(47a)

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 917-920, 1993

Topologie/*Topology*

Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod

Max KAROUBI

Résumé — Dans cette Note, nous utilisons la théorie des formes différentielles non commutatives ([2], [4], [5]) pour définir les opérations de Steenrod en Topologie algébrique [6] au niveau des espaces classifiants en cohomologie. Nous en décrivons les propriétés essentielles et donnons une interprétation en termes des produits symétriques infinis introduits par Dold et Thom [3].

Non-commutative differential forms and Steenrod operations

Abstract — *In this Note, we apply the theory of non-commutative differential forms* ([2], [4], [5]) *in order to define the Steenrod operations in Algebraic Topology* [6] *on the level of classifying spaces in cohomology. We describe their main properties and give an interpretation of them in terms of infinite symmetric products, as introduced by Dold and Thom* [3].

1. OPÉRATIONS DE STEENROD. — Soit p un nombre entier quelconque. L'application qui, à une forme différentielle non commutative ω de degré q sur la k-algèbre A (*cf.* [5]), associe la forme différentielle $\omega^{\otimes p}=\omega.\omega\ldots\omega$ (produit de p facteurs ω) induit une application

$$\Omega^q(\mathrm{A}) \to \Omega^{pq}(\mathrm{A})$$

Si on remplace A par l'algèbre [1] simpliciale $[s]\mapsto \mathrm{A}_s$ considérée dans la Note précédente [5], cette application est compatible avec les structures simpliciales. Elle induit une application « puissance p-ième entre les espaces d'Eilenberg-Mac Lane associés (avec les définitions et notations de [5]) :

$$\mathrm{P}:\quad \mathrm{Z}^q \to \mathrm{Z}^{pq}$$

Celle-ci est équivariante pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ opérant trivialement sur Z^q et opérant sur Z^{pq} comme il a été explicité dans la Note [5], via l'inclusion évidente de $\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_{pq}$.

Soit maintenant π un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ et soit $\mathrm{E}\pi \to \mathrm{B}\pi$ le fibré principal universel de groupe π. L'application P induit alors un morphisme P_* entre les fibrés de Borel associés :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\pi\times\mathrm{Z}^q=\mathrm{E}\pi\times_\pi\mathrm{Z}^q & \to & \mathrm{E}\pi\times_\pi\mathrm{Z}^{pq} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{B}\pi & \end{array}$$

Dans les trois exemples suivants : π inclus dans le groupe alterné; q pair; ou $2=0$ dans k, l'espace $\mathrm{E}\pi\times_\pi\mathrm{Z}^{pq}$ a le type d'homotopie de $\mathrm{B}\pi\times\mathrm{Z}^{pq}$, car π opère de manière « homotopiquement triviale » sur Z^{pq} (*cf.* la fin du paragraphe 3 de [5]). En général, P_* induit une application $\mathrm{P}_{**}:\mathrm{Z}^q\to\mathscr{S}(\xi)$, où $\mathscr{S}(\xi)$ désigne l'espace des sections de la fibration $\mathrm{E}\pi\times_\pi\mathrm{Z}^{pq}\to\mathrm{B}\pi$. En effet, à la forme fermée ω on peut associer la section $u\mapsto(\tilde{u},\omega^{\otimes p})$, où $u\in\mathrm{B}\pi$ et où $\tilde{u}$ est un élément de $\mathrm{E}\pi$ se projetant en u. Puisque $\omega^{\otimes p}$ est une forme invariante par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$, la classe du couple $(\tilde{u},\omega^{\otimes p})$ dans $\mathrm{E}\pi\times_\pi\mathrm{Z}^{pq}$ est indépendante du choix de $\tilde{u}$.

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/93/03160917 $ 2.00 © Académie des Sciences

Par ailleurs, l'espace des applications de X dans $\mathscr{S}(\xi)$ s'identifie à $H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{k})$, où $\mathbf{k}$ désigne le système de coefficients locaux sur $B\pi \times X$ induit par l'homomorphisme composé $\pi_1(B\pi \times X) \to \pi_1(B\pi) \xrightarrow{\sigma} k^*$, où σ est la signature si q est impair et est trivial si q est pair. Ainsi, pour tout espace X et *tout* anneau de coefficients k, le morphisme $P_{**}: Z^q \to \mathscr{S}(\xi)$ induit une application (qui n'est *pas* additive en général)

$$H^q(X; k) \cong [X, Z^q] \to H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{k})$$

En particulier, soit k le corps fini $\mathbf{Z}/p$ et soit π le groupe cyclique d'ordre p (p premier). Le système de coefficients locaux $\mathbf{k}$ est alors trivial. D'après la formule de Künneth, nous avons

$$H^{pq}(B\pi \times X) \cong \bigoplus_r [H^r(B\pi) \otimes H^{pq-r}(X)] \cong \bigoplus_r H^{pq-r}(X)$$

(les cohomologies étant prises à coefficients dans k et le dernier isomorphisme dépendant du choix ([2]) des générateurs x_r de $H^r(B\pi) \cong k$). Ainsi, pour tout r, l'application précédente induit une opération cohomologique

$$D_r: \quad H^q(X) \to H^n(X)$$

avec $n = pq - r$.

