

$$\gamma_1(0, \theta) = \eta_1(\theta) \oplus \zeta_2(\theta) \oplus \xi(\theta)$$

$$\gamma_1(1, \theta) = \eta_2(\theta) \oplus \zeta_1(\theta) \oplus \xi(\theta)$$

$$\gamma_1(t, 0) = \eta_1(0) \oplus \zeta_2(0) \oplus \xi(0).$$

Comme $\varphi: \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(E) \longrightarrow \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(\varphi E)$ est une fibration de Serre, il existe un relèvement $\gamma(t, \theta)$ de $\gamma'(t, \theta)$ vers K prolongement γ_1 . Alors, $\gamma(t, \pi)$ est une homotopie entre $\eta_1(\pi) \oplus \zeta_2(\pi) \oplus \xi(\pi)$ et $\eta_2(\pi) \oplus \zeta_1(\pi) \oplus \xi(\pi)$ relativement à φ , i.e.,

$$(E, \eta_1(\pi), \eta_2(\pi)) \sim (F, \zeta_1(\pi), \zeta_2(\pi)) \quad \text{dans } K^{p,q}(\varphi).$$

Vérification de $\partial' t' = \partial^{p,q+1}$. En fait, soit $x' = (E', \varepsilon'_{q+1}; \eta'_1, \eta'_2)$ un triple de $K^{p,q+1}(C')$. On peut toujours supposer $(E', \varepsilon'_{q+1}) = \varphi^{p,q+1}(E, \varepsilon_{q+1})$ avec $(E, \varepsilon_{q+1}) \in \text{Ob } C^{p,q+1}$. Posons

$$\left. \begin{aligned} \eta'_i(\theta) &= \varepsilon'_{q+1} \cos \theta + \eta'_i \sin \theta \\ \eta_i(\theta) &: \text{relèvement de } \eta'_i(\theta) \text{ tel que } \eta_i(0) = \varepsilon_{q+1} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi. \end{array}$$

Alors,

$$t'(x') = (\pi^* E', \eta'_1(\theta), \eta'_2(\theta)) = (\varphi^{p,q} \pi^* E, \eta_1(\theta), \eta_2(\theta))$$

et

$$\partial' t'(x') = (E, \eta_1(\pi), \eta_2(\pi')) = \partial^{p,q+1}(x').$$

Proposition La suite

$$K^{p,q}(D^1, S^0; C) \longrightarrow K^{p,q}(D^1, S^0; C') \xrightarrow{\partial'} K^{p,q}(\varphi) \longrightarrow K^{p,q}(C) \longrightarrow K^{p,q}(C')$$

est exacte.

Preuve:

Vérifions e.g., l'exactitude en $K^{p,q}(\varphi)$. Soit $(\varphi^{p,q}\pi^*E, \eta_1'(\theta), \eta_2'(\theta))$ un triple de $K^{p,q}(D^1, S^0; C')$. Alors,

$$\partial'(\varphi^{p,q}\pi^*E, \eta_1'(\theta), \eta_2'(\theta)) = (E, \eta_1(\pi), \eta_2(\pi)) \sim 0 \text{ dans } K^{p,q}(C)$$

parce que $\eta_1(\pi)$ est homotope à $\eta_1(0) = \eta_2(0)$ et $\eta_2(\pi)$ est homotope à $\eta_2(0)$: $\eta_1(\pi)$ est donc homotope à $\eta_2(\pi)$. Soit (E, η_1, η_2) un triple de $K^{p,q}(\varphi)$ tel que $(E, \eta_1, \eta_2) \sim 0$ dans $K^{p,q}(C)$. Il existe alors un (F, ξ, ξ) tel que $\eta_1 \oplus \xi$ soit homotope à $\eta_2 \oplus \xi$. Soit $\gamma(\theta)$ une homotopie entre $\eta_1 \oplus \xi$ et $\eta_2 \oplus \xi$. Considérons le triple suivant dans $K^{p,q}(D^1, S^0; C')$:

$$(\varphi^{p,q}\pi^*(E \oplus F), -\cos \theta \varphi \eta_1 \oplus \sin \theta \xi, \varphi \gamma(\theta)).$$

