46a

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 833-836, 1993

Topologie/*Topology*

Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires

Max KAROUBI

Résumé – Dans cette Note, nous utilisons la théorie des formes différentielles non commutatives ([2], [3]) pour définir la cohomologie avec des coefficients arbitraires. Cette cohomologie est aussi celle d'une filtration par le « poids » du complexe de De Rham non commutatif.

Non-commutative differential forms and cohomology with arbitrary coefficients

Abstract – *In this Note, we use the theory of non-commutative differential forms* ([2], [3]) *to define the cohomology with arbitrary coefficients. Is also the cohomology of the "weight" filtration of the non-commutative De Rham complex.*

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES. – Soit k un anneau commutatif unitaire et soit A une k-algèbre (unitaire, mais non nécessairement commutative). On pose

$$\Omega^0(\mathrm{A})=\mathrm{A}, \qquad \Omega^1(\mathrm{A})=\mathrm{Ker}(\mathrm{A}\otimes_k \mathrm{A} \xrightarrow{m} \mathrm{A}),$$

où m désigne la multiplication, $\Omega^n(\mathrm{A})=\Omega^1(\mathrm{A})\otimes \ldots \otimes\Omega^1(\mathrm{A})$ [produit tensoriel de n copies du A-bimodule $\Omega^1(\mathrm{A})$]. Pour la contraction des tenseurs, $\Omega^*(\mathrm{A})=\bigoplus_n \Omega^n(\mathrm{A})$ est une k-algèbre. Définissons un k-homomorphisme $d:\Omega^0(\mathrm{A})\to\Omega^1(\mathrm{A})$ par la formule $d(a)=1\otimes a-a\otimes 1$. L'application $(a_0, a_1, \ldots, a_n)\mapsto a_0 . da_1 \ldots da_n$ induit alors un isomorphisme du produit tensoriel de k-modules $\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}/k \ldots \otimes\mathrm{A}/k$ (n facteurs A/k) sur $\Omega^n(\mathrm{A})$. Soit $d:\Omega^n(\mathrm{A})\to\Omega^{n+1}(\mathrm{A})$ la différentielle déduite de cet isomorphisme et définie par la formule

$$d(a_0 . da_1 \ldots da_n)=1 . da_0 . da_1 \ldots da_n.$$

THÉORÈME ET DÉFINITION. – *L'algèbre* $\Omega^*(\mathrm{A})$, *munie de l'opérateur d défini ci-dessus, est une algèbre différentielle graduée. Ses éléments sont les « formes différentielles non commutatives » sur* A.

2. COHOMOLOGIE À COEFFICIENTS ARBITRAIRES. – Soit A_* l'algèbre simpliciale commutative que voici : pour tout entier s, on pose $\mathrm{A}_s=k[x_0, x_1, \ldots, x_s]/(x_0+x_1+\ldots+x_s-1)$, les morphismes face et dégénérescence étant induits par les transformations $x_i\mapsto 0$ et $x_i\mapsto x_i+x_{i+1}$ respectivement ([1], [4]). Le foncteur $[s]\mapsto\Omega^*(\mathrm{A}_s)$, où $[s]=\{0, 1, \ldots, s\}$, définit une algèbre différentielle graduée *simpliciale*. Elle est notée Ω^*. Si X est un ensemble simplicial, l'ensemble $\Omega^*(\mathrm{X})=\mathrm{Mor}(\mathrm{X}, \Omega^*)$ des morphismes de X dans Ω^* est donc une algèbre différentielle graduée.

Par ailleurs, l'algèbre quotient $\bar{\mathrm{A}}_s$ de A_s par l'idéal associé aux relations $(x_i)^2=x_i$ et $x_i x_j=0$ si $i\neq j$, s'identifie au k-module des fonctions sur $[s]$ à valeurs dans k. De même, $\Omega^*(\bar{\mathrm{A}}_s)$ s'identifie à l'algèbre des cochaînes « semi-normalisées » sur $[s]$. Plus précisément, $\Omega^q(\bar{\mathrm{A}}_s)$ est le k-module des fonctions λ sur $[s]^{q+1}$ de la forme $\lambda(i_0, \ldots, i_q)$, où $i_\alpha\in[s]$, égales à 0 si $i_\alpha=i_{\alpha+1}$ pour un α. Le foncteur $[s]\mapsto\Omega^*(\bar{\mathrm{A}}_s)$ définit donc une autre algèbre différentielle graduée simpliciale notée $\bar{\Omega}^*$. Si X est un ensemble simplicial, $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}, \bar{\Omega}^*)$

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/93/03160833 \$ 2.00

est aussi noté $\bar{\Omega}^*(X)$. Les considérations ci-dessus nous permettent de définir ainsi des homomorphismes d'algèbres différentielles graduées

$$\Omega^*(X) \to \bar{\Omega}^*(X) \to C^*(X),$$

où $C^*(X)$ est l'algèbre des cochaînes usuelles sur l'ensemble simplicial X.

