

## ESPACES CLASSIFIANTS EN K-THEORIE

Max Karoubi

Cette Note fait suite à une Note précédente <sup>(1)</sup>. A l'aide de fibrés convenables, on construit un foncteur cohomologique représentable de la catégorie des espaces paracompacts dans celle des groupes abéliens. Lorsque X est compact, on retrouve la K-théorie usuelle.

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE K-THEORIE. — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie prébanachique dans le sens de <sup>(10)</sup> et soit X un espace paracompact. La définition des groupes  $K^{p,q}(X; \mathcal{C})$  pour X compact [cf. <sup>(7)</sup>, <sup>(10)</sup>] s'étend comme suit au cadre paracompact: Soit d'abord E un objet de  $\mathcal{C}$  muni d'une structure de module sur l'algèbre de Clifford  $C^{p,q}$ . On appellera « graduation » de E (relativement à X), la donnée d'une application continue  $\varepsilon : X \rightarrow \text{End}^-(E)$  telle que  $(\varepsilon(x))^2 = 1, \forall x \in X$ . Ici  $\text{End}^-(E)$  désigne l'espace de Banach des endomorphismes de E qui anticommulent aux générateurs de  $C^{p,q}$ . Considérons ensuite l'ensemble des triples  $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , où E est un  $C^{p,q}$ -module et où  $\varepsilon_i, i=1, 2$ , sont deux graduations de E. Deux triples  $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  et  $(F, \gamma_1, \gamma_2)$  sont équivalents s'il existe un triple  $(G, \zeta, \zeta')$  tel que  $\varepsilon_1 \oplus \gamma_2 \oplus \zeta$  et  $\varepsilon_2 \oplus \gamma_1 \oplus \zeta'$  soient homotopes parmi les graduations de  $E \oplus F \oplus G$ . L'ensemble des classes d'équivalence, muni de la loi de composition induite par la somme évidente des triples, est un groupe abélien qu'on notera  $K^{p,q}(X; \mathcal{C})$  <sup>(2)</sup>. Il ne dépend que de la différence  $n = p - q \pmod 8$  (mod 2 seulement dans le cas complexe). On se permettra donc souvent de l'écrire  $K^n(X; \mathcal{C})$ . On définit de manière analogue des « groupes relatifs »  $K^{p,q}(X, Y; \mathcal{C}), K^n(X, Y; \mathcal{C})$ , lorsque Y est un sous-espace fermé de X (considérer le sous-ensemble des triples  $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  tels que  $\varepsilon_i|_Y = \varepsilon_j|_Y$ ). Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\mathcal{L}(A)$  des modules libres de type fini sur une algèbre de Banach A, on écrira ces groupes simplement  $K^{p,q}(X; A), K^{p,q}(X, Y; A)$ ....

Remarque. — Il est facile de voir que  $K^0(X; A)$  s'identifie au groupe de Grothendieck d'une catégorie de fibrés en A-modules convenables : ce sont les facteurs directs de fibrés triviaux  $X \times A^n, n = 0, 1, 2, \dots$ . Pour  $A = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et X compact, on retrouve donc bien la K-théorie usuelle.

De même que pour X compact, on peut définir un « homomorphisme de connexion » :

$$\partial^{p,q+1} : K^{p,q+1}(Y; \mathcal{C}) \rightarrow K^{p,q}(X, Y; \mathcal{C}).$$

En effet, soit  $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  un triple définissant l'élément  $x = d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $K^{p,q+1}(Y; \mathcal{C})$  et soit  $\varepsilon_{q+1}$  le dernier générateur de  $C^{p,q+1}$ . D'après un

( 2 )

raisonnement éprouvé [cf. <sup>(10)</sup>, <sup>(12)</sup> par exemple], les graduations  $\varepsilon_i(\theta) = \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon_i \sin \theta$  se prolongent à tout  $X$  en des graduations  $\tilde{\varepsilon}_i(\theta)$  telles que

$$\tilde{\varepsilon}_i(0) = \varepsilon_{q+1}, \quad i=1, 2, \quad \theta \in [0, \pi].$$

On a alors  $\partial^{p, q-1}(x) = d(E, \tilde{\varepsilon}_1(\pi), \tilde{\varepsilon}_2(\pi))$ . On écrira souvent  $\partial^{n-1}$  au lieu de  $\partial^{p, q-1}$  lorsque  $p - q = n$ .