On a,

$$\begin{aligned}
& \partial'(\varphi^{p,q}\pi^*(E \oplus F), -\cos\theta\eta_1 \oplus \sin\theta\eta_2, \varphi\gamma(\theta)) = (E \oplus F, \eta_1 \oplus \eta_2, \gamma(\pi)) \\
& = (E \oplus F, \eta_1 \oplus \eta_2, \eta_1 \oplus \eta_2) = (E, \eta_1, \eta_2) + (F, \eta_1, \eta_2) \\
& \sim (E, \eta_1, \eta_2)
\end{aligned}$$

dans $K^{p,q}(\varphi)$.

VIII: Théorème fondamental

Nous allons esquisser la preuve du théorème suivant. Voir plus détail dans M. KAROUBI, thèse [1] p.210-217.

Théorème fondamental: Pour toute catégorie de Banach C , l'homomorphisme

$$t: K^{p,q+1}(C) \longrightarrow K^{p,q}(D^1, S^0; C)$$

défini dans §VII est un isomorphisme.

Exemple: Pour $C = E(X)$, X un espace compact, on a

$$K^n(X) = K^{p,q+1}(C) \quad \text{pour } n = p - (q+1)$$

par définition, et

$$K^{p,q}(S^1, \text{point}; \mathbb{C}) \simeq K^{p,q}(D^1, S^0; \mathbb{C})$$

par excision (§VI). D'où, pour les groupes réduits, l'isomorphisme

$$\tilde{K}^n(X) \simeq \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X)$$

où ΣX est la suspension réduite de l'espace pointé X .

La démonstration du théorème fondamental va utiliser des techniques dues initialement à ATIYAH-BOTT et développées par WOOD.

D'abord, nous allons trouver une forme convenable pour les triples de $K^{p,q}(D^1, S^0; \mathbb{C})$:

Lemme:

Tout élément de $K^{p,q}(D^1, S^0; \mathbb{C})$ est représenté par un triple de la forme suivante:

$$(\pi^*E, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \eta_1 \sin \theta, \alpha(\theta) \varepsilon_{q+1} \alpha(\theta)^{-1})$$

où $(E, \varepsilon_{q+1}, \eta_1) \in \text{Ob } C^{p,q+2}$ et $\alpha(\theta) \in GL^{p,q}(E)$ vérifient

- i) $\alpha(0) = \text{Id}$
- ii) $\alpha(\pi) \varepsilon_{q+1} = - \varepsilon_{q+1} \alpha(\pi).$

Preuve:

Comme D^1 est contractile, on peut supposer que le triple donné est de la forme:

$$(\pi^*E, \varepsilon_{q+1}, \eta_2(\theta))$$

où $(E, \varepsilon_{q+1}) \in \text{Ob } C^{p, q+1}$. Soit d'autre part $\eta_1 \in \text{Grad}^{p, q+1}(E, \varepsilon_{q+1})$.

Posons

$$\zeta = \cos \frac{\theta}{2} + \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Alors,

$$\zeta^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} - \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}$$

et

$$\zeta \varepsilon_{q+1} \zeta^{-1} = \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \eta_1 \sin \theta.$$

Donc, grâce à l'isomorphisme ζ , on peut supposer que le triple donné est de la forme:

$$(\pi^*E, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \eta_1 \sin \theta, \eta_2(\theta)).$$

C'est un triple de $K^{p,q}(D^1, S^0; C)$, donc

$$\eta_2(0) = \varepsilon_{q+1} \quad \text{et} \quad \eta_2(\pi) = -\varepsilon_{q+1}.$$

