

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *K*-théorie multiplicative et homologie cyclique.  
Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous définissons en géométrie différentielle non commutative [1] l'analogue  $\mathcal{K}_r(A)$  (pour une algèbre topologique localement convexe  $A$ ) de la *K*-théorie multiplicative introduite dans une Note précédente [8]. L'homomorphisme  $K_r(A) \rightarrow K_r^{top}(A)$  de la *K*-théorie algébrique de Quillen vers la *K*-théorie topologique se factorise à travers  $\mathcal{K}_r(A)$ .

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Multiplicative *K*-theory and cyclic homology.

In non commutative differential geometry [1] we define a group  $\mathcal{K}_r(A)$  (for any locally convex algebra  $A$ ) which is analogous to the multiplicative *K*-theory introduced in a previous Note [8]. The homomorphism  $K_r(A) \rightarrow K_r^{top}(A)$  from the algebraic *K*-theory of Quillen to topological *K*-theory can be factorised through  $\mathcal{K}_r(A)$ .

I. UNE DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE EN TERMES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES. — Considérons d'abord une *k*-algèbre  $A$ ,  $k$  étant un anneau commutatif quelconque tel que  $k$  soit facteur direct dans  $A$  (en tant que  $k$ -module) et tel que  $k \supset \mathbb{Q}$ . Soit  $\Omega_*(A)$  l'algèbre graduée universelle des formes différentielles non commutatives sur  $A$  ([1], [4], [6]). En particulier,  $\Omega_n(A)$  s'identifie à  $A \otimes A/k \otimes \dots \otimes A/k$  ( $n$  facteurs  $A/k$ ), ses éléments s'écrivant formellement comme combinaison linéaire de « formes différentielles non commutatives »  $a_0 da_1 \dots da_n$  avec la règle de calcul  $d(xy) = x \cdot dy + dx \cdot y$ . Soit  $\check{\Omega}_*(A)$  le quotient de  $\Omega_*(A)$  par le  $k$ -module  $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$  engendré par les commutateurs gradués. L'homologie de Hochschild  $H_*(A, A)$  peut s'identifier à l'homologie du complexe

$$\dots \rightarrow \Omega_{n+1}(A) \rightarrow \Omega_n(A) \xrightarrow{b} \Omega_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

où  $b(\omega \cdot dx) = (-1)^n(x\omega - \omega x)$ , avec  $x \in A = \Omega_0(A)$  et  $\omega \in \Omega_{n-1}(A)$ . Définissons  $\check{\Omega}_n(A) = \check{\Omega}_n(A)$  si  $n \geq 1$  et  $\check{\Omega}_0(A) = \Omega_0(A)/k$ .

THÉORÈME. — L'homomorphisme canonique  $H_n(A, A) \rightarrow \check{\Omega}_n(A)$  est injectif. Pour  $n \geq 1$ , l'homologie en degré  $n-1$  du complexe

$$0 \rightarrow \check{\Omega}_0(A) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \check{\Omega}_{n-1}(A) \xrightarrow{d} \check{\Omega}_n(A)/H_n(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite ([1], [9])  $\overline{HC}_{n-1}(A)$ .

Remarque bibliographique. — Ce théorème est l'analogie en homologie cyclique d'un théorème d'A. Connes en cohomologie cyclique (comparer avec [1], théorème 33). L'intérêt du complexe  $(\check{\Omega}_*(A), d)$  en *K*-théorie algébrique (notamment pour la définition du caractère de Chern) a été montré indépendamment dans [4].

