406 1

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique et K-théorie algébrique I.* Note (*) de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous étendons aux anneaux quelconques les classes caractéristiques « absolues » définies dans [5] pour les $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives. Pour cela nous utilisons l'homologie cyclique ([2], [3], [7]) et les résultats de la Note précédente [6].

ALGEBRA. — Cyclic Homology and Algebraic K-theory I.

We extend to arbitrary rings the "absolute" characteristic classes defined in [5] *for commutative* $\mathbb{Q}$*-algebras. For this we use cyclic homology* ([2], [3], [7]) *and results of the previous Note* [6].

I. Définition des classes caractéristiques. — Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre A, A. Connes a défini des homomorphismes $K_0(A) \to HC_{2l}(A)$ [2]. Plus généralement, si A est une k-algèbre, tout module projectif de type fini E est l'image d'un projecteur p dans $M_r(A)$ pour un certain r.

Ce projecteur définit un homomorphisme d'anneaux :

$$\theta: \quad R = k[x]/(x^2-x) \to M_r(A),$$

par $\theta(x)=p$. Puisque $\overline{HC}_{2l}(R) \approx HC_{2l}(k) \approx k$ canoniquement [7], il existe un élément privilégié u_l de $\overline{HC}_{2l}(R) \subset HC_{2l}(R)$. L'image de u_l par l'homomorphisme composé :

$$HC_{2l}(R) \to HC_{2l}(M_r(A)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} HC_{2l}(A),$$

où Tr est la « trace », définit l'invariant cherché : on démontre qu'il ne dépend que de E et que c'est une fonction additive de E, donc induit bien un homomorphisme $Ch_0^l : K_0(A) \to HC_{2l}(A)$. Notons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & HC_{2l}(A) \arrow[dd, "S"] \\ K_0(A) \arrow[ur, "Ch_0^l"] \arrow[dr, "Ch_0^{l-1}"'] & \\ & HC_{2l-2}(A) \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant construire des invariants de la K-théorie algébrique « supérieure » :

$$D_i: \quad K_i(A) \to H_i(A, A) \qquad \text{et} \qquad Ch_i^l : K_i(A) \to HC_{i+2l}(A).$$

Ici D_i est l'homomorphisme introduit par K. Dennis [4], Ch_i^0 est l'homomorphisme composé $K_i(A) \to H_i(A, A) \to HC_i(A)$ et les Ch_i^l rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & HC_{i+2l}(A) \arrow[dd, "S"] \\ K_i(A) \arrow[ur, "Ch_i^l"] \arrow[dr, "Ch_i^{l-1}"'] & \\ & HC_{i+2l-2}(A) \end{tikzcd}$$

Pour cela, désignons par MA l'anneau des matrices infinies dont tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini et par $G = GL(A)$ le groupe linéaire infini.

On a alors des isomorphismes de Morita induits par la trace :

$$\mathrm{HC}_i(\mathrm{MA}) \approx \mathrm{HC}_i(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_i(\mathrm{MA}, \mathrm{MA}) \approx \mathrm{H}_i(\mathrm{A}, \mathrm{A})$$

ainsi qu'un homomorphisme d'anneaux $k\,[\mathrm{G}] \overset{\varphi}{\rightarrow} \widetilde{\mathrm{MA}}$. L'homomorphisme de Dennis D_i est la composition des flèches suivantes :

$$\mathrm{K}_i(\mathrm{A}) = \pi_i(\mathrm{BG}^+) \overset{h_i}{\rightarrow} \mathrm{H}_i(\mathrm{G}) \overset{\theta}{\rightarrow} \mathrm{H}_i(k\,[\mathrm{G}]) \overset{\varphi_*}{\rightarrow} \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathrm{MA}}, \widetilde{\mathrm{MA}}) \rightarrow \mathrm{H}_i(\mathrm{A}, \mathrm{A})$$

parmi lesquelles h_i est l'homomorphisme de Hurewicz, φ_* est induit par φ et θ est induit par l'homomorphisme de complexes :

$$g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n \mapsto (g_1 g_2 \ldots g_n)^{-1} \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n,$$

considéré dans la Note précédente [6]. Pour définir Ch_i^l on remarque simplement que $\mathrm{H}_i(\mathrm{G})$ est un facteur direct *canonique* dans $\mathrm{HC}_{i+2l}(\mathrm{G})$ [6].