Considérons l'application

$$\widetilde{GL}^{p,q}(E) \ni \alpha \longmapsto \alpha \varepsilon_{q+1} \alpha^{-1} \in \widetilde{Grad}^{p,q}(E)$$

qui est une fibration de Serre. Il existe donc une fonction continue $\alpha(\theta): [0, \pi] \longrightarrow \widetilde{GL}^{p,q}$ telle que $\alpha(\theta) \varepsilon_{q+1} \alpha(\theta)^{-1} = \eta_2(\theta)$ et

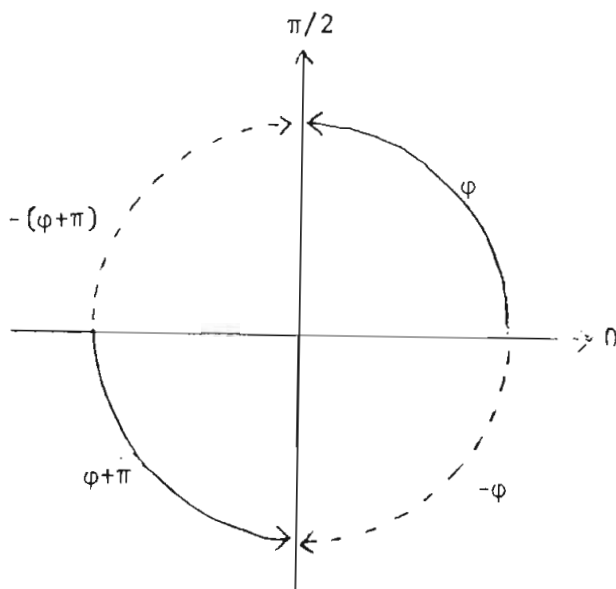
i) $\alpha(0) = \text{Id}$

ii) $\alpha(\pi) \varepsilon_{q+1} = -\varepsilon_{q+1} \alpha(\pi).$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Utilisons une nouvelle variable , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et définissons une fonction continue β sur S^1 à valeurs dans $GL^{p,q}(E)$ par la formule:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(\varphi) = \alpha(2\varphi) \quad \text{pour } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \beta(\varphi + \pi) = -\beta(\varphi) \\ \beta(-\varphi) = \varepsilon_{q+1} \beta(\varphi) \varepsilon_{q+1} \\ \beta(-(\varphi + \pi)) = -\varepsilon_{q+1} \beta(\varphi) \varepsilon_{q+1} \end{array} \right.$$



Ecrivons la fonction $\beta(\varphi)$ comme une série de Fourier:

$$\beta(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n>0} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \quad (\text{convergence au sens de Cesaro})$$

où

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

En utilisant $\zeta = \cos \varphi + \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi$, on a

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n \quad (\text{convergence au sens de Cesaro})$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \zeta^{-n} d\varphi.$$

Nous allons introduire trois monoides intermédiaires $K_A^{p,q}$, $K_P^{p,q}$, $K_L^{p,q}$ (Affines, Polynômes, Laurentiens) et quatre morphismes t_1, \dots, t_4 tels que l'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K^{p,q+1}(C) & \xrightarrow{t} & K^{p,q}(D^1, S^0; C) \\ \downarrow t_4 & & \uparrow t_1 \\ K_A^{p,q} & \xrightarrow{t_3} K_P^{p,q} \xrightarrow{t_2} & K_L^{p,q} \end{array}$$

Ensuite, démontrons que chaque t_1, \dots, t_4 sont des isomorphismes d'où le théorème fondamental.