Théorème. — *Les homomorphismes précédents induisent des isomorphismes en cohomologie. Ainsi,* $H^n(\Omega^*(X)) \cong H^n(\bar{\Omega}^*(X)) \cong H^n(C^*(X)) = H^n(X; k)$ *pour* tout *anneau de coefficients k.*

Remarques. — 1. En fait, ce théorème ne dépend que de la structure additive de k par une extension évidente des définitions. Il est donc valable pour tout *groupe* abélien k.

2. Si $\mathbf{Q} \subset k$, posons $\hat{\Omega}^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \hat{\Omega}^*)$, où $\hat{\Omega}^*$ est l'algèbre différentielle graduée simpliciale *commutative* engendrée par les formes différentielles usuelles sur la k-algèbre commutative

$$k[x_0, x_1, \ldots, x_s]/(x_0 + x_1 + \ldots + x_s - 1).$$

D'après Sullivan [1], $H^n(\hat{\Omega}^*(X)) \cong H^n(X; k)$, l'isomorphisme étant induit par l'intégration sur les simplexes (qui introduit des dénominateurs rationnels). Nous avons donc les isomorphismes suivants (dont la composition est l'identité) :

$$H^n(X; k) \overset{\cong}{\leftarrow} H^n(\bar{\Omega}^*(X)) \overset{\cong}{\leftarrow} H^n(\Omega^*(X)) \overset{\cong}{\rightarrow} H^n(\hat{\Omega}^*(X)) \cong H^n(X; k),$$

le troisième isomorphisme étant induit par le morphisme canonique $\Omega^* \to \hat{\Omega}^*$.

3. Le théorème s'applique notamment dans les deux situations géométriques suivantes :

a) A un espace topologique M, on associe son « complexe singulier » X qui est un ensemble simplicial : X_s est l'ensemble des applications continues de Δ_s dans M, Δ_s désignant le s-simplexe standard [1] dans $\mathbf{R}^{s+1}$.

b) Soit M une variété différentiable et soit $\mathcal{U} = (U_i)$, $i \in I$, un recouvrement ouvert. On associe à $\mathcal{U}$ l'ensemble simplicial X suivant (le « nerf » de $\mathcal{U}$) :

$$X_s = \{ (i_0, \ldots, i_s) \mid U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_s} \neq \emptyset \}$$

Enfin, on suppose $\mathcal{U}$ choisi en sorte que l'intersection d'un nombre quelconque d'ouverts soit vide ou contractile.

Dans les deux situations géométriques précédentes, la cohomologie (simpliciale) de X calcule la cohomologie usuelle de l'espace M (à coefficients dans le groupe abélien k).

3. Description simpliciale des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. — En suivant [1], introduisons les groupes abéliens simpliciaux Z^n et $\bar{Z}^n$ définis par $[s] \mapsto Z^n(A_s)$ et $[s] \mapsto Z^n(\bar{A}_s)$ respectivement, où Z^n désigne en général le k-module des formes différentielles *fermées* de degré n du complexe Ω^* ou $\bar{\Omega}^*$.

Théorème. — *Les groupes abéliens simpliciaux* Z^n *et* $\bar{Z}^n$ *sont des modèles de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane* $K(k, n)$ *: tous leurs groupes d'homotopie sont nuls, sauf* π_n *qui est isomorphe à k. En particulier, si* X *est un ensemble simplicial,* $H^n(X; k)$ *s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de* X *dans* Z^n *ou* $\bar{Z}^n$.

Un lemme analogue à celui de Poincaré permet de montrer que le complexe de De Rham non commutatif

$$0 \to k \to \Omega^0(A) \to \ldots \to \Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A) \to \ldots$$

est acyclique pour toute k-algèbre augmentée A. Par conséquent, tout élément de $Z^n(A)$ est une forme exacte (si $n>0$) et s'écrit comme combinaison linéaire de formes différentielles du type

$$\omega = df_1 . df_2 \ldots df_n$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $Z^n(A)$ en permutant les df_i (plus précisément, $Z^n(A) \simeq A/k \otimes A/k \otimes \ldots \otimes A/k$, la permutation des facteurs A/k du produit tensoriel définissant l'action). Cette opération du groupe symétrique sur $Z^n(A)$ est « homotope » à celle induite par la signature des permutations dans un sens que nous allons expliciter. Introduisons tout d'abord l'algèbre des formes différentielles « étendues » $T^*(A)$, où $T^n(A) = A \otimes \ldots \otimes A$ (produit tensoriel de $n+1$ copies du k-module A). Le produit de $(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n)$ et $(b_0 \otimes \ldots \otimes b_m)$ est l'élément de $T^{n+m}(A)$ égal à

$$a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes a_n b_0 \otimes \ldots \otimes b_m$$

