

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Matrices de Jacobi, Périodicité de Bott et C*-algèbres.* Note (*) de M. **MAX KAROUBI** (1), transmise par M. Henri Cartan.

Cette Note complète deux Notes antérieures [(7), (8)], dont elle conserve la terminologie. On y définit un isomorphisme explicite de $K^n(X; \mathcal{E})$ sur $K^{n-1}(X; \check{\mathcal{E}})$ pour X compact. Ceci fournit une nouvelle démonstration des résultats de (7) et (8) et, *simultanément*, des théorèmes de périodicité de Bott (dans le cas classique). A l'aide de (8), les résultats énoncés ici peuvent se généraliser sans peine aux C^* -algèbres quelconques. Les espaces d'endomorphismes considérés seront toujours supposés munis de la topologie de la norme.

1. MATRICES DE JACOBI. — Soit $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ une suite infinie d'espaces de Hilbert de dimension finie ou infinie et soit

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n \oplus \dots$$

Un endomorphisme de H est dit « *de Jacobi* » (12) s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H en somme hilbertienne, par une matrice infinie (a_{ji}) , $a_{ji} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(H_i, H_j)$, du type suivant : les seuls éléments éventuellement non nuls sont $a_i = a_{ii}$, $b_i = a_{i, i+1}$, $c_i = a_{i+1, i}$. On désignera une telle matrice par la notation abrégée $M(a_i, b_i, c_i)$ en sous-entendant la décomposition. La « *matrice de Jacobi* » $M = M(a_i, b_i, c_i)$ est dite *quasi involutive* si $(a_i)^2 + c_{i-1}b_{i-1} + b_i c_i = 1$ pour $i > 1$, $a_i b_i + b_i a_{i+1} = 0$, $c_i a_i + a_{i+1} c_i = 0$, $b_i b_{i+1} = 0$ et $c_{i+1} c_i = 0$. Ces relations équivalent au fait que M^2 est encore une matrice de Jacobi $M(a'_i, b'_i, c'_i)$, avec $b'_i = 0$, $c'_i = 0$ et $a'_i = 1$, sauf peut-être pour $i = 1$. En particulier, si a_1, b_1 et c_1 sont complètement continus, ceci implique que l'endomorphisme M est inversible modulo les opérateurs complètement continus.

2. L'ISOMORPHISME $S : K^{p,q}(X; \mathcal{E}) \rightarrow K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{E}})$. — On désigne ici par \mathcal{E} ou $\mathcal{L}(k)$, $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , la catégorie des k -espaces vectoriels de dimension finie, ceux-ci étant supposés munis d'une forme sesquilinéaire non dégénérée. Si X est un espace paracompact, un triple (E, ε, γ) , définissant un élément de $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$, est dit *unitaire* si l'action de $C^{p,q}$ sur E est compatible avec la métrique et si les deux graduations ε et γ sont unitaires. En raison d'arguments classiques, on ne change pas le groupe $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$ en se restreignant aux triples unitaires. D'autre part, on peut évidemment regarder le couple $E' = (E, -\varepsilon)$ comme un $C^{p,q+1}$ -module. On désignera par \bar{E}' le $C^{p,q+1}$ -module obtenu à partir de E' en faisant opérer $C^{p,q+1}$ via son involution canonique. Soient λ_n (resp. μ_n) les coefficients de Fourier de la fonction

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} (\cos \theta + |\cos \theta|) \quad \left[\text{resp. } g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} (\cos \theta - |\cos \theta|) \right].$$

