W

14e

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 1030-1033 (29 novembre 1971) Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la K-théorie hermitienne. Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal.* Note (*) de

M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

Nous nous proposons de transposer dans la théorie de Quillen certains des résultats énoncés dans les Notes précédentes [(5), (6), (7)]. Comme application nous étudions l'homologie du groupe orthogonal infini ${}_\varepsilon O(A)$ associé à un anneau discret A muni d'une antiinvolution. Si A est un corps, les théorèmes énoncés ici recoupent partiellement certains résultats récents de Borel et Matsumoto.

1. La théorie de Quillen pour les modules quadratiques. — Soit A un anneau unitaire discret muni d'une antiinvolution et tel que 2 soit inversible dans A. Soit $X = B_{{}_\varepsilon O(A)}$ l'espace classifiant du groupe discret ${}_\varepsilon O(A) = \varinjlim {}_\varepsilon O_{n,n}(A)$. Soit (X^+, f) un couple formé d'un CW-complexe X^+ et d'une application continue $f : X \to X^+$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

(*a*) $\pi_1(X^+) = {}_\varepsilon O(A)/{}_\varepsilon O'(A)$, avec ${}_\varepsilon O'(A) = [{}_\varepsilon O(A), {}_\varepsilon O(A)]$, l'application f induisant l'homomorphisme quotient sur les π_1 ;

(*b*) L'application f induit un isomorphisme $H_*(X; G) \approx H_*(X^+; G)$ pour tout $\pi_1(X^+)$-module G.

Un tel couple existe d'après le travail de Quillen (8) et est unique à homotopie près. On pose

$$X^+ = B^+_{{}_\varepsilon O(A)} \quad \text{et} \quad B^+_{{}_\varepsilon O(A \times A^0)} = B^+_{GL(A)} \quad [cf. (8)].$$

Les espaces $B^+_{{}_\varepsilon O(A)}$ et $B^+_{GL(A)}$ sont des espaces de lacets infinis [(3), (10)].

Définition et proposition 1. — *Posons* ${}_\varepsilon L_n(A) = \pi_n(B^+_{{}_\varepsilon O(A)})$ *pour* $n > 0$ *et* ${}_\varepsilon L_n(A) = {}_\varepsilon L^{-n}(A)$ *pour* $n \leqq 0$. *On a alors*

$${}_\varepsilon L_1(A) \approx {}_\varepsilon O(A)/{}_\varepsilon O'(A), \qquad {}_\varepsilon L_2(A) \approx H_2({}_\varepsilon O'(A); \mathbf{Z})$$

ainsi qu'un isomorphisme naturel ${}_\varepsilon L_n(A) \approx {}_\varepsilon L_{n+1}(SA)$ *pour* $n \in \mathbf{Z}$, SA *représentant la suspension de l'anneau hermitien* A [(3), (4), (10)].

Soit $\mathcal{V}_A$ (resp. $\mathcal{U}_A$) la fibre au sens homotopique de l'application $B^+_{{}_\varepsilon O(A)} \to B^+_{GL(A)}$ (resp. $B^+_{GL(A)} \to B^+_{{}_\varepsilon O(A)}$) induite par l'homomorphisme ${}_\varepsilon O(A) \to GL(A)$ [resp. $GL(A) \to {}_\varepsilon O(A)$] associé au foncteur oubli (resp. au foncteur hyperbolique). Pour $n > 0$, ${}_\varepsilon V_n(A)$ [resp. ${}_\varepsilon U_n(A)$] est le groupe d'homotopie $\pi_n(\mathcal{V}_A)$ [resp. $\pi_n(\mathcal{U}_A)$]. On a alors ${}_\varepsilon V_n(A) \approx {}_\varepsilon V_{n+1}(SA)$ et ${}_\varepsilon U_n(A) \approx {}_\varepsilon U_{n+1}(SA)$, ce qui permet de définir ${}_\varepsilon V_n(A)$ [resp. ${}_\varepsilon U_n(A)$] pour $n \leqq 0$ grâce à la formule de récurrence ${}_\varepsilon V_n(A) = {}_\varepsilon V_{n+1}(SA)$ [resp. ${}_\varepsilon U_n(A) = {}_\varepsilon U_{n+1}(SA)$]. Avec ces définitions, on a, pour n positif ou négatif, les suites exactes

$$K_{n+1}(A) \to {}_\varepsilon L_{n+1}(A) \to {}_\varepsilon U_n(A) \to K_n(A) \to {}_\varepsilon L_n(A),$$
$${}_\varepsilon L_{n+1}(A) \to K_{n+1}(A) \to {}_\varepsilon V_n(A) \to {}_\varepsilon L_n(A) \to K_n(A).$$