THÉORÈME. — *L'opération* D_r *définie ci-dessus est un homomorphisme de k-modules. Elle est triviale si* $n < q$. *Si* $p = 2$, *elle coïncide avec le carré de Steenrod* Sq^{n-q}. *Si p est impair, l'opération cohomologique est triviale, sauf dans les cas suivants :*

q pair, $n \geqq q$ et $n = pq - 2i(p-1)$ *ou* $pq - 2i(p-1) + 1$

q impair, $n \geqq q$ et $n = pq - (2i+1)(p-1)$ *ou* $pq - (2i+1)(p-1) + 1$.

Dans ces deux cas, pour $n - q$ *pair, l'opération cohomologique obtenue :*

$$Q^i: \quad H^q(X) \to H^{q+2i(p-1)}(X)$$

est l'opération P^i *de Steenrod divisée par le facteur de normalisation explicité dans* [6] *p.* 112, *soit* $(-1)^r(m!)^q$, *où* $m = (p-1)/2$ *et* $r = i + m(q^2+q)/2$. *Enfin, si q est pair ou p impair, on a* $\beta . P = 0$, *où* $P: H^q(X) \to H^{pq}(B\pi \times X)$ *est défini par* $P(x) = \sum x_r . D_r(x)$ *et où* $\beta: H^{pq}(B\pi \times X) \to H^{pq+1}(B\pi \times X)$ *est l'homomorphisme de Bockstein (la cohomologie étant prise à coefficients dans* $\mathbf{Z}/p$).

2. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier les axiomes des opérations de Steenrod Sq^i ou P^i qui sont énoncés dans [6]. Dans notre contexte, cette vérification est basée sur les propriétés suivantes que vérifient les groupes abéliens simpliciaux définis à l'aide de formes différentielles non commutatives :

(*a*) Construction d'un modèle pointé de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$ sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère. Cette action de $\mathfrak{S}_n$ induit la multiplication par la signature sur la cohomologie en degré n. L'action induite par le groupe alterné π (ou le groupe symétrique lui-même si $2 = 0$ dans k) est homotopiquement triviale dans le sens précisé au paragraphe 3 de la Note [5] : il existe une suite de modèles équivariants de $K(k, n)$, soient X_r, $r = 1, \ldots, 2s$, et des applications équivariantes $X_1 \to X_2 \leftarrow X_3 \to \ldots \to X_{2s}$, où X_1 est le modèle donné et où π opère trivialement sur X_{2s}. En particulier, l'espace de Borel associé $E\pi \times_\pi K(k, n)$ a le type d'homotopie *fibré* de $B\pi \times K(k, n)$.

(*b*) Le cup-produit en cohomologie est induit par des accouplements

$$K(k, n) \wedge K(k, m) \to K(k, n+m)$$

qui sont associatifs en un sens évident et qui sont équivariants pour l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ de $\mathfrak{S}_{n+m}$.

(*c*) Si $\phi_{n,m}$ désigne l'accouplement précédent, si $\omega_n \in K(k, n)$ et $\theta_m \in K(k, m)$, on a $\phi_{n,m}(\omega_n, \theta_m) = \sigma^*(\phi_{m,n}(\theta_m, \omega_n))$, où σ^* est l'automorphisme de $K(k, n+m)$ associé à la permutation de $\{1, 2, \ldots, n+m\}$, échangeant les n premiers et m derniers objets (en les conservant dans le même ordre).

Grâce aux axiomes (*a*), (*b*) et (*c*), nous pouvons construire une application « puissance p-ième » :

$$K(k, q) \to K(k, pq),$$

qui est équivariante pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$, et lui appliquer la construction de Borel. L'axiome (*a*) permet de déterminer l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $\mathscr{S}(\xi)$. Grâce aux axiomes (*b*) et (*c*), nous vérifions la formule de Cartan (pour $k = \mathbf{Z}/p$). Par ailleurs, il existe une application de degré un de $S^n = S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$ dans $K(k, n)$ qui est équivariante, le groupe $\mathfrak{S}_n$ opérant sur la sphère S^n en permutant les facteurs S^1. En outre, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^n \wedge S^m & \to & S^{n+m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(k, n) \wedge K(k, m) & \to & K(k, n+m) \end{array}$$

Cette dernière remarque permet d'achever la normalisation des opérations D_r : il suffit de calculer la classe d'Euler d'un fibré vectoriel sur un espace lenticulaire adéquat.

