

ALGÈBRE. — K-théorie algébrique. Localisation de formes quadratiques.

Note (*) de M. Max Karoubi, transmise par M. Henri Cartan.

Cette Note est la suite de la Note (1) dont nous conservons les notations et la terminologie.

1. LES GROUPEs ${}_eL(A, S)$ ET ${}_eW(A, S)$. Soit ${}_eQ(\mathcal{T}_S)$ la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{T}_S munis de formes ε -quadratiques non dégénérées. Le groupe ${}_eL(A, S)$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de ces objets par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$[M \oplus N] = [M] + [N],$$
$$[M] = [L^\perp/L] + [H(L)],$$

si L est un sous-module isotrope de M , $H(L)$ désignant le module « hyperbolique » $L \oplus \hat{L}$.

Un module quadratique M est dit *résoluble* s'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où E est projectif de type fini, $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^t \alpha_0$, la forme quadratique sur M étant induite par α et α_0 [cf. exemple 3, § 1 de (1)]. Si M est résoluble et si L est un sous-module isotrope de M , on peut montrer que L^\perp/L est aussi résoluble, ce qui permet de considérer un groupe ${}_e\bar{L}(A, S)$ construit comme le groupe ${}_eL(A, S)$ à partir de modules résolubles. Il est permis de conjecturer que l'homomorphisme évident ${}_e\bar{L}(A, S) \rightarrow {}_eL(A, S)$ est injectif. C'est effectivement le cas si 2 est inversible dans A ou si A est un anneau de Dedekind.

Le foncteur hyperbolique induit des homomorphismes de $K(A, S)$ dans ${}_e\bar{L}(A, S)$ et ${}_eL(A, S)$. Les conoyaux respectifs seront notés ${}_e\bar{W}(A, S)$ et ${}_eW(A, S)$.

Exemple 1. — Soit $A = \mathbb{Z}$, $S = (2^n)$, $\Lambda = 0$ et $\varepsilon = 1$. On a alors

$${}_eW(A, S) \approx {}_e\bar{W}(A, S) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8.$$

Exemple 2. — Soit A un anneau de Dedekind tel que $1/2 \in A$, muni de l'involution triviale. Si on choisit $S = A - \{0\}$, $\Lambda = 0$ et $\varepsilon = 1$, on a alors ${}_eW(A, S) \approx \bigoplus_p W(A/p)$, p parcourant l'ensemble des idéaux maximaux de A .

Exemple 3. — Soit B un anneau noethérien régulier tel que $1/2 \in B$. Si $A = B[x]$, et $S = (x^n)$, on a ${}_eW(A, S) \approx {}_e\bar{W}(A, S) \approx {}_eW(B)$.

2. QUELQUES SUITES EXACTES.

THÉORÈME 1. — On a une suite exacte

$${}_eV(A) \rightarrow {}_eV(A_S) \rightarrow {}_e\bar{L}(A, S).$$

Si 2 est inversible dans A ou si A est un anneau de Dedekind, on peut écrire la même suite exacte en remplaçant le groupe ${}_e\bar{L}(A, S)$ par le groupe ${}_eL(A, S)$.

Rappelons que le groupe ${}_eV(B)$ est le groupe de Grothendieck du foncteur « oubli » ${}_eQ(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ avec les notations de ⁽⁴⁾. Wall l'interprète aussi comme le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules quadratiques munis de base (les morphismes étant de « déterminant » 1) ⁽⁶⁾.

CONJECTURE 2. — *On a une suite exacte*

$${}_eV(A) \rightarrow {}_eV(A_S) \rightarrow {}_eL(A, S) \rightarrow {}_{-e}U(A) \rightarrow {}_{-e}U(A_S).$$

Dans l'énoncé de cette conjecture, on remarquera que ${}_{-e}U(B) \approx {}_eV^1(B)$ pour tout anneau avec involution B d'après le théorème de « périodicité » de [⁽³⁾, ⁽⁵⁾].

THÉORÈME 3. — *Supposons que l'homomorphisme $K(A) \rightarrow K(A_S)$ soit surjectif. On a alors la suite exacte*

$${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S) \rightarrow \overline{{}_eW(A, S)} \rightarrow 0,$$

donc la suite exacte

$${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S) \rightarrow {}_eW(A, S)$$

si 2 est inversible dans A ou si A est un anneau de Dedekind.

THÉORÈME 4. — *Soit A un anneau de Dedekind et soit $S \subset A - \{0\}$. On a alors la suite exacte*

$${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S) \rightarrow {}_eW(A, S) \rightarrow {}_eW^1(A) \rightarrow {}_eW^1(A_S) \rightarrow 0,$$

l'homomorphisme ${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S)$ étant en outre injectif s'il en est de même pour l'homomorphisme $A/\Lambda \rightarrow A_S/\Lambda_S$.

Pour tout anneau avec involution B, le groupe ${}_eW^1(B)$ peut se calculer à l'aide de la « suite exacte des 12 » décrite dans [⁽²⁾, ⁽³⁾] dans un contexte légèrement différent. On trouve ainsi une suite exacte

$${}_eW(B) \rightarrow k(B) \rightarrow {}_{-e}W_1(B) \rightarrow {}_eW^1(B) \rightarrow k'(B) \rightarrow {}_{-e}W'(B),$$

ce qui permet de déterminer ${}_eW^1(B)$ à partir de ${}_{-e}W_1(B)$ et de $k'(B)$.