**DÉFINITION 1.** — Une algèbre de Banach  $A$  est dite « quasi-stable » si l'application de  $GL(n, A)$  dans  $GL(n+1, A)$  définie par  $M \rightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est une équivalence d'homotopie pour tout  $n$ . Elle est dite « stable » si  $A$ ,  $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  et  $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$  sont quasi-stables.

**THÉORÈME 2.** — Soit  $A$  une algèbre de Banach stable. On a alors une « suite exacte de cohomologie ».

$$K^{n-1}(X; A) \rightarrow K^{n-1}(Y; A) \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(X, Y; A) \rightarrow K^n(X; A) \rightarrow K^n(Y; A).$$

En particulier, les foncteurs  $K^n(X, Y; A)$ , munis des opérateurs bord  $\partial^{n-1}$ , forment une théorie de la cohomologie sur la catégorie des paires  $(X, Y)$ ,  $X$  paracompact,  $Y$  fermé dans  $X$  [si  $A$  n'est pas stable, le même résultat subsiste à condition de se restreindre aux espaces compacts : cf. <sup>(10)</sup> th. 2.3.1].

Si  $A$  est une algèbre de Banach quelconque, désignons par  $\text{Grad}^{p, q}(A)$  l'ensemble des graduations du  $C^{p, q}$ -module  $C^{p, q-1} \otimes A$  et par  $\widetilde{\text{Grad}}^{p, q}(A)$  la composante connexe de la graduation définie par la multiplication à gauche par  $\varepsilon_{q+1}$ . Désignons de même par  $GL^{p, q}(A)$  [resp.  $Gl^{p, q-1}(A)$ ] le groupe des  $C^{p, q}$ -automorphismes (resp. des  $C^{p, q-1}$ -automorphismes) de  $C^{p, q-1} \otimes A$ . Soient enfin  $\widetilde{GL}^{p, q}(A)$  la composante neutre de  $GL^{p, q}(A)$  et  $\widetilde{Gl}^{p, q-1}(A) = \widetilde{GL}^{p, q}(A) \cap Gl^{p, q-1}(A)$ . Il est alors facile de voir que  $\widetilde{\text{Grad}}^{p, q}(A)$  s'identifie à l'espace homogène  $\widetilde{GL}^{p, q}(A)/\widetilde{Gl}^{p, q-1}(A)$ . En outre,

$$K^{p, q}(\text{Point}; A) \times \widetilde{\text{Grad}}^{p, q}(A)$$

est un espace classifiant pour le foncteur  $K^{p, q}(X; A)$  si  $A$  est stable. L'isomorphisme de suspension  $\tilde{K}^{p, q+1}(X; A) \approx \tilde{K}^{p, q}(SX; A)$  est induit dans ce cas par une équivalence d'homotopie

$$K^{p, q+1}(\text{Point}; A) \times \widetilde{\text{Grad}}^{p, q+1}(A) \sim \Omega \widetilde{\text{Grad}}^{p, q}(A).$$

Celle-ci s'explique à l'aide de l'isomorphisme  $t$  défini dans [<sup>(10)</sup>, th. 2.2.2] [voir aussi <sup>(12)</sup>].

**2. EXTENSION DE LA K-THÉORIE CLASSIQUE.** — Nous nous intéressons ici particulièrement à l'algèbre de Banach  $A = \text{End } H/\mathcal{K}$ , où  $H$  est un espace de Hilbert de dimension infinie <sup>(2)</sup> et où  $\mathcal{K}$  est l'idéal des opéra-

( 3 )

teurs complètement continus dans  $H$ . La catégorie de Banach associée à  $\mathcal{L}(A)$  est précisément la catégorie  $\check{\mathcal{C}}$  de <sup>(11)</sup> et les groupes  $K^{p,q}(X; A)$  sont évidemment les mêmes que les groupes  $K^{p,q}(X; \check{\mathcal{C}}) = K^{p,q}(\check{\mathcal{C}}(X))$  de <sup>(11)</sup>. Le théorème de Kuiper <sup>(11)</sup> implique alors la proposition suivante :

PROPOSITION ET DÉFINITION 3. — *L'algèbre de Banach  $\Lambda = \text{End } H/\mathcal{K}$  est stable. Pour tout  $X$  paracompact et  $Y$  fermé dans  $X$ , on pose*

$$K^n(X, Y) = K^{p,q+1}(X, Y; \check{\mathcal{C}}) = K^{p,q+1}(X, Y; A), \quad n = p - q.$$

D'après le théorème 2, les foncteurs  $K^n(X, Y)$ , munis des opérateurs bord évidents, forment une théorie de la cohomologie. Dans le cas compact, l'argument de <sup>(11)</sup> permet de retrouver la  $K$ -théorie usuelle.