3. Généralisation. — Cette présentation axiomatique « constructive » des opérations de Steenrod nous amène à poser la question de l'existence d'autres modèles de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$ vérifiant les axiomes, au moins pour $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p$. Un modèle possible est relié à la construction de Dold-Thom du produit symétrique infini $S^\infty(T)$ d'un CW-complexe pointé connexe T [3] : ses groupes d'homotopie sont isomorphes aux groupes d'homologie réduite de T, l'application canonique de T dans son produit symétrique infini induisant l'homomorphisme de Hurewicz. Par ailleurs $S^\infty(T)$ est un monoïde abélien de manière évidente pour la loi

$$(t, u) \mapsto t * u = (t_1, u_1, t_2, u_2, \ldots, t_n, u_n, \ldots),$$

où $t = (t_i)$ et $u = (u_i)$, $i \in \mathbf{N}$, sont deux éléments de $S^\infty(T)$. Enfin, si $\phi : T \wedge U \to V$ est une application continue quelconque, elle induit une « multiplication » bilinéaire sur les produits symétriques infinis associés :

$$\phi_* : \quad S^\infty(T) \wedge S^\infty(U) \to S^\infty(V)$$

par la formule suivante

$$\phi_*(t, u) = (\phi(t_i, u_j)),$$

si t est la suite (t_i) et u la suite (u_j), i et $j \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ étant identifié à $\mathbf{N}$).

En particulier, considérons le cas de la sphère $S^n = S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$. Alors $S^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, n)$ sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère par permutation des facteurs S^1. L'application canonique de $S^n \wedge S^m$ dans S^{n+m} induit une application $K(\mathbf{Z}, n) \wedge K(\mathbf{K}, m) \to K(\mathbf{Z}, n+m)$ qui définit le cup-produit en cohomologie. Les axiomes (*b*) et (*c*) sont évidents. Pour vérifier l'axiome (*a*), nous définissons une application α de $S^\infty(S^n)$ dans la réalisation géométrique de notre modèle simplicial de $K(\mathbf{Z}, n)$ (qui est un groupe topologique abélien) en posant

$$\alpha((x_i)) = \sum \beta(x_i),$$

où β est l'application canonique de S^n dans $K(\mathbf{Z}, n)$. Il est clair que α est une équivalence d'homotopie équivariante qui est en outre un homomorphisme de monoïdes.

La vérification précédente montre que $S^\infty(S^n)$ peut être utilisé comme modèle de $K(\mathbf{Z}, n)$ pour définir une application puissance p-ième (pour tout nombre entier p)

$$B\pi \times K(\mathbf{Z}, q) \to K(\mathbf{Z}, pq),$$

où π est le groupe symétrique (si q est pair) ou le groupe alterné (q quelconque). Au niveau cohomologique, l'application précédente définit ainsi une transformation naturelle

$$P: \quad H^q(X; \mathbf{Z}) \to H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z})$$

Nous pouvons procéder de même en cohomologie mod. p, en remarquant que le groupe quotient $S^\infty(S^n)/pS^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}/p, n)$ d'après [3]. L'application ϕ_* définie plus haut induit donc une application bilinéaire

$$S^\infty(S^n)/pS^\infty(S^n) \wedge S^\infty(S^m)/pS^\infty(S^m) \to S^\infty(S^{n+m})/pS^\infty(S^{n+m})$$

c'est-à-dire

$$K(\mathbf{Z}/p, n) \wedge K(\mathbf{Z}/p, m) \to K(\mathbf{Z}/p, n+m)$$

qui induit le cup-produit usuel en cohomologie mod. p. La vérification des axiomes peut alors être conduite de la même manière, sauf que le nombre premier $p=2$ n'est plus exclu si q est impair. Nous avons enfin un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbf{Z}) & \to & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X; \mathbf{Z}/p) & \to & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}/p) \end{array}$$

si q est pair (π quelconque), ou si q est impair (π inclus dans le groupe alterné). Si p est un nombre premier, les opérations $D_r : H^q(X) \to H^n(X)$ qu'on en déduit pour $n=pq-r$, coïncident avec celles définies dans le théorème du paragraphe 1.

(1) Le même raisonnement s'applique à l'algèbre simpliciale $[s] \mapsto \bar{A}_s$ considérée également dans [5].

(2) Si p est impair, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes $k[x]$ par une algèbre extérieure $\Lambda(y)$ avec $\deg(x)=2$ et $\deg(y)=1$. On a $\beta(y)=x$, où β désigne le Bockstein. Si on choisit $x_1=y\in H^1(B\pi)=\mathrm{Hom}(\pi, \pi)$ égal à l'application identique de π, $x_{2n}=x^n$ et $x_{2n+1}=yx^n$, les générateurs x_r de $H^r(B\pi)$ sont bien déterminés. Si $p=2$, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est une algèbre de polynômes $k[y]$ avec y de degré 1; on choisit alors $x_r=(y)^r$.

Note remise le 26 novembre 1992, acceptée le 27 novembre 1992.

Références bibliographiques

[1] H. Cartan, Théories cohomologiques, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.

[2] A. Connes, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, n° 62, 1985, p. 257-360.

[3] A. Dold et R. Thom, Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242, 1956, p. 1680-1682.

[4] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque, 149, 1987, Société Mathématique de France.

[5] M. Karoubi, Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316, série I, 1993, p. 833-836.

[6] N. Steenrod et D. Epstein, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Studies, n° 50, Princeton University Press, 1962.

UFR de Mathématiques, URA n° 212 du CNRS,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France;
e. mail : karoubi@mathp7.jussieu.fr