Supposons maintenant que  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et que  $A$  soit une *k*-algèbre topologique localement convexe. En remplaçant les produits tensoriels précédents par les produits tensoriels projectifs au sens de Grothendieck [3], on peut définir le complexe de De Rham topologique universel  $\Omega_*^{top}(A)$  par la formule  $\Omega_n^{top}(A) = A \hat{\otimes} A/k \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A/k$ . De même,  $\check{\Omega}_*^{top}(A)$  sera défini comme le quotient de  $\Omega_*^{top}(A)$  par l'adhérence de  $[\Omega_*^{top}(A), \Omega_*^{top}(A)]$ . Dans ce cas, l'image de  $d: \check{\Omega}_*^{top}(A) \rightarrow \check{\Omega}_*^{top}(A)$  est fermée. Le théorème précédent s'étend au cadre topologique en un sens évident : l'homologie de Hochschild topologique  $H_n^{top}(A, A)$  (quotient de  $\text{Ker } b$  par l'adhérence de  $\text{Im } b$ ) est un sous-espace vectoriel de

$\bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)$ ; l'homologie en degré  $n - 1$  du complexe

$$0 \rightarrow \check{\Omega}_0^{\text{top}}(A) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \check{\Omega}_{n-1}^{\text{top}}(A) \rightarrow \bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)/H_n^{\text{top}}(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite topologique  $\overline{HC}_{n-1}^{\text{top}}(A)$  si  $n \geq 1$  (avec  $\check{\Omega}_n^{\text{top}} = \bar{\Omega}_n^{\text{top}}$  si  $n \geq 1$  et  $\check{\Omega}_0^{\text{top}} = \bar{\Omega}_0^{\text{top}}/k$ ).

A partir de maintenant, toutes les homologies considérées : cyclique, de Hochschild, etc. seront supposées topologiques séparées.

Pour alléger les notations, on écrira désormais  $HC_n(A)$ ,  $\Omega_n(A)$ , etc. au lieu de  $HC_n^{\text{top}}(A)$ ,  $\Omega_n^{\text{top}}(A)$ , etc.

II. DÉFINITION DES GROUPES DE K-THÉORIE MULTIPLICATIVE  $\mathcal{K}_r(A)$ . — Pour toute  $k$ -algèbre topologique localement convexe  $A$ , on peut définir les groupes de K-théorie topologique  $K_r^{\text{top}}(A)$  comme les groupes d'homotopie  $\pi_r(K_0(A) \times BGL(A_*))$  où  $A_*$  est l'anneau simplicial défini par  $A_n = C^\infty(\Delta^n) \hat{\otimes} A$ . Plus généralement, si  $X$  est un ensemble simplicial, le groupe  $K_A^{\text{top}}(X)$  est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de  $X$  dans l'espace de Kan  $K_0(A) \times BGL(A_*)$ ; si  $|X|$  est fini, c'est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés repérés sur  $X$  [7] de fibre un  $A$ -module projectif de type fini. Si  $A$  est une algèbre de Banach, on retrouve les définitions usuelles [5]. En particulier,  $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+2}^{\text{top}}(A)$  si  $k = \mathbb{C}$  et  $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+8}^{\text{top}}(A)$  si  $k = \mathbb{R}$  (périodicité de Bott). A partir de maintenant,  $X$  désignera un ensemble simplicial tel que  $|X|$  soit fini.

Considérons le complexe  $\Omega_A^*(X) = \Omega^*(X; \check{\Omega}_*(A))$  déjà introduit dans [4] et [7] et constitué des formes différentielles  $C^\infty$  sur  $X$  (au sens de Sullivan) à valeurs dans  $\check{\Omega}_*(A)$ . Définissons une filtration sur ce complexe en posant  $F^n(\Omega_A^*(X)) = \Omega^*(X; F^n(\check{\Omega}_*(A)))$  où  $F^n(\check{\Omega}_*(A))$  est le sous-complexe suivant de  $\check{\Omega}_*(A)$  :

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow H_n(A, A) \rightarrow \check{\Omega}_{n+1}(A) \rightarrow \check{\Omega}_{n+2}(A) \rightarrow \dots$$

$H_n(A, A)$  étant placé en degré  $n$  ( $n \geq 1$ ). En suivant [8], on définira un «  $A$ -fibré multiplicatif d'ordre  $r$  » sur  $X$  comme un triple  $(E, D, \omega)$  où  $E$  est un  $A$ -fibré repéré sur  $X$  de fibre un  $A$ -module projectif de type fini,  $D$  une  $A$ -connexion sur  $E$  ([4], [7]) et  $\omega \in \Omega_A^{2r-1}(X)$  telle que  $d\omega \equiv \text{Ch}_r(D) \text{ mod. } F^r(\Omega_A^*(X))$  (cf. [1], [4] et [7] pour la définition explicite du caractère de Chern  $\text{Ch}_r$  dans le contexte non commutatif).