Définition de $K_L^{p,q}$. Considérons

$$(E, \beta) \quad \text{où} \quad E = (E, \epsilon_{q+1}, \eta_1) \in \text{Ob } C^{p,q+2}$$

$$\beta(\varphi): S^1 \longrightarrow \text{End}^{p,q}(E)$$

vérifiant

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta(0) = 1 \\ \beta(\varphi + \pi) = -\beta(\varphi) \\ \beta(-\varphi) = \varepsilon_{q+1} \beta(\varphi) \varepsilon_{q+1} \quad (\text{d'où } \beta(\frac{\pi}{2})\varepsilon_{q+1} = -\varepsilon_{q+1} \beta(\frac{\pi}{2})). \end{array} \right.$$

De plus, on a

$$(L) \quad \beta(\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n \zeta^n \quad \text{où} \quad \zeta = \zeta_E = \cos \varphi + \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi.$$

Définissons

$(E, \beta) \sim (E', \beta')$ s'il existe $G \in \text{Ob } C^{p, q+2}$ tel que

$\beta \oplus \zeta_E \oplus \zeta_G$ soit homotope à $\zeta_E \oplus \beta' \oplus \zeta_G$ parmi les

fonctions vérifiant (L).

Alors,

$$K_L^{p, q} = \frac{\{(E, \beta)\}}{(\sim)} .$$

Définitions de $K_P^{p,q}$, $K_A^{p,q}$ sont les mêmes sauf la condition (L) doit être remplacée par

$$(P) \quad \beta(\varphi) = \sum_{n=-1}^N a_n \zeta^n$$

ou

$$(A) \quad \beta(\varphi) = a_{-1} \zeta^{-1} + a_1 \zeta.$$

Remarquons que dans la présentation

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$$

$a_n = 0$ si n est pair. Parce que $\beta(\varphi + \pi) = -\beta(\varphi)$ et

$$\zeta^n(\varphi + \pi) = \cos(n\varphi + n\pi) + \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin(n\varphi + n\pi) = \zeta^n(\varphi) \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Définitions de t_4, \dots, t_1

$$t_4(E, \eta_1, \eta_2) = (E, \beta(\varphi)) \quad \text{où} \quad \beta(\varphi) = \cos \varphi + \eta_2 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi.$$

En effet,

$$\cos \varphi + \eta_2 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi = \frac{1-\eta_2\eta_1}{2} \zeta^{-1} + \frac{1+\eta_2\eta_1}{2} \zeta$$

vérifie (A).

t_3, t_2, t_1 sont les inclusions naturelles.

Nous allons voir e.g. les surjectivités de t_1, \dots, t_4 .

Surjectivité de t_1 .

Soit $(E, \beta(\varphi))$ un élément de $K^{p,q}(D^1, S^0; C)$ au sens du lemme.

Soient $\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$ et $S_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n \zeta^n$. Alors $S_N(\varphi)$ converge en norme vers $\beta(\varphi)$. Posons

$$\check{S}_N(\varphi) = S_N(0)^{-1} S_N(\varphi).$$

Alors, $t\check{S}_N(\varphi) + (1-t)\beta(\varphi)$ est inversible pour tout $t \in [0, 1]$ si N est grand. Donc, $(E, \beta(\varphi)) = t_1(E, \check{S}_N)$ et $(E, \check{S}_N) \in K_L^{p,q}$.

Surjectivité de t_2 .

Soit $(E, \beta(\varphi)) \in K_L^{p,q}$ i.e., $\beta(\varphi) = \sum_{n=-2N-1}^{2N+1} a_n \zeta^n$. Alors,

$$\beta(\varphi) = P \zeta^{-2N-1} \quad \text{où } P \text{ est un polynôme en } \zeta.$$

Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} P\zeta^{-2N+1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} P\zeta^{-2N-1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} & \text{pour } u = 0 \\ \begin{pmatrix} P\zeta^{-2N+1} & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} & \text{pour } u = \pi. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$(E, \beta(\varphi)) \sim (E \oplus E, P\zeta^{-2N-1} \oplus \zeta) \simeq (E, P\zeta^{-2N+1}) + (E, \zeta^{-1}).$$

Par répétition, on a

$$(E, \beta(\varphi)) \sim (E, P\zeta^{-1}) + N \cdot (E, \zeta^{-1}) \in K_P^{p,q}.$$

Surjectivité de t_3 .

