

K-THEORIE ALGEBRIQUE ET K-THEORIE TOPLOGIQUE

Max Karoubi et Orlando Villamayor

1. DÉFINITIONS. — Soit A un anneau quelconque (non nécessairement unitaire) muni d'une « quasi-norme » (7). On dit que A est un anneau de Banach si A est complet et s'il existe une constante C telle que ||xy|| ≤ C ||x|| × ||y||. Un homomorphisme f: A → B entre deux anneaux de Banach A et B est borné si ||f(x)|| ≤ D ||x|| pour une certaine constante D.

Exemples :

(1) Les algèbres de Banach réelles, complexes ou p-adiques (8) sont évidemment des anneaux de Banach.

(2) Un anneau quelconque peut être considéré comme un anneau de Banach lorsqu'on le munit de la « quasi-norme discrète » (7).

(3) Si A est un anneau de Banach, considérons le sous-anneau A{x} de A[[x]] formé des séries formelles S = ∑_{i≥0} a_i x^i telles que ∑_{i≥0} ||a_i|| < +∞.

Alors A{x} est évidemment un anneau de Banach pour la quasi-norme ||S|| = ∑_{i≥0} ||a_i||. Plus généralement, le sous-anneau A{x_1, ..., x_n} de A[[x_1, ..., x_n]] formé des séries telles que la somme des quasi-normes des coefficients soit finie, est un anneau de Banach. On notera q_i, i = 0, 1, les applications de A{x} dans A définies par q_i(S) = S(i). Le noyau EA de q_0 est « l'anneau des chemins » de A. L'intersection ΩA des noyaux de q_0 et q_1 est « l'anneau des lacets » de A.

(4) Soit de nouveau A un anneau de Banach et M = (a_ji) une matrice infinie à coefficients dans A. On pose ||M|| = Sup ∑_j a_ji (norme L^1 des opérateurs). Les matrices M telles que ||M|| < +∞ forment un anneau de Banach B. Une matrice diagonale M est dite de type fini si elle ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A différents. Le « cône » CA de A est alors le plus petit anneau de Banach contenu dans B qui contient les matrices diagonales de type fini ainsi que les matrices de permutation (finies ou infinies). La limite inductive lim_{→} A(n) suivant les inclusions

M ↦ (M 0 / 0 0)

(2)

est un sous-anneau de CA (non fermé en général). Son adhérence \tilde{A} est « l'anneau stabilisé » de A . C'est un idéal dans CA ; l'anneau de Banach quotient CA/\tilde{A} est la « suspension » SA de A .

Tout anneau de Banach A est une algèbre sur \mathbf{Z} muni de la valeur absolue usuelle. Notons A^+ le groupe $A \oplus \mathbf{Z}$ muni de la multiplication $(a, \lambda) \cdot (a', \lambda') = (aa' + \lambda a' + \lambda' a, \lambda \lambda')$. L'augmentation $\varepsilon: A^+ \rightarrow \mathbf{Z}$ induit un homomorphisme de groupes $\varepsilon_n: GL(A^+, n) \rightarrow GL(\mathbf{Z}, n)$. On posera $GL(A, n) = \text{Ker} \varepsilon_n$ et $GL(A) = \varinjlim GL(A, n)$. Si A est un anneau unitaire, on retrouve (à isomorphisme près) les définitions classiques.

Un homomorphisme borné $f: A \rightarrow B$ induit de manière évidente un homomorphisme borné de $A\{x_1, \dots, x_n\}$ dans $B\{x_1, \dots, x_n\}$ que nous noterons f_n . On dit que $f_n(\alpha) = \beta$ est une « fibration » si, pour tout élément $\beta = \beta(x_1, \dots, x_n)$ de $GL(B\{x_1, \dots, x_n\})$ avec $\beta(o, \dots, o) = 1$, il existe un élément α de $GL(A\{x_1, \dots, x_n\})$ tel que $f_n(\alpha) = \beta$. On dit que f est une « cofibration » si f est surjectif et si la norme de B est équivalente à la norme induite par f .

Remarques et exemples. — Toute fibration est un homomorphisme surjectif. Si A et B sont des algèbres de Banach réelles ou complexes, les notions de fibration et de cofibration coïncident et équivalent au fait que f est surjectif (théorème de Banach). Si B est un anneau noethérien régulier discret, un théorème de Bass, Heller et Swan (*) implique que tout homomorphisme surjectif $A \rightarrow B$ est une fibration. L'homomorphisme $EA \rightarrow A$ induit par q_1 est une fibration. Si $A \rightarrow B$ est une fibration, il en est de même de $A\{x\} \rightarrow B\{x\}$, $EA \rightarrow EB$, $\Omega A \rightarrow \Omega B$, etc. De manière duale, les homomorphismes $CA \rightarrow SA$, $CA \rightarrow CB$, $SA \rightarrow SB$, etc. sont des cofibrations si $A \rightarrow B$ l'est.

Soit

$$(E) \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow A \xrightarrow{f} A'' \rightarrow 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach et d'homomorphismes bornés. Par abus de langage, on dit que (E) est une fibration (resp. une cofibration) si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A et si f est une fibration (resp. une cofibration).

2. DÉFINITION AXIOMATIQUE DES FONCTEURS K^n . — Soit A un anneau unitaire quelconque. Le groupe $K(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathfrak{X}(A)$ des A -modules à droite qui sont projectifs de type fini [cf. (*), p. 445 ou (*), p. 189]. Le groupe $K(A)$ est un foncteur covariant de l'anneau A . Si A n'est pas nécessairement unitaire, on étend cette définition en posant $K(A) = \text{Ker}(K(A^+) \xrightarrow{K(\varepsilon)} K(\mathbf{Z}))$.

