

GROUPES TOPOLOGIQUES. — *Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert.* Note (*) de MM. Pierre de la Harpe et Max Karoubi, présentée par M. Henri Cartan.

Soient G un groupe topologique, $U(H)$ le groupe unitaire d'un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et $T : G \rightarrow U(H)$ une application continue telle que $T(gh) - T(g)T(h)$ soit un opérateur compact sur H pour tout couple $(g, h) \in G \times G$. Nous cherchons l'obstruction à trouver un homomorphisme continu $S : G \rightarrow U(H)$ tel que $S(g) - T(g)$ soit compact pour tout élément g de G . Nous montrons par exemple qu'un tel homomorphisme S existe toujours si G est un groupe compact.

1. ÉNONCÉ DU PROBLÈME. — Soient H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, $L(H)$ l'algèbre stellaire des opérateurs linéaires bornés sur H et $C(H)$ l'idéal bilatère fermé constitué par les opérateurs compacts. L'algèbre de Calkin de H , notée $Cal(H)$, est l'algèbre stellaire quotient de $L(H)$ par $C(H)$. Nous notons $U(H)$ le groupe unitaire de H et $Cal(H)_u$ le groupe des éléments unitaires de $Cal(H)$, tous deux munis de leur topologie normique. La projection canonique π induit un homomorphisme continu $U(H) \rightarrow Cal(H)_u$ dont l'image est la composante neutre $Cal(H)_0$ du but [cf. par exemple (3) chap. VII].

Si G est un groupe topologique et si $\sigma : G \rightarrow Cal(H)_0$ est un homomorphisme continu, nous dirons que σ est *relevable* s'il existe un homomorphisme continu $S : G \rightarrow U(H)$ tel que $\pi S = \sigma$ (S est appelée un relèvement de σ). Nous dirons que G est relevable si tous les homomorphismes continus σ de G dans $Cal(H)_0$ le sont. Le problème qui nous intéresse est de trouver l'obstruction à « relever » un homomorphisme σ donné. Une première obstruction de nature homotopique consiste à trouver une application continue $T : G \rightarrow U(H)$ telle que $\pi T = \sigma$; une telle obstruction disparaît si G est discret; il en est de même si G est un groupe de Lie (on le montre en utilisant la K-théorie). Une deuxième obstruction, qui nous intéresse plus particulièrement dans cette rédaction, consiste à trouver une « déformation » de T en un homomorphisme continu S qui se projette encore sur σ .

2. EXEMPLES. — Le groupe Z est relevable car $\pi : U(H) \rightarrow Cal(H)_0$ est surjectif. Un cas particulier d'un résultat dû à Olsen (2) exprime que les groupes cycliques finis sont relevables. Par propriété universelle, un produit libre tel que $PSL_2(Z) = Z/2 \star Z/3$ l'est donc aussi. Si $G = R$, tout homomorphisme continu $\sigma : R \rightarrow Cal(H)_0$ peut s'écrire $\sigma(t) = \exp(it a)$, où a est un élément auto-adjoint de $Cal(H)$. Si A est un élément auto-adjoint de $L(H)$ qui se projette sur a , l'homomorphisme S défini par $S(t) = \exp(it A)$ est un relèvement de σ . Par conséquent R est relevable.

A tout homomorphisme continu $\sigma : R^2 \rightarrow Cal(H)_0$ on peut associer

$$x = a' + ia'' \in Cal(H),$$

où a' et a'' sont les deux éléments auto-adjoints définis par

$$\sigma(t', t'') = \exp(it' a') \exp(it'' a'').$$

Puisque a' et a'' commutent l'élément x est normal. L'homomorphisme σ se relève si et seulement s'il existe X normal dans $L(H)$ tel que $\pi(X) = x$. Soit alors $\theta(\sigma)$ la fonction localement constante, définie sur le complémentaire du spectre de x dans \mathbb{C} et à valeurs dans \mathbb{Z} , donnée en un point z du domaine par l'indice de Fredholm de $x - z$. D'après Brown, Douglas et Fillmore (¹), σ se relève si et seulement si $\theta(\sigma)$ est la fonction nulle.