On peut donner des descriptions équivalentes *très voisines* des foncteurs  $K^n(X, Y) = K^{n-1}(X, Y; \check{\mathcal{C}})$ . La proposition 2 de <sup>(11)</sup> (vraie aussi dans le cadre paracompact) permet d'identifier  $K^n(X, Y)$  à  $\overline{K}^{p,q}(X, Y)$  pour  $p - q = n$ . Les groupes  $\overline{K}^{p,q}(X, Y)$  sont plus commodes à manier pour ce qui concerne les structures multiplicatives [cf. <sup>(11)</sup>, § 4]. Une autre description, suggérée par Atiyah et Singer <sup>(6)</sup> et conséquence à peu près directe des arguments de <sup>(11)</sup>, consiste à interpréter  $\overline{\text{Grad}}^{p,q+1}(A)$  en termes d'opérateurs de Fredholm. De manière précise, on a le lemme suivant :

LEMME 4. — *Désignons par  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H)$  l'ensemble des opérateurs de Fredholm dans l'espace de Hilbert  $C^{p,q+2} \otimes H$  qui sont auto-adjoints et qui anticommulent aux  $(p + q + 1)$  premiers générateurs de  $C^{p,q+2}$ . Alors  $\overline{\text{Grad}}^{p,q+1}(A)$  a le même type d'homotopie que la composante connexe  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$  de  $\varepsilon_{q+2}$  dans  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H)$ . En particulier,  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q} = K^n(\text{Point}) \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$  est un espace classifiant pour le foncteur  $K^n(X)$ ,  $X$  paracompact,  $n = p - q$  [<sup>(11)</sup>, <sup>(5)</sup>].*

Ce lemme est de démonstration analogue à la proposition 2 de <sup>(11)</sup> qui fournit d'ailleurs un moyen de construire une application explicite de  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$  dans  $\overline{\text{Grad}}^{p,q+1}(A)$ . Grâce à la classification des algèbres  $C^{p,q}$  [cf. <sup>(10)</sup>, § 1.1], il est facile de donner des interprétations « concrètes » des espaces  $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$  [cf. <sup>(6)</sup>, <sup>(13)</sup>]. Par exemple, dans le cas réel,  $\tilde{\mathcal{F}}^{0,1}$  s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm *symétriques gauches* ( $D^* = -D$ ). De même,  $\tilde{\mathcal{F}}^{1,0}$  s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm *auto-adjoints*  $D$ , le spectre de  $D$  dans  $A$  n'étant pas situé d'un seul côté de l'axe imaginaire, etc.

(\*) Séance du 17 mars 1969.

(1) L'auteur bénéficie de l'aide de la « National Science Foundation » (Grant GP 7952 X).

(2) Pour  $X$  compact, cette définition diffère très légèrement de celle de (7), par exemple [cf. <sup>(10)</sup>, § 2.1 pour la traduction].

(3) Réel ou complexe suivant la  $K$ -théorie envisagée.

(4) Pour  $n = 0$ , le lemme est bien connu : cf. <sup>(5)</sup>, <sup>(6)</sup>, etc. En effet,  $\tilde{\mathcal{F}}^{0,0}$  est isomorphe à l'ensemble des opérateurs de Fredholm (ordinaires) dans  $H$ .

(\*) Récemment, Atiyah et Segal m'ont fait remarquer que ce type de résultat peut aussi s'obtenir en appliquant le théorème de Wood <sup>(13)</sup> à A. En fait, ceci revient à répéter essentiellement la même démonstration, compte tenu des relations entre le théorème de Wood et le théorème 2.2.2 de <sup>(10)</sup> [cf. (\*)].

(\*) M. F. ATIYAH et I. M. SINGER (à paraître).

(†) H. CARTAN, *Séminaire Bourbaki*, 1968.

(\*) L. ILLUSIE, *Séminaire de Topologie à l'I. H. E. S.*, 1964-1965.

(\*) K. JANICH, *Math. Ann.*, 161, 1965, p. 129-142.

(10) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 1, 1968, p. 161-270.

(11) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 267, 1968, p. 305-308.

(12) M. KAROUBI, *Séminaire sur la K-théorie* (à paraître).

(13) M. KAROUBI, *Espaces classifiants en K-théorie* (à paraître).

(14) N. KUIPER, *Topology*, 3, 1965, p. 19-30.

(15) R. WOOD, *Topology*, 4, 1965-1966, p. 371-389.

(The Institute for Advanced Study,  
Princeton, N. J.,  
08540, U. S. A.)