Soit \mathcal{B} la « catégorie » des anneaux de Banach, les morphismes étant les homomorphismes bornés. Une théorie de la cohomologie positive (resp. négative) sur \mathcal{B} est la donnée de foncteurs K^n , $n \geq 0$ (resp. $n \leq 0$) de \mathcal{B}

(3)

dans la catégorie des groupes abéliens ainsi que d'opérateurs de connexion naturels

$$\partial^{n-1} : K^{n-1}(A') \rightarrow K^n(A'), \quad n > 0 \text{ (resp. } n \leq 0,$$

définis pour toute cofibration (E) [resp. pour toute fibration (E)]. On suppose en outre que la suite

$$K^{n-1}(A') \rightarrow K^{n-1}(A) \rightarrow K^{n-1}(A') \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(A') \rightarrow K^n(A) \rightarrow K^n(A')$$

est exacte pour les valeurs de n où elle est définie.

THÉORÈME 1. — *Il existe une théorie de la cohomologie positive et une seule à isomorphisme près sur \mathcal{B} qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) *L'inclusion naturelle $A \rightarrow \tilde{A}$ induit un isomorphisme $K^n(A) \approx K^n(\tilde{A})$ (axiome de stabilisation).*

(2) *$K^n(A) = 0$ si A est un anneau unitaire tel que la catégorie $\mathcal{A}(A)$ soit flasque au sens de (1).*

(3) *$K^0(A) = K(A)$.*

En outre, les foncteurs $K^n(A)$ coïncident avec les foncteurs $K^n(\mathcal{A}(A))$ définis dans (1).

L'énoncé du théorème 2 nécessite la définition suivante : un anneau de Banach A est dit *contractile* s'il existe un homomorphisme borné $h : A \rightarrow A \{x\}$ tel que $q_0 \cdot h = 0$ et $q_1 \cdot h = \text{Id}$.

THÉORÈME 2. — *Il existe une théorie de la cohomologie négative et une seule à isomorphisme près sur \mathcal{B} qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) *$K^n(A) = 0$ pour $n < 0$ si A est contractile.*

(2) *$K^0(A) = K(A)$.*

THÉORÈME 3. — *Si A est une algèbre de Banach réelle ou complexe, les groupes $K^n(A)$ définis précédemment pour n positif ou négatif coïncident avec les groupes $K^n(\mathcal{A}(A))$ introduits dans (2). En particulier, ils sont périodiques de période 8 si A est réelle, et 2 si A est complexe.*

THÉORÈME 4. — *Si A est un anneau discret, les groupes $K^n(A)$, $n \geq 0$, coïncident avec les groupes $K_{-n}(A)$ définis par Bass (3). En particulier, $K^n(A) = 0$ pour $n > 0$ si A est un anneau noethérien régulier.*

THÉORÈME 5. — *Soit A un anneau discret et soit $K_n(A)$ le foncteur introduit dans (2). On a alors*

$$K_n(A) = K^{-n}(A) \oplus \binom{n-1}{1} K^{-n+1}(A) \oplus \binom{n-2}{2} K^{-n+2}(A) \oplus \dots \oplus K^{-1}(A).$$

En suivant (4), on peut donner l'interprétation suivante du groupe $K^{-1}(A)$. Notons $GL^0(A)$ le sous-groupe de $GL(A)$ formé des éléments α « homotopes à l'identité » : ceci signifie qu'il existe $\gamma(x) \in GL(A \{x\})$ tel que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = \alpha$. Alors $GL^0(A) \supset [GL(A), GL(A)]$ d'après le lemme

(4)

de Whitehead [(²), (³)] et $K^{-1}(A) \approx GL(A)/GL^0(A)$. Si A est un anneau discret, $GL^0(A)$ est le sous-groupe de $GL(A)$ engendré par les matrices unipotentes. Si A est un anneau noethérien régulier, $K^{-1}(A)$ s'identifie ainsi au groupe « $K_1(A)$ » de Bass (³). Notons ici une différence de points de vue entre le travail de Bass, Milnor (³), Swan (¹⁰) et le nôtre : ces trois auteurs ont proposé d'autres définitions (non axiomatiques) de $K^n(A)$ pour $n < 0$. En fait, ces définitions ne dépendent que du groupe $GL(A)$ tandis que la nôtre fait intervenir de manière plus intime la structure d'anneau de A (et même sa norme dans le cas non discret). Le théorème 2 implique bien entendu des suites exactes de Mayer-Vietoris pour les foncteurs K^n [cf. (³)] ce qui, semble-t-il, n'a pas d'analogue avec les autres définitions proposées.

(*) Séance du 8 septembre 1969.

(¹) Le premier auteur a bénéficié de l'aide partielle de la « National Science Foundation » (Grant GP 7952 X).

(²) Les exemples du type 4 ne sont que des transpositions dans le langage des anneaux de Banach des définitions plus abstraites proposées dans (¹). La même remarque s'applique au théorème 1 de cette Note.

(³) H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.

(⁴) H. BASS, A. HELLER et R. G. SWAN, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 22, 1964, p. 61-80.

(⁵) L. GRUSON, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1, 1968, p. 45-89.

(⁶) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1, 1968, p. 161-270.

(⁷) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 328 et 345.

(⁸) J. MILNOR, *Notes on algebraic K-theory* (non publié).

(⁹) A. NOBILE et O. E. VILLAMAYOR, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1968, p. 581-616.

(¹⁰) R. G. SWAN, *Non-abelian homological algebra and K-theory* (non publié).

(Institut de Mathématiques,
rue René-Descartes, 67-Strasbourg, Bas-Rhin
et Facultad de Ciencias exactas y naturales de Buenos-Aires.)