Au-delà de $\mathrm{H}_i(\mathrm{G})$ on peut donc aussi considérer la composition des homomorphismes :

$$\mathrm{K}_i(\mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{H}_i(\mathrm{G}) \rightarrow \mathrm{HC}_{i+2l}(\mathrm{G}) \overset{\theta}{\rightarrow} \mathrm{HC}_{i+2l}(k\,[\mathrm{G}]) \overset{\varphi_*}{\rightarrow} \mathrm{HC}_{i+2l}(\widetilde{\mathrm{MA}}) \rightarrow \mathrm{HC}_{i+2l}(\mathrm{A})$$

où θ est aussi défini dans [6], paragraphe 2. Il est clair que les homomorphismes D_i et Ch_i^l satisfont aux propriétés requises.

II. — Définition simpliciale des classes caractéristiques. — Nous allons reprendre ici le travail commencé dans [5] où A est maintenant une k-algèbre unitaire quelconque non nécessairement commutative mais en supposant quelques factorielles inversibles dans k. De manière plus précise, la méthode développée dans [5] se généralise sans peine à ce cadre à condition de considérer le complexe des formes différentielles *non commutatives* $\Omega_*\,\mathrm{A}$ défini dans [6]. Les « traces » prendront alors leurs valeurs dans :

$$\overline{\Omega}_*\,\mathrm{A} = \Omega_*\,\mathrm{A}/[\Omega_*\,\mathrm{A}, \Omega_*\,\mathrm{A}].$$

D'autre part, si E est un k-module et si $1/n! \in k$, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}; \mathrm{E})$ où X est un ensemble simplicial, peuvent être calculés pour $p \leqq n$ par le complexe de De Rham-Sullivan des formes différentielles « simpliciales » de poids $\leqq n$ (*cf.* [1]), c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients dans E d'éléments de la forme :

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \qquad \text{avec} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + p \leqq n$$

($x_0, x_1, \ldots, x_m$ représentant les coordonnées barycentriques sur chaque simplexe de dimension m). On désigne par $\Omega^p(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ le k-module des formes différentielles de degré p et de poids $\leqq n$ (donc $p \leqq n$ aussi).

En suivant [5], considérons maintenant le bicomplexe $\Omega^*(\mathrm{X}, \overline{\Omega}_*\,\mathrm{A})$ et le sous-complexe $\mathscr{C}_{\mathrm{A}}^*(\mathrm{X})$ défini par :

$$\mathscr{C}_{\mathrm{A}}^{2r}(\mathrm{X}) = \bigoplus_{\substack{p<q \\ p+q=2r}} \Omega^p(\mathrm{X}, \overline{\Omega}_q\,\mathrm{A}) \oplus \mathrm{Z}^r(\mathrm{X}, \overline{\Omega}_r\,\mathrm{A})$$

$$\mathscr{C}_{\mathrm{A}}^{2r+1}(\mathrm{X}) = \bigoplus_{\substack{p<q \\ p+q=2r+1}} \Omega^p(\mathrm{X}, \overline{\Omega}_q\,\mathrm{A})$$

On notera $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}^{*}(\mathrm{X})$ l'homologie de ce sous-complexe; elle se calcule par une variante du théorème de Künneth : pour $r \leqq n$, on a une suite exacte scindée :

$$0 \to \bigoplus_{\substack{p+q=2r-1 \\ p<q}} \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_p(\mathrm{X}), \overline{\mathrm{H}}_q(\mathrm{A})) \to \mathscr{H}_{\mathrm{A}}^{2r}(\mathrm{X})$$

$$\to \bigoplus_{p+q=2r} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_p(\mathrm{X}), \overline{\mathrm{H}}_q(\mathrm{A})) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_r(\mathrm{X}), \overline{\mathrm{Z}}_r(\mathrm{A})) \to 0.$$

A tout A-fibré plat E sur X de fibre A^s, on a associé dans [5] un caractère de Chern $\mathrm{Ch}_r(\mathrm{E}) \in \mathscr{H}_{\mathrm{A}}^{2r}(\mathrm{X})$. En particulier, si X est une sphère homologique de dimension p, on en déduit un homomorphisme de $\mathbb{Z} \approx \mathrm{H}_p(\mathrm{X})$ dans $\overline{\mathrm{H}}_q(\mathrm{A})$ pour $p \leqq q$ qui peut être défini par « intégration » sur les simplexes de dimension p de $1/r!\, \mathrm{Tr}(\mathrm{R}r)$ où R est la forme de courbure [5]. D'après la description de la K-théorie algébrique en termes de fibrés plats [5], on en déduit un homomorphisme :

$$\mathrm{K}_i(\mathrm{A}) \to \overline{\mathrm{H}}_{i+2l}(\mathrm{A})$$

(en posant $p=i$ et $q=i+2l$) qui est bien défini pour $i+l \leqq n$.