Soit $(E, \beta) \in K_p^{p,q}$ où $\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta + a_3\zeta^3 + \dots + a_{2N-1}\zeta^{2N-1}$.

Considérons un automorphisme de E^{N+1} :

$$L^n(\beta) = \begin{bmatrix} a_{-1} & a_1 & a_3 & \dots & a_{2N-1} \\ -\zeta^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\zeta^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\zeta^2, 1 \end{bmatrix}$$

Considérons en plus,

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta & 1 & \dots & 0 \\ \zeta^2 & & \dots & 0 \\ \zeta^N & \zeta^{N-1} & \dots & \zeta, 1 \end{bmatrix}$$

qui est homotope à l'identité de E^{N+1} et

$$L^n(\beta)\zeta^{-1}h = \begin{bmatrix} \beta, \beta_1, \dots, \beta_n \\ 0, \zeta^{-1}, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \zeta^{-1}, \dots, 0 \\ 0, 0, 0, \dots, \zeta^{-1} \end{bmatrix}$$

qui est un automorphisme de E^{N+1} . Donc

$$(E, \beta) + N \cdot (E, \zeta^{-1}) \sim (E^{N+1}, L^n(\beta)\zeta^{-1})$$

où $\check{M} = M(0)^{-1}M(\varphi)$ est la normalisée de $M(\varphi)$.

Par suite,

$$(E, \beta) \sim (E^{N+1}, L^n(\beta)\zeta^{-1}) + N \cdot (E^*, \zeta_{E^*}^{-1}) \in K_A^{p,q}$$

où $(E^*, \zeta_{E^*}^{-1}) \sim - (E, \zeta^{-1})$ dans $K_A^{p,q}$.

Surjectivité de t_4 :

Soit $(E, \beta) \in K_A^{p,q}$ où $\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta$. Ecrivons

$$\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta = \cos \varphi + g \sin \varphi \quad (\text{parce que } \beta(0) = a_{-1} + a_1 = 1).$$

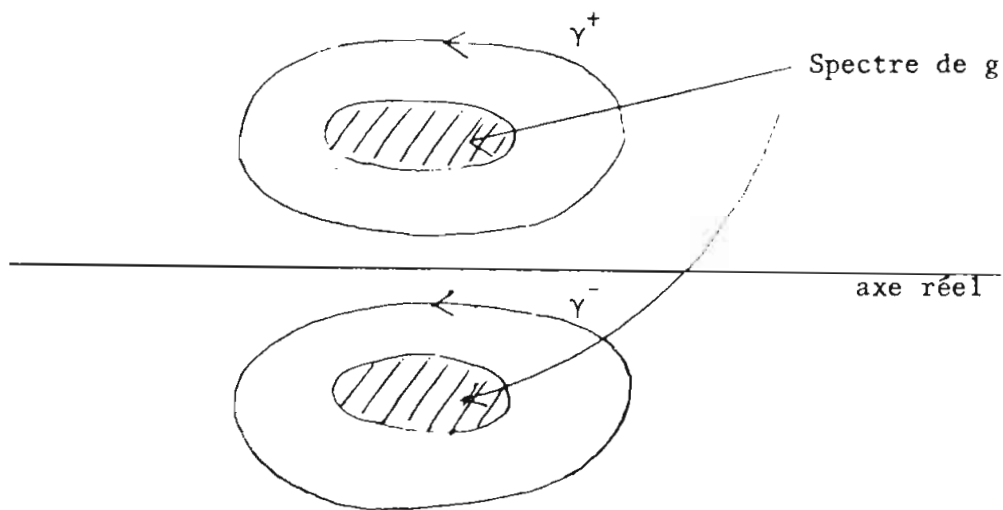
Par définition, $\beta = \beta(\varphi)$ est inversible pour tout φ donc le spectre de $g \in \text{End}^{p,q}(E) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C} = A$ est disjoint à l'axe réel i.e.