Avec les notations de [8] on dira que deux fibrés multiplicatifs  $\xi^0 = (E^0, D^0, \omega^0)$  et  $\xi^1 = (E^1, D^1, \omega^1)$  sont équivalents s'il existe un isomorphisme  $\alpha: E^0 \rightarrow E^1$  tel que  $\omega^1 - \omega^0 \equiv \Theta_r(D^0, \alpha^* D^1) \text{ mod. } B_A^{2r-1}(X) + F^r(\Omega_A^*(X))$ . On désignera par  $\mathcal{K}_A^{(2r)}(X)$  le groupe symétrisé du monoïde abélien formé des classes d'équivalence de fibrés multiplicatifs.

THÉORÈME. — On a la suite exacte

$$K_A^{-1 \text{ top}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i+j=2\tau-1} H^i(X; H_j(\check{\Omega}_*(A)/F^r)) \rightarrow \mathcal{K}_A^{(2r)}(X) \rightarrow K_A^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i+j=2\tau} H^i(X; H_j(\check{\Omega}_*(A)/F^r)).$$

Dans cette suite exacte,  $K_A^{-1 \text{ top}}(X) \approx [X, GL(A_*)]$  et les homomorphismes sont définis par des formules analogues à celles de [8].

En particulier, si  $X$  est la sphère  $S^r$  et si  $B = A^+$  où  $A^+$  désigne l'algèbre  $A$  augmentée d'un élément unité, on pose

$$\check{\mathcal{K}}_r(B) = \text{Coker}(\mathcal{K}_B^{(2r)}(\text{Point}) \rightarrow \mathcal{K}_B^{(2r)}(S^r))$$

et

$$\mathcal{K}_r(A) = \text{Coker}(\check{\mathcal{K}}_r(k) \rightarrow \check{\mathcal{K}}_r(A^+)).$$

La suite exacte précédente peut alors s'écrire

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-1}(A) \rightarrow \mathcal{K}_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_r(A)/\text{Im}(H_r(A, A)).$$

Supposons maintenant que la suite

$$H_r(A, A) \rightarrow HC_r(A) \rightarrow HC_{r-2}(A)$$

soit exacte [hypothèse notée (H<sub>r</sub>)]. On en déduit la suite exacte

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-1}(A) \rightarrow \mathcal{K}_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-2}(A). \tag{S}$$

*Remarques.* — La notation  $\mathcal{K}_r(A)$  est empruntée à Graeme Segal qui a défini des groupes analogues s'insérant dans des suites exactes du type (S). Cependant, j'ignore si sa définition coïncide avec celle-ci. D'autre part, l'hypothèse (H<sub>r</sub>) est vérifiée si  $A = C^\infty(M)$ , M variété compacte, d'après les calculs duaux de ceux effectués dans [1], toutes les homologies considérées étant alors séparées.