3. CAS DES GROUPES COMPACTS. — Soit G un groupe compact et soit $T : G \rightarrow U(H)$ une application continue telle que $\pi T = \sigma$. Nous allons esquisser la preuve que σ est relevable.

Soit $L_H^2(G)$ l'espace de Hilbert des classes d'applications de « carré » intégrable de G dans H (pour la mesure de Haar normalisée sur G). Le groupe G y opère de manière non continue en général par la représentation régulière gauche $g \mapsto L_g$ définie par $(L_g \varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$ si $(g, h) \in G \times G$ et $\varphi \in L_H^2(G)$. Définissons des applications linéaires continues $i_T : H \rightarrow L_H^2(G)$ et $m_T : L_H^2(G) \rightarrow H$ par les formules

$$i_T(v)(g) = T(g^{-1})v \quad \text{et} \quad m_T(\varphi) = \int_G T(g^{-1})^{-1} \varphi(g) dg.$$

L'opérateur $P_T = i_T m_T$ est un projecteur auto-adjoint de $L_H^2(G)$ sur l'image H_p de i_T car $m_T i_T = \text{Id}_H$. De plus P_T est équivariant modulo les compacts pour l'action de G définie ci-dessus. L'opérateur auto-adjoint équivariant

$$J_T = \int_G L_g (1 - 2P_T) L_g^{-1} dg$$

est alors une perturbation compacte de $1 - 2P_T$. Son indice de Fredholm étant nul, il existe un opérateur auto-adjoint équivariant inversible J'_T qui est encore une perturbation compacte de $1 - 2P_T$ tel que $(J'_T)^2 - 1$ soit compact. Le calcul fonctionnel permet alors de construire un opérateur auto-adjoint équivariant J''_T tel que $(J''_T)^2 = 1$ et tel que $J''_T - (1 - 2P_T)$ soit encore compact. Par suite, $Q_T = (1 - J''_T)/2$ est un projecteur orthogonal de $L_H^2(G)$ sur un espace H_Q invariant par l'action de G tel que $P_T - Q_T$ soit compact.

L'opérateur $1 - P_T - Q_T + 2Q_T P_T$ induit $A_T : H_p \rightarrow H_Q$ et l'opérateur $1 - Q_T - P_T + 2P_T Q_T$ induit $B_T : H_Q \rightarrow H_p$. Soit Φ une isométrie quelconque de H_p sur H_Q , soit j_T l'inverse de l'isomorphisme $H \rightarrow H_p$ et soit $L^\Phi : G \rightarrow U(H)$ l'homomorphisme défini par $L^\Phi(g) = j_T \Phi^{-1} L_g \Phi i_T$. Si $\tilde{T} : G \rightarrow U(H)$ est l'application continue définie par

$$\tilde{T}(g) = j_T B_T L_g A_T i_T = (j_T B_T \Phi i_T) L^\Phi(g) (j_T \Phi^{-1} A_T i_T),$$

on vérifie que $\tilde{T}(g) - T(g)$ est compact pour tout $g \in G$ (ceci résulte de la compacité de $Q_T - P_T$). Si $x = \pi(j_T \Phi^{-1} A_T i_T)$, $\pi(T(g)) = \sigma(g)$ s'écrit donc $x^{-1} \pi(L^\Phi(g)) x$ pour tout $g \in G$. En d'autres termes, il existe un conjugué de σ qui se relève en l'homomorphisme L^Φ .

La dernière étape consiste à montrer qu'un homomorphisme se relève si et seulement si un de ses conjugués se relève. La structure des homomorphismes continus d'un groupe compact dans $U(H)$ étant particulièrement simple, il s'agit d'une manipulation de routine que nous n'explicitons pas ici.

4. PARAMÉTRISATION DES RELÈVEMENTS RÉSULTATS RELATIFS — Si G est un groupe compact et si S', S'' sont deux relèvements d'un même homomorphisme $\sigma : G \rightarrow \text{Cal}(H)_0^u$, l'opérateur de Fredholm $E = m_{S''} \cdot i_{S'} = \int_G S''(g) S'(g^{-1}) dg$ est un opérateur d'indice 0.