$$\text{Spec } g \cap \mathbb{R} = \emptyset.$$

Considérons

$$\hat{g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{idz}{z - g} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} \frac{(-i)dz}{z - g} \quad (\text{où } i = \sqrt{-1})$$

dans l'algèbre de Banach A où



Alors,

$$(\hat{g})^2 = -1$$

et si l'on pose $h_t = t\hat{g} + (1-t)g$ pour $0 \leq t \leq 1$, on a,

$$\varepsilon_{q+1} h_t \varepsilon_{q+1} = -h_t$$

$$\text{Spec } h_t \cap \mathbb{R} = \emptyset.$$

Par suite,

$$(E, \beta) \sim (E, \cos \varphi + \eta_2 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi) = t_4(E, \eta_1, \eta_2)$$

$$\text{où } \eta_2 = \hat{g} \varepsilon_{q+1}.$$

CHAPITRE V

ESPACES CLASSIFIANTS ET K-THEORIES AXIOMATIQUES

I. Espaces classifiants classiques:

Soient X un espace compact, Y une partie fermée de X et A une algèbre de Banach. Posons

$$K^n(X;A) = K^n(C)$$

$$K^n(Y;A) = K^n(C')$$

$$K^n(X,Y;A) = K^n(\varphi)$$

et

$$\partial^{n-1}: K^{n-1}(Y,A) \longrightarrow K^n(X,Y;A)$$

où $A(X)$ (resp. $A(Y)$) = l'algèbre des fonctions continues sur X (resp. sur Y) à valeurs dans A .

$$C = P(A(X))$$

$$C' = P(A(Y))$$

et

$$\varphi: C \longrightarrow C' \quad \text{induite par la restriction des fonctions:}$$
$$A(X) \longrightarrow A(Y).$$

Dans le Ch. IV, nous avons montré que

$$\{K^n(X, Y; A), \partial^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une théorie de la cohomologie généralisée i.e. vérifiant tous les axiomes de Cartan-Eilenberg sauf l'axiome de dimension. Le théorème suivant montre que cette théorie est représentable.

THEOREME: (Existence d'espaces classifiants). On a

$$K^n(X; A) \sim \varinjlim_r [X, F_r^n(A)] \sim [X, \varinjlim_r F_r^n(A)]$$

pour un espace compact X ,

où $F_r^n(A) = K^n(A) \times \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r)$ avec la topologie discrète sur $K^n(A)$ et $n = p - q$.

Preuve: Définissons les applications:

$$[X, K^n(A) \times \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r)] \xrightarrow{\theta_r} K^n(X; A)$$

comme suit:

$$\eta_1(x) = \varepsilon_{q+1}$$

$$\eta_2: X \longrightarrow \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) = E$$

$$g: X \longrightarrow K^{p,q}(A)$$

π^*g = l'élément de $K^{p,q}(X,A)$ déterminé dans chaque composante connexe $X_i \ni x_i$ par le triple

$$\pi_i^*g(x_i) \quad \text{où} \quad \pi_i: X \longrightarrow x_i$$

et posons

$$(g, \eta_2) \longmapsto (E, \eta_1, \eta_2) + \pi^*g.$$

Alors, avec l'application naturelle

$$K^n(A) \times \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \xrightarrow{\theta_r^{r+1}} K^n(A) \times \text{Grad}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1})$$

définie par

$$(\xi, \varepsilon) \longmapsto (\xi, \varepsilon \oplus \varepsilon_{q+1})$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & K^n(X, A) & \\
 \theta_r \nearrow & & \nwarrow \theta_{r+1} \\
 [X, F_r^n(A)] & \xrightarrow{\theta_r^{r+1} *} & [X, F_{r+1}^n(A)]
 \end{array}$$

devient un système direct et on peut démontrer actuellement

$$K^n(X, A) \simeq \varinjlim_r [X, F_r^n(A)].$$

Parce que X est compact, on a de plus

$$\varinjlim_r [X, F_r^n(A)] \simeq [X, \varinjlim_r F_r^n(A)].$$

Remarque: Si l'on pose

$$F^n(A) = \varinjlim_r F_r^n(A),$$

c'est un spectre pour la K -théorie $K^n(\ ; A)$ i.e., il existe une équivalence d'homotopie:

$$h: F^n(A) \longrightarrow \Omega F^{n+1}(A).$$

De plus, on peut écrire h de manière explicite au moyen de l'homomorphisme t défini dans le Ch. IV, §VII.