Supposons maintenant que A soit une algèbre augmentée. Dans ce cas :

$$\overline{\mathrm{H}}_{i+2l}(\mathrm{A}) \approx \mathrm{Ker}(\overline{\mathrm{HC}}_{i+2l}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}_{i+2l+1}(\mathrm{A}, \mathrm{A})) \quad ([2], [6]).$$

On en déduit un homomorphisme :

$$\mathrm{Ch}_i'^{\,l} : \quad \mathrm{K}_i(\mathrm{A}) \to \overline{\mathrm{HC}}_{i+2l}(\mathrm{A}),$$

avec $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}=0$ pour $l<0$.

Théorème. — *Supposons $n!$ inversible dans k. Alors les homomorphismes $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}$ sont bien définis pour $i+l \leqq n$ et rendent le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathrm{HC}}_{i+2l}(\mathrm{A}) \arrow[dd, "\mathrm{S}"] \\
\mathrm{K}_i(\mathrm{A}) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_i'^{\,l}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ch}_i'^{\,l-1}"'] & \\
 & \overline{\mathrm{HC}}_{i+2l-2}(\mathrm{A})
\end{tikzcd}$$

En outre, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{HC}_{i+2l}(\mathrm{A}) \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathrm{K}_i(\mathrm{A}) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_i^l"] \arrow[dr, "i!\,\mathrm{Ch}_i'^{\,l}"'] & \\
 & \overline{\mathrm{HC}}_{i+2l}(\mathrm{A})
\end{tikzcd}$$

où Ch_i^l est défini dans le paragraphe 1 et où π est la projection canonique de l'homologie cyclique sur l'homologie cyclique réduite.

La démonstration de ce théorème est trop technique pour être reproduite intégralement ici. Mentionnons simplement que les formules décrivant $\mathrm{Ch}_r(\mathrm{E})$ (*cf.* [5]) ne font intervenir que les « différentielles logarithmiques » $g_{ki}^{-1}\, dg_{ki}$ des fonctions de transition g_{ki} de E. Ceci montre que dans les diverses factorisations permettant de définir Ch_i^l et $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}$ l'ingrédient essentiel est un homomorphisme naturel $H_i(G) \to \overline{HC}_{i+2l}(G)$ défini pour *tout* groupe G noté Δ_i^l ou $\Delta_i'^{\,l}$ suivant la situation. Puisque Δ_i^l et $\Delta_i'^{\,l}$ sont tous deux compatibles avec l'homomorphisme de périodicité S et qu'il n'existe pas de transformation naturelle différente de 0 de $H_i(G)$ dans $H_{i+k}(G)$ pour $k > 0$, il suffit de comparer Δ_i^0 et $\Delta_i'^{\,0}$. Or dans les deux cas, l'homomorphisme composé $H_i(G) \to \overline{HC}_i(G) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{i-2}(G)$ est réduit à 0. On doit donc avoir $\Delta_i'^{\,l} = \lambda \Delta_i^l$ pour un certain scalaire $\lambda \in k$. Pour déterminer λ, il suffit de choisir l'exemple $G = \mathbb{Z}^i$.

Dans ce cas, $H_i(G) \approx k$ et l'homomorphisme :

$$k \approx H_i(G) \subset H_i(k[G], k[G]) \to H_i^{DR}(k[G]) \approx k,$$

qui associe à la forme différentielle non commutative $a_0\, da_1 \ldots da_i$ la forme différentielle usuelle $a_0\, da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_i$ est la multiplication par $i!$ d'après les formules usuelles de multiplication en homologie de Hochschild. Puisque l'homomorphisme composé :

$$Ch' : \quad K_*(A) \to \overline{H}_*(A) \to H_*^{DR}(A)$$

est multiplicatif [5], le théorème en résulte (choisir $A = k[G]$).

Remarque 1. — Pour une $\mathbb{Q}$-algèbre A, A. Connes a aussi défini un homomorphisme :

$$Ch_1''^{\,l} : \quad K_1(A) \to HC_{1+2l}(A).$$

Si $\tilde{A}$ désigne l'algèbre A augmentée d'un élément unité, il est facile de voir que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
K_1(\tilde{A}) \arrow[r, "Ch_1'^{\,l}"] & \overline{HC}_{1+2l}(\tilde{A}) \\
K_1(A) \arrow[u] \arrow[r, "Ch_1''^{\,l}"'] & HC_{1+2l}(A) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Remarque 2. — Pour les fibrés plats de base X quelconque, la méthode développée dans le paragraphe 2 semble apporter des résultats plus fins (à condition d'inverser quelques factorielles) que la méthode du paragraphe 1. Pour généraliser les résultats du paragraphe 1 à ce cadre il manque semble-t-il une « bonne » interprétation des formes différentielles en caractéristique quelconque.