Le théorème 1 de la Note précédente [7] nous conduit naturellement à la conjecture suivante : *les théories* ${}_{\varepsilon}\mathrm{U}_n(\mathrm{A})$ *et* ${}_{-\varepsilon}\mathrm{V}_{n-1}(\mathrm{A})$ *coïncident.* Il résulte des résultats de la Note précédente que cette conjecture est déjà vraie pour $n < 0$ et A K-régulier.

2. Périodicité du groupe de Witt. — Considérons le $n^{\text{ième}}$ « groupe de Witt » ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A}) = \mathrm{Coker}\,[\mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}_n(\mathrm{A})]$. Le théorème suivant est analogue au théorème 3 de [7] :

Théorème 2. — *Les groupes* ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *et* ${}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_{n+2}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *sont isomorphes pour* $n \in \mathbf{Z}$ (*avec* $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}\,[1/2]$). *De manière plus précise, il existe des homomorphismes naturels*

$$\beta : {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_{n+2}(\mathrm{A}) \qquad et \qquad \beta' : {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_{n+2}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A})$$

tels que $\beta\beta'$ *et* $\beta'\beta$ *soient la multiplication par* 4 [1].

Corollaire 3. — *Les groupes* ${}_{\varepsilon}\mathrm{U}_n(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *et* ${}_{-\varepsilon}\mathrm{V}_{n-1}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *sont naturellement isomorphes.*

Corollaire 4. — *Les groupes* ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *et* ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}^{-n}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$ *sont naturellement isomorphes* (sans hypothèse de K-régularité sur A).

Posons ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}) = {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_n(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'$. Le théorème 2 a aussi la conséquence intéressante suivante. Si

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{A}_1 & \longrightarrow & \mathrm{A}' \end{array}$$

est un carré cartésien d'anneaux hermitiens unitaires discrets, on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_{n+1}(\mathrm{A}') \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}_1) \oplus {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}_2) \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}') \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}_{n-1}(\mathrm{A})$$

pour $n \in \mathbf{Z}$. En outre, la projection naturelle $\mathrm{A}[x] \to \mathrm{A}$ induit un isomorphisme $\overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}) \approx \overline{\mathrm{W}}_n(\mathrm{A}[x])$.

Théorème 5. — *Soit* $\tilde{\mathrm{B}}^{+}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}$ *le* H-*espace obtenu à partir de* $\mathrm{B}^{+}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}$ *en localisant par rapport au système multiplicatif* (2^p). *Au type d'homotopie près, on peut alors écrire* $\tilde{\mathrm{B}}^{+}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}$ *comme le produit de deux* H-*espaces connexes* $\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}$ *et* ${}_{\varepsilon}\mathrm{B}_{\mathrm{A}}$ *tels que*

$$\pi_n(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \approx \pi_{n+4}(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \qquad pour \quad n > 0.$$

De manière explicite, on a

$$\pi_1(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_1(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}' \approx {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}^1(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}',$$
$$\pi_2(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \approx {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'.$$
$$\pi_3(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \approx {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_1(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}' \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}^1(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}',$$
$$\pi_4(\mathrm{B}^{++}_{{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Z}'.$$

Remarque sur les notations. — Si A est commutatif et muni de l'involution triviale, on a

$$ {}_{1}\mathrm{O}(\mathrm{A}) = \varinjlim \mathrm{O}_{n,n}(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad {}_{-1}\mathrm{O}(\mathrm{A}) = \varinjlim \mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{A}) $$

avec les notations classiques.

