

TOPOLOGIE. — Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique. Note (*) de Max Karoubi, présentée par Alain Connes.

Cette Note est la suite des Notes précédentes sur le sujet ([11], [12], [13]). On y généralise aux algèbres de Banach quelconques ainsi qu'aux algèbres de Banach ultramétriques la notion de régulateur en K-théorie algébrique définie dans [2] et [10].

TOPOLOGY. — Cyclic Homology and Regulators in Algebraic K-Theory.

This Note follows previous Notes on the same subject ([11], [12], [13]). We generalize to arbitrary Banach algebras and to ultrametric Banach algebras the notion of regulator in algebraic K-theory defined in [2] and [10].

1. FIBRÉS SIMPLICIAUX REPÉRÉS. — Soit G un groupe simplicial et soit X un ensemble simplicial. Par définition, un G-fibré repéré sur X est la donnée pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour $\{i, j\} \subset \Delta_n = \{0, \dots, n\}$ d'éléments $g_{ji} = g_{ji}(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $g_{ki} = g_{kj} \cdot g_{ji}$.
- (ii) Soit $\varphi : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$ une application croissante et soit $\varphi^* : X_n \rightarrow X_p$ et $\varphi^* : G_n \rightarrow G_p$ une notation indifférente pour les applications induites sur X et G. On a alors la formule :

$$\varphi^*(g_{\varphi(j)\varphi(i)}(\sigma)) = g_{ji}(\sigma).$$

Si $E = (g_{ji})$ et $F = (h_{ji})$ sont deux tels G-fibrés repérés, un morphisme $\lambda : E \rightarrow F$ est donné pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour $i \in \Delta_n$ par des éléments $\lambda_i = \lambda_i(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $h_{ji} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot g_{ji}$.
- (ii) Avec φ comme ci-dessus, on a la formule :

$$\varphi^*(\lambda_{\varphi(i)}(\sigma)) = \lambda_i(\varphi^* \sigma).$$

Les morphismes se composent de manière évidente (et sont tous des isomorphismes). Notons $\Phi_G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés repérés.

THÉORÈME. — L'ensemble $\Phi_G(X)$ est naturellement isomorphe à l'ensemble $[X, BG]$ des classes d'homotopie d'applications de X dans le complexe de Kan BG [14].

2. K-THÉORIE TOPOLOGIQUE ET K-THÉORIE RELATIVE. — Soit $A = (A_n)$ un anneau simplicial connexe et soit G le groupe simplicial $GL(A)$. Alors nous définirons la K-théorie topologique de A comme l'ensemble des groupes d'homotopie ($i > 0$) :

$$K_i^{top}(A) = \pi_i(BGL(A)),$$

Dans cette Note nous nous intéressons aux deux types d'exemples suivants :

(1) Soit R une algèbre de Banach réelle ou complexe et soit A_n l'ensemble des applications de classe C^m (m fixé tel que $0 \leq m \leq \infty$) du simplexe type Δ_n dans R. Il est bien connu que les groupes $K_i^{top}(A)$ [qu'on notera simplement $K_i^{top}(R)$] sont indépendants de m et sont les groupes usuels de la K-théorie topologique [7]. Si R est complexe par exemple, on a $K_i^{top}(R) \approx K_0(R)$ pour i pair et $K_i^{top}(R) \approx \pi_0(GL(R))$ pour i impair (périodicité de Bott).

(2) Soit R une algèbre de Banach ultramétrique et soit B_n l'anneau des séries formelles à $n+1$ variables :

$$P = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n},$$