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] H. Cartan, *Inventiones Math.*, 35, 1976, p. 261-271.

[2] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II (*De Rham Homology and Non Commutative Algebra*, Preprint I.H.E.S., 1983).

[3] A. Connes, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 953.

[4] K. Dennis, *Algebraic K-theory and Hochschild Homology* (non publié).

[5] M. Karoubi, *Canadian Math. Society Conference Proceedings*, 2, Part 1, 1982.

[6] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381.

[7] J.-L. Loday et D. Quillen, *On the Cyclic Homology of Algebras* (à paraître).

Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

406 2

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique et* K-*théorie algébrique II*. Note (*) de **Max Karoubi,** présentée par Alain Connes.

Nous étudions la compatibilité du caractère de Chern généralisé [7] avec les structures multiplicatives en cohomologie cyclique [3]. Nous définissons aussi de nouveaux invariants de la K-théorie algébrique d'algèbres de groupes.

ALGEBRA. — Cyclic Homology and Algebraic K-Theory II.

We study the compatibility of the generalized Chern character [7] *with the multiplicative structures in cyclic cohomology* [3]. *We also define new invariants of the algebraic K-theory of group algebras.*

I. Homologie et cohomologie cycliques. — Nous reprenons ici les considérations de [3] en les précisant et en les adaptant à la cohomologie des k-algèbres et des groupes.

Rappelons d'abord que la catégorie Δ a comme objets les entiers naturels $[n]$, un morphisme $[n] \to p$ étant donné par une application croissante $\{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, p\}$. Ces morphismes sont engendrés par les deux familles de morphismes :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,q} : \quad [q-1] \to [q] \qquad \text{et} \qquad \eta_i = \eta_{i,q} : [q+1] \to [q],$$

satisfaisant aux relations usuelles [8], p. 234. La catégorie Λ de A. Connes [3] a les mêmes objets que Δ mais on étend l'ensemble des morphismes en considérant en outre les permutations circulaires de la source ou du but. De manière plus précise, si on désigne par $\lambda = \lambda_q$ la permutation de $\{0, \ldots, q\} = \mathbb{Z}/q+1$ pour tout q définie par $\lambda(j) = j-1$, on a les relations :

$$\varepsilon_i = \lambda^{-1} . \varepsilon_{i-1} . \lambda \qquad \text{et} \qquad \eta_i = \lambda^{-1} . \eta_{i-1} . \lambda.$$

Ces relations définissent alors Λ comme « produit semi-direct » de la catégorie Δ avec les divers groupes cycliques $\mathbb{Z}/q+1$.

Soit $k[\Delta]$ (resp. $k[\Lambda]$) l'algèbre associée à la catégorie Δ (resp. Λ), c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les symboles ε_i, η_i (resp. ε_i, η_i, λ) et vérifiant les relations ci-dessus. On peut remarquer qu'un groupe abélien simplicial (resp. cosimplicial) est un $k[\Delta]^0$-module (resp. un $k[\Delta]$-module) à gauche. De manière analogue, on définira un $\mathbb{Z}$-module *cyclique* (resp. *cocyclique*) comme un $k[\Lambda]^0$-module (resp. un $k[\Lambda]$-module) à gauche. On pourra remarquer ici que $k[\mathscr{C}^0] \approx k[\mathscr{C}]^0$ pour $\mathscr{C} = \Delta$ ou Λ, et que nous nous écartons légèrement des notations de [3], ce qui n'a qu'une importance relative puisque les catégories Λ et Λ^0 sont isomorphes [3]. D'autre part, pour éviter des lourdeurs d'écriture nous écrirons souvent Δ, Λ, etc. au lieu de $k[\Delta]$, $k[\Lambda]$, ... Par exemple, un $\mathbb{Z}$-module cyclique est donné par une famille de groupes abéliens E_q avec des morphismes :

$$d_i : \quad E_q \to E_{q-1}, \qquad s_i : \quad E_q \to E_{q+1} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \quad E_q \to E_q .$$

satisfaisant aux relations « duales » de celles écrites plus haut : celles de [8], p. 234, puis :

$$d_i = \sigma . d_{i-1} . \sigma^{-1} \qquad \text{et} \qquad s_i = \sigma . s_{i-1} . \sigma^{-1} \quad [9].$$

En particulier, à toute k-algèbre A on peut associer un $\mathbb{Z}$-module cyclique en posant $E_q = A^{q+1}$ (produit tensoriel sur k de $q+1$ copies de A) et :

$$d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i < q,$$