Exemple. — Si B est euclidien, on a ${}_{-1}W_1(B) = k'(B) = 0$. Donc ${}_1W^1(B) = 0$.

Nous développerons des applications de ce fait dans une publication ultérieure.

(*) Séance du 19 novembre 1973.

⁽¹⁾ M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 215.

⁽²⁾ M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 67.

⁽³⁾ M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne*, Springer Lecture Note n° 343, p. 301.

⁽⁴⁾ M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique II* (à paraître dans *Math. Scand.*, 1973).

⁽⁵⁾ R. SHARPE, *On the structure of the unitary Steinberg group* (à paraître).

⁽⁶⁾ C. T. C. WALL, *Foundations of algebraic L-theory*, Springer Lecture Note, n° 343, p. 266.

ALGÈBRE. — *K-théorie algébrique. Localisation de formes quadratiques.*

Note (*) de M. Max Karoubi, transmise par M. Henri Cartan.

Cette Note a pour objet de développer quelques applications (certaines classiques) des théorèmes énoncés dans deux Notes antérieures [(7), (8)] dont nous conservons les notations et la terminologie.

1. ANNEAUX DE DEDEKIND. — Pour commencer supposons que $\Lambda = 0$, $\varepsilon = 1$ et que l'involution sur A soit triviale (cas le plus fréquent dans la pratique). On écrira alors simplement $W(A)$, $W(A, S)$, etc. au lieu de ${}_e W(A)$, ${}_e W(A, S)$, ... Si A est un anneau euclidien quelconque, on déduit du théorème 4 de (8) la suite exacte

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(A_S) \rightarrow W(A, S) \rightarrow 0$$

démontrée dans un contexte différent par Milnor (9) et Scharlau (11) si 2 est inversible dans A .

Exemple 1. — Soit $Z' = Z[1/2]$. On a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow W(Z) \rightarrow W(Z') \rightarrow W(Z, S) \rightarrow 0,$$

où $S = (2^n)$ et où $W(Z, S) \approx Z/2 \otimes Z/8$. Puisque $W(Z') \approx Z \oplus Z/2$, on en déduit $W(Z) = Z$ ainsi que le fait classique que Z^n ne peut être muni d'une forme quadratique définie positive que si n est multiple de 8.

Exemple 2. — Soit $A = Z'$, $S = Z' - \{0\}$. On a alors la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow W(Z') \rightarrow W(Q) \rightarrow W(Z', S) \rightarrow 0,$$

où $W(Z', S) \approx \bigoplus W(Z/pZ)$, p parcourant l'ensemble des nombres premiers impairs. Cette suite permet de déterminer entièrement $W(Q)$. En remplaçant Z' par Z , on peut en déduire que la signature d'une forme quadratique sur Q est déterminée mod. 8 par son image dans le groupe $W(Z, S)$ où $S = Z - \{0\}$ [cf. Durfee (4)].

Exemple 3. — Soient F un corps quelconque de caractéristique récente de 2, $A = F[t]$, $S = A - \{0\}$. Alors $A_S = F(t)$ et on a la suite exacte

$$0 \rightarrow W(F[t]) \rightarrow W(F(t)) \rightarrow \bigoplus_p W(F[t], S_p) \rightarrow 0,$$

où $S_p = (p^n)$, p parcourant l'ensemble des polynômes irréductibles normalisés. Puisque la caractéristique de F est $\neq 2$ on a

$$W(F[t]) \approx W(F) \quad (6) \quad \text{et} \quad W(F[t], S_p) \approx W(F[t]/(p)).$$

Si la caractéristique de F est égale à 2 et si F est parfait, on peut démontrer que

$$W(F[t]) \approx Z/2 \oplus F \oplus F \oplus \dots$$

et

$$W(F[t], S_p) \approx Z/2 \oplus F[t]/(p) \oplus F[t]/(p) \oplus \dots$$

- (¹) Une suite exacte analogue a été démontrée par Ranicki (¹⁰).
- (²) A. BAK (non publié),
- (³) H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1967.
- (⁴) A. H. DURFEE, *Diffeomorphism classification of isolated hypersurface singularities* (Thèses, Cornell University).
- (⁵) D. HUSEMOLLER et J. MILNOR, *Symmetric bilinear forms*, Springer, 1973.
- (⁶) M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne*, Springer Lecture Notes, n° 343, p. 301.
- (⁷) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 215.
- (⁸) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 311.
- (⁹) J. MILNOR, *Invent. Math.*, 9, 1970, p. 318-344.
- (¹⁰) A. A. RANICKI, *Algebraic L-theory IV. Polynomial extension rings* (à paraître).
- (¹¹) W. SCHARLAU, *Remarks on symmetric bilinear forms over Euclidean rings* (à paraître).
- (¹²) R. G. SWAN, *Algebraic K-theory*, Springer, Lecture Note n° 76.

Université de Paris VII,
U. E. R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75230 Paris-Cedex 05.