### III. RELATION AVEC LES GROUPES K<sub>r</sub> DE QUILLEN.

**THÉORÈME.** — *L'homomorphisme  $K_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A)$  de la K-théorie algébrique de Quillen [10] vers la K-théorie topologique se factorise naturellement à travers le groupe  $\mathcal{K}_r(A)$*

$$\begin{array}{ccc} K_r(A) & \rightarrow & \mathcal{K}_r(A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & K_r^{\text{top}}(A) & \end{array}$$

**THÉORÈME.** — *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{r+1}^{\text{top}}(A) & \rightarrow & K_r^{\text{rel}}(A) & \rightarrow & K_r(A) & \rightarrow & K_r^{\text{top}}(A) & \rightarrow & K_{r-1}^{\text{rel}}(A) \\ \parallel & & \downarrow \text{Ch}_r^{\text{rel}} & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ K_{r+1}^{\text{top}}(A) & \rightarrow & HC_{r-1}(A) & \rightarrow & \mathcal{K}_r(A) & \rightarrow & K_r^{\text{top}}(A) & \rightarrow & HC_{r-2}(A) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ HC_{r+1}(A) & \rightarrow & HC_{r-1}(A) & \rightarrow & H_r(A, A) & \rightarrow & HC_r(A) & \rightarrow & HC_{r-2}(A) \end{array}$$

où le « caractère de Chern relatif »  $\text{Ch}_r^{\text{rel}}$  est défini dans [2] et où la dernière suite (peut-être non exacte) est définie dans [1].

*Exemple.* — Soit X une variété  $C^\infty$  et soit A l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  sur X. Alors le groupe  $\mathcal{K}_r(A)$  est isomorphe au groupe noté  $\mathcal{K}_r(X)$  d'une Note précédente [8] où la filtration sur  $\Omega^*(X)$  est la filtration « bête » définie par

$$F^r(\Omega^n(X)) = \Omega^n(X) \quad \text{si } r \leq n \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon}$$

(ceci est une terminologie admise par les spécialistes de théorie de Hodge). Si on considère plus particulièrement le cas où  $X = S^1$  et  $k = \mathbb{C}$ , l'homomorphisme  $K_2(C^\infty(S^1)) \rightarrow \mathcal{K}_2(C^\infty(S^1)) \approx \mathbb{C}^*$  est associé à l'extension centrale de  $SL(C^\infty(S^1))$  par  $\mathbb{C}^*$  d'après [2].

*Remarque.* — La définition de la K-théorie multiplicative (ainsi que celle de l'homologie cyclique) peut être généralisée à une filtration quelconque d'une algèbre différentielle graduée topologique  $\Omega_*(A)$  telle que  $\Omega_0(A) = A$  (l'image dans  $\bar{\Omega}_*(A)$  étant fermée). Ainsi, dans l'exemple précédent il est plus naturel de considérer le complexe

$$\Omega_i(A) = \Omega^i(X) \oplus \Omega^{i-2}(X) \oplus \Omega^{i-4}(X) \oplus \dots$$

avec la filtration déduite de la filtration « bête ». Ceci évite le recours aux produits tensoriels topologiques comme il a été montré pour la situation duale dans [1]. L'analogie avec une Note précédente [8] est ainsi plus transparente, notamment pour la filtration de Hodge (cas d'une variété analytique complexe) et la filtration associée à un feuilletage.

Reçue le 24 février 1986, acceptée le 30 juin 1986.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. CONNES, *Non commutative differential geometry*, Parts I, II, Prépublication I.H.E.S., 1983.
- [2] A. CONNES et M. KAROUBI, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, *Comptes rendus*, 299, série I, 1984, p. 963-968.
- [3] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, *Memoirs of the American Math. Society*, 16, 1955.
- [4] M. KAROUBI, Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings*, 2, Part I, 1982, p. 19-27.
- [5] M. KAROUBI, *K-theory, An introduction*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [6] M. KAROUBI, Homologie cyclique des groupes et des algèbres, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381-384.
- [7] M. KAROUBI, Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique, 297, série I, 1983, p. 557-560.
- [8] M. KAROUBI, K-théorie multiplicative, *Comptes rendus*, 302, série I, 1986, p. 321-324.
- [9] J. L. LODAY et D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helvetici*, 59, 1984, p. 565-591.
- [10] D. QUILLEN, Higher algebraic K-theory, *Springer Lecture Notes in Math.*, 341, 1973, p. 85-147.

*Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 212,  
Université de Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75251 Paris.*