1)/2})$ de Ω^- pour laquelle l'action de G est donnée par $gf_0 = sf_0$, $gf_\ell = sf_{\ell+1}$, $1 \leq \ell < (p-1)/2$, $gf_{(p-1)/2} = sf_1$.

Rappelons que les entiers (p, a, b, c) satisfont aux hypothèses du premier cas du dernier théorème de Fermat (en abrégé DTF1) si p est un premier impair et $a^p = b^p + c^p$ avec $(a, b, c) = (p, abc) = 1$. Notons $\overline{n}$ la classe de n modulo p. Sous l'hypothèse DTF1, les éléments $z = (a - b\zeta)/(a - b\zeta^{-1}) \bmod F^{\times(p)}$ et $z' = (\overline{a} - \overline{b}\tau)/(\overline{a} - \overline{b}\tau^{-1}) \bmod R^{\times(p)}$ appartiennent respectivement à $K_1^-(A\,;\,\mathbf{Z}/p)$ et $K_1^-(R\,;\,\mathbf{Z}/p)$. Notons U et U' respectivement les sous-espaces vectoriels de $K_1^-(A\,;\,\mathbf{Z}/p)$ et $K_1^-(R\,;\,\mathbf{Z}/p)$ engendré par l'orbite de z (resp. z') sous l'action de G. On vérifie facilement $0 \leq \dim_{\mathbf{Z}/p}(U') - \dim_{\mathbf{Z}/p}(U) \leq 1$, d'où $\mathrm{d}_p^- \geq \dim_{\mathbf{Z}/p}(U) - 1 \geq \dim_{\mathbf{Z}/p}(U') - 2$. Pour évaluer $\dim_{\mathbf{Z}/p}(U')$, on considère la restriction χ' de la trace de Dennis $\mathrm{D}_1^{(p)} : K_1(R\,;\,\mathbf{Z}/p) \to \Omega^1_{\mathrm{dR}}(R)/(p)$ à U'. Un calcul conduit à $\chi'(z') = 2f_0 + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \alpha_k f_k$ avec $\alpha_k = (\overline{a}/\overline{b})^{s^k} + (\overline{b}/\overline{a})^{s^k}$. Compte tenu de l'action de G sur sur les f_k, on voit que le rang de χ' est celui de la matrice circulante $C \in \mathrm{Mat}_{(p-1)/2)}(\mathbf{Z}/p)$ suivante :

$$C = C(p,a,b,c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{\frac{p-1}{2}} \\ \alpha_{\frac{p-1}{2}} & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{\frac{p-3}{2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Le calcul du rang de C nécessite l'introduction des polynômes de Mirimanoff $M_k(X) \in \mathbf{Z}/p[X]$, définis pour $1 \leq k \leq p-1$ par $M_k(X) = \sum_{j=1}^{p-1} j^{k-1}X^j$. Pour $t \in \mathbf{Z}/p \smallsetminus \{0, 1, -1\}$, posons

$$r_p(t) = \#\left\{k, 1 \leq k \leq (p-1)/2,\ \ M_{2k+1}(t) \neq 0\right\}.$$

Un calcul simple montre que les valeurs propres de $C(p, a, b, c)$ sont les $M_{2k+1}(\overline{a}/\overline{b})$, $1 \leq k \leq (p-1)/2$. On en déduit que le rang de la matrice $C(p, a, b, c)$ est $r_p(a/b)$. Posons encore $r_p = \min\left\{r_p(t), t \in \mathbf{Z}/p \smallsetminus \{0, 1, -1\}\right\}$.

En conclusion, on a montré :

THÉORÈME 8. – *Supposons que* (p, a, b, c) *soient des entiers vérifiant les hypothèses DTF1. Alors*

$$\mathrm{d}_p^- \geq r_p - 2.$$

Remarque 9. – À normalisation près, les calculs ci-dessus correspondent à ceux effectués par Brückner [2], où notre trace χ' est à comparer avec le morphisme χ de Brückner ([2], 2.1). La quantité $f_i(\eta)$ de ([2], 3.5) est telle que $f_i(\eta) \cong (-1)^{i-1}(b/c)M_{i-1}(\overline{a}/\overline{b}) \bmod p$ et la minoration $\mathrm{d}_p \geq r_p - 2$ correspond à ([2], 5.1). À partir de cette minoration, Brückner montre que le premier cas du dernier théorème de Fermat est vrai si $p \geq 2^{\mathrm{d}_p+3} - 2\mathrm{d}_p - 3$, où $\mathrm{d}_p = \dim_{\mathbf{Z}/p}(\mathrm{Cl}\,(A)_{(p)}$. On peut aussi procéder comme suit. Soit p un nombre premier. D'après [5], [6], pour $p \geq 7$, on a $\mathrm{d}_p^- \leq (p+3)/4$. La minoration ci-dessus montre que si $r_p > (p+11)/4$, alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour p. Numériquement, le calcul de r_p est très rapide, ce qui n'est pas le cas pour d_p ou d_p^-.

Remerciement. Les auteurs remercient le rapporteur pour leur avoir signalé la référence [2].

Références bibliographiques

[1] Bass H., Algebraic K-theory, Benjamin, New York, 1968.

[2] Brückner H., Zum ersten Fall der Fermatschen Vermutung, J. Reine Ang. Math. 274-276 (1975) 21–26.

[3] Connes A., Non-commutative differential geometry, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 62 (1985) 257–360.

[4] Karoubi M., Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque 149, Soc. Math. France, 1987.

[5] Lepistö T., On the growth of the first factor of the class number of the prime cyclotomic field, Ann. Sci. Fennicae, Série A, I 577 (1974) Helsinki (21 p.)

[6] Metsänkylä T., Class numbers and μ-invariants of cyclotomic fields, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974) 299–300.

[7] Yamamoto Y., On unramified Galois extensions of quadratic number fields, Osaka J. Math. 7 (1970) 57–76.