Soit $b_i : T^n(A) \to T^{n-1}(A)$ l'homomorphisme de k-modules induit par la « contraction » des composantes $(i, i+1)$ du produit tensoriel. Le A-bimodule $\Omega^n(A)$ s'identifie alors à l'intersection des noyaux des b_i. On désigne par $\Lambda^n(A)$ le sous k-module de $T^n(A)$ formé des tenseurs antisymétriques (pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$) et « semi-normalisés » (c'est-à-dire appartenant au noyau de tous les homomorphismes b_i) : nous avons ainsi des inclusions de k-modules $\Lambda^n(A) \subset \Omega^n(A) \subset T^n(A)$. Par ailleurs, soit $D : T^*(A) \to T^{*+1}(A)$ l'homomorphisme de k-modules défini par la formule suivante

$$D(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes_{ai-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_n$$

Alors $D^2 = 0$, D est une dérivation et laisse stable $\Lambda^*(A)$ et $\Omega^*(A)$. Elle induit la différentielle précédente d sur $\Omega^*(A)$.

En particulier, désignons par $Z\bar{\Lambda}^n$ le groupe abélien simplicial $[s] \mapsto Z\Lambda^n(\bar{A}_s)$, où $Z\Lambda^n(\bar{A}_s) = \mathrm{Ker}[D : \Lambda^n(\bar{A}_s) \to \Lambda^{n+1}(\bar{A}_s)]$. L'application canonique $Z\bar{\Lambda}^n \to \bar{Z}^n$ est alors une équivalence d'homotopie équivariante, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opérant par la signature sur $Z\bar{\Lambda}^n$ et par l'action précisée plus haut sur $\bar{Z}^n$.

Cette action du groupe symétrique sera exploitée dans une Note suivante pour une définition plus conceptuelle des opérations de Steenrod au niveau des espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

4. Filtration par le poids. — Un élément f de

$$A_s = k[x_0, x_1, \ldots, x_s]/(x_0 + x_1 + \ldots + x_s - 1]$$

est de poids $\leq r$ s'il existe un polynôme de degré $\leq r$ ayant comme classe f. Plus généralement, une forme différentielle non commutative ω est dite de poids $\leq r$ si elle s'écrit comme combinaison linéaire de formes du type $f^0 . df^1 \ldots df^n$, où les f^i ont des poids dont la « somme » est $\leq r$. On note $\Omega^*_{(r)}$ le k-module des formes différentielles de poids $\leq r$. Il est clair que $\Omega^*_{(r)}$ est un sous-complexe du complexe de De Rham non commutatif.

Théorème. — *Pour tout ensemble simplicial* X, *et en degrés* $\leq r$, *le morphisme canonique* $\Omega^*_{(r)} \to \Omega^*$ *induit un isomorphisme entre la cohomologie du complexe* $\Omega^*_{(r)}(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*_{(r)})$ *et celle du complexe* $\Omega^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*)$, *soit* $H^*(X; k)$.

En remplaçant Ω^* par $\Omega^*_{(r)}$, nous définissons (par l'intégration usuelle sur les simplexes) un morphisme de complexes

$$\Omega^*_{(r)} \to C^*_{(r)},$$

où $C^*_{(r)}$ désigne le k-module des cochaînes usuelles tensorisé par $\mathbf{Z}[1/r!]$. Ce morphisme se factorise bien entendu par le k-module des formes différentielles *commutatives* de poids $\leqq r$, où la même factorielle est inversée. Par ailleurs, il est bien connu que le k-module des formes différentielles commutatives de poids $\leqq r$ forme un complexe, dont la cohomologie en degré $n \leqq r$ est isomorphe à $H^n(X; k)$ si $r!$ est inversible dans k. Dans cette échelle, la cohomologie des formes différentielles non commutatives de poids $\leqq r$ coïncide donc avec celle des formes différentielles commutatives (cohomologie « tame »).

(1) Les coordonnées (t_i) d'un point courant de Δ_s vérifient donc les relations $t_i \geqq 0$ et $\sum t_i = 1$, $i = 0, 1, \ldots, s$.

Note remise le 26 novembre 1992, acceptée le 27 novembre 1992.

Références bibliographiques

[1] H. Cartan, Théories cohomologiques, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.
[2] A. Connes, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, n° 62, 1985, p. 257-360.
[3] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque, 149, 1987, Société Mathématique de France.
[4] P. May, *Simplicial objects in Algebraic Topology*, D. Van Nostrand Company, 1967.

UFR de Mathématiques-URA n° 212 du CNRS,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.
e. mail : karoubi @ mathp7.jussieu.fr