Par suite $\text{Ker}(E) - \text{Im}(E)^\perp = \text{Ind}(S', S'')$ est un élément de $\tilde{R}(G)$ où $\tilde{R}(G)$ désigne l'idéal d'augmentation de l'anneau des représentations de G . On démontre alors le résultat suivant qui mesure le « degré d'unicité » des relèvements de σ : les représentations S' et S'' sont conjuguées par un opérateur de la forme $(1 + \text{compact})$ si et seulement si $\text{Ind}(S', S'') = 0$ [comparer avec la remarque 4.9 de (1)].

Soit F un sous-groupe fermé d'un groupe compact G et soit

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{S} & U(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\tau} & \text{Cal}(H)_0^u \end{array}$$

un carré cartésien d'homomorphismes continus; on suppose qu'il existe une application continue relevant τ ; on demande s'il existe un homomorphisme continu $T : G \rightarrow U(H)$ qu'on puisse introduire dans le carré ci-dessus pour obtenir un diagramme commutatif. Lorsque R décrit l'ensemble de tous les relèvements de τ , les indices $\text{Ind}(R/T, S)$ définissent un élément noté $\text{Ind}(\tau, S)$ du conoyau de l'homomorphisme de restriction $R(G) \rightarrow R(F)$ induit par $F \rightarrow G$. Le problème précédent admet alors une solution si et seulement si $\text{Ind}(\tau, S) = 0$. Par exemple, si G est abélien, l'homomorphisme $R(G) \rightarrow R(F)$ est surjectif et il existe toujours un tel T .

De même, si $G = G' \star_A G''$ est un produit amalgamé (avec G' et G'' finis), on associe à tout homomorphisme continu $\sigma : G \rightarrow \text{Cal}(H)_0^u$ un « indice dans Coker $(R(G') \oplus R(G'') \rightarrow R(G))$. L'homomorphisme σ se relève si et seulement si cet indice est nul. Par exemple, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est relevable puisqu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/4 \star_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/6$.

Enfin considérons les groupes de la forme $G \times \mathbb{Z}$ avec G compact. Soit τ un homomorphisme continu de $G \times \mathbb{Z}$ dans $\text{Cal}(H)_0^u$. Soient S un relèvement quelconque de la restriction de τ à G et E un opérateur S -équivariant sur H tel que $\pi(E)$ soit l'image par τ d'un générateur de \mathbb{Z} . Alors $\text{Ker}(E) - \text{Im}(E)^\perp$ est un élément de $R(G)$ qui ne dépend que de τ . On peut alors montrer que τ se relève si et seulement si cet élément est nul.

5. REMARQUES. — 1° L'essentiel de ce qui précède se transcrit au problème analogue de relever un homomorphisme de G dans la composante neutre $\text{Cal}(H)_0^{\text{inv}}$ du groupe des éléments inversibles de $\text{Cal}(H)$ en un homomorphisme de G dans $GL(H)$ [si G est compact, tout homomorphisme continu de G dans $\text{Cal}(H)_0^{\text{inv}}$ est conjugué d'un homomorphisme dans $\text{Cal}(H)_0^u$].

2° On peut aussi remplacer H par un espace de Hilbert *réel* dans l'essentiel de nos considérations (à l'exception des exemples).

3° Certaines de nos méthodes permettent aussi d'étudier les perturbations d'homomorphismes continus de G dans $U(H)$ par des opérateurs petits en norme [i. e. le problème de cette Note avec « $T(gh) - T(g)T(h)$ compact » remplacé par « $\|T(gh) - T(g)T(h)\|$ petit »]. Nous réservons les détails à une rédaction plus détaillée.

(*) Séance du 11 août 1975.

(¹) L. G. BROWN, R. G. DOUGLAS et P. A. FILLMORE, *Unitary Equivalence Modulo the Compact Operators and Extensions of C*-Algebras*, dans *Lecture Notes in Math.*, n° 345, Springer, 1973.

(²) C. L. OLSEN, *Amer. J. Math.*, 93, 1971, p. 686-698.

(³) R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton University Press, 1965.

P. H. :

*Institut de Mathématiques,
Université de Lausanne,
Dorigny,
1015 Lausanne,
Suisse;*

M. K. :

*Université Paris VII,
U. E. R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.*