COROLLAIRE 6. — *L'homologie à coefficients rationnels du groupe orthogonal infini* ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})$, $\varepsilon = \pm 1$, *peut s'écrire comme le produit tensoriel gradué de trois algèbres de Hopf, soit*

$$ \mathrm{H}_{*}({}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})\,;\,\mathbf{Q}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \otimes {}_{\varepsilon}\Lambda_{\mathrm{A}} \otimes {}_{\varepsilon}\mathrm{M}_{\mathrm{A}}, $$

où :

(1) ${}_{\varepsilon}\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$ *est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel gradué*

$$ \Big(\bigoplus_{n>0} {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Q}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n>0} {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n+2}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Q}\Big)\,; $$

(2) ${}_{\varepsilon}\Lambda_{\mathrm{A}}$ *est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel gradué*

$$ \Big(\bigoplus_{n>0} {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n+1}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Q}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n>0} {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n+3}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Q}\Big); $$

(3) ${}_{\varepsilon}\mathrm{M}_{\mathrm{A}} = \mathrm{H}_{*}(\mathrm{B}_{\mathrm{A}}; \mathbf{Q})$ *donc est isomorphe à* $\mathbf{Q}$ *en degré zéro.*

Exemple. — Si A est un corps commutatif F, on a

$$ {}_{-1}\mathrm{W}_{4n}(\mathrm{F}) \otimes \mathbf{Q} = {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n+1}(\mathrm{F}) \otimes \mathbf{Q} = {}_{\varepsilon}\mathrm{W}_{4n+3}(\mathrm{F}) \otimes \mathbf{Q} = 0. $$

Le groupe ${}_{1}\mathrm{W}_{4n}(\mathrm{F}) \otimes \mathbf{Q}$ n'est pas nul en général : il est isomorphe au groupe de Witt W (F) tensorisé par $\mathbf{Q}$. Si F est un corps de nombres, le corollaire 6 est contenu dans un théorème récent de Borel ([2]) démontré par une toute autre méthode qui permet de déterminer en plus le facteur ${}_{\varepsilon}\mathrm{M}_{\mathrm{A}}$: c'est une algèbre extérieure qui possède r_2 générateurs en chaque degré de la forme $4n + 3$, $2r_2$ représentant le nombre de places complexes de F.

3. CALCUL PARTIEL DE $\mathrm{H}_2({}_{\varepsilon}\mathrm{O}'(\mathrm{A}); \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 7. — *Soit* A *un anneau hermitien unitaire discret tel que* $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \approx \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[x])$ *et que* $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \approx \mathrm{K}(\mathrm{A}[x])$. *On peut alors définir des homomorphismes naturels*

$$ \tau_{\mathrm{V}} : {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}_1(\mathrm{A}) \quad \textit{et} \quad \tau_{\mathrm{U}} : {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}_1(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) $$

tels que $\tau_{\mathrm{U}}\,\tau_{\mathrm{V}} = \mathrm{Id}$.

COROLLAIRE 8. — *Soit* ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{0}_{(2)}(\mathrm{A})$ *le deuxième terme de la filtration de* ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{0}(\mathrm{A})$ *décrite dans* ([7]) *et soit* ${}_{\varepsilon}k''_1(\mathrm{A})$ *le groupe d'homologie du complexe*

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{L}_1(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \xrightarrow{1-\sigma} \mathrm{K}_1(\mathrm{A}). $$

Si ${}_{-\varepsilon}\theta : {}_{\varepsilon}k''_1(\mathrm{A}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{A})$ *désigne l'homomorphisme injectif induit par* τ_{V}, Coker ${}_{\varepsilon}\theta$ *contient* ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{(2)}_{0}(\mathrm{A})$ *comme facteur direct.*

Dans le cas où A est un corps F, ${}_1k''_1$ (F) $=0$ et du corollaire 8 on déduit que ${}_1W_2$ (F) contient ${}_\varepsilon L_0^{(2)}$ (F) comme facteur direct. En fait, les deux groupes sont isomorphes d'après un théorème récent de Matsumoto ([9]).

(*) Séance du 27 octobre 1971.

([1]) Pour $n > 0$, la démonstration de ce théorème nécessite de manière essentielle un résultat récent de Gersten ([3]) [*voir* aussi ([10])].

([2]) A. Borel, à paraître.

([3]) S. Gersten, *On the spectrum of algebraic* K-*theory* (à paraître).

([4]) M. Karoubi, Séminaire Heidelberg-Saarbrucken-Strasbourg, 1967-1968, Exposé IV, Springer Lecture Notes, n° 136.

([5]) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 599.

([6]) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 802.

([7]) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 840.

([8]) D. Quillen, Conférence au Congrès international des Mathématiciens, Nice, 1970.

([9]) H. Matsumoto, à paraître.

([10]) J. B. Wagoner, *Delooping classifying spaces in algebraic* K-*theory* (à paraître).

Institut de Recherche mathématique,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg, Bas-Rhin.

184851. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France