Table de $F^n(A)$ (aux composants connexes près)

n	$C^n = C^{n,0}$	$F^n(A)$	$A = \mathbb{R}$	$K^n(\mathbb{R})$
0	\mathbb{R}	$B_{GL}(A)$	BO	\mathbf{Z}
1	\mathbb{C}	$GL(A_{\mathbb{C}})/GL(A)$	U/O	0
2	\mathbb{H}	$GL(A_{\mathbb{H}})/GL(A_{\mathbb{C}})$	S_p/U	0
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$GL(A_{\mathbb{H}})$	S_p	0
4	$\mathbb{H}(2)$	$B_{GL}(A_{\mathbb{H}})$	B_{S_p}	\mathbf{Z}
5	$\mathbb{C}(4)$	$GL(A_{\mathbb{C}})/GL(A_{\mathbb{H}})$	U/S_p	0
6	$\mathbb{R}(8)$	$GL(A)/GL(A_{\mathbb{C}})$	O/U	0
7	$\mathbb{R}(8) \# \mathbb{R}(8)$	$GL(A)$	O	0

où

$$A_{\mathbb{C}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$A_{\mathbb{H}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$$

$$GL(A) = \varinjlim_r GL(A, r).$$

Dans la table, on a utilisé l'application

$$A_{\mathbb{C}} \longrightarrow A(2)$$

définie par

$$x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

II. Algèbres de Banach stables

Si X est un espace paracompact, l'isomorphisme

$$\varinjlim_r [X, F_r^n(A)] \cong [X, \varinjlim_r F_r^n(A)]$$

aura lieu si A est une algèbre de Banach stable définie comme suit:

Définition:

Une algèbre de Banach A est dite quasi-stable si l'application

$$GL(A, n) \longrightarrow GL(A, n+1)$$

définie par

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induit une équivalence d'homotopie pour n assez grand. Une algèbre de Banach A est dite stable si A , $A_{\mathbb{C}}$ et $A_{\mathbb{H}}$ sont quasi-stables.

Proposition:

Si A est une algèbre de Banach stable, alors

$$\widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \longrightarrow \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1})$$

définie par

$$\varepsilon \longmapsto \varepsilon \otimes \varepsilon_{q+1}$$

est une équivalence d'homotopie pour r assez grand.

Preuve:

Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{GL}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) & \longrightarrow & \widetilde{\text{GL}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}). \end{array}$$

On a des isomorphismes de groupes d'homotopie, si r est assez grand:

$$\pi_i(\widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r)) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\widetilde{\text{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}))$$

d'où l'équivalence d'homotopie par un théorème de J.H.C. Whitehead.

Par suite, si A est stable, on a

$$\begin{aligned} \varinjlim_r [X, F_r^n(A)] &\simeq \varinjlim_r [X, F_s^n(A)] = [X, \varinjlim_r F_s^n(A)] \\ &\simeq [X, \varinjlim_r F_r^n(A)] \end{aligned}$$

pour un s assez grand, i.e. la K -théorie $K^n(X;A)$ est représentable pour X paracompact, A stable.

THEOREME:

Si A est une algèbre de Banach stable et X est un espace paracompact, on a

$$K^n(X;A) \simeq K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^0;A).$$

Preuve:

On a, pour A stable

$$K^n(X;A) = [X, F^n(A)]$$

et

$$K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^0;A) = [X, \Omega F^{n+1}(A)].$$

Or, $F^n \xrightarrow{h} \Omega F^{n+1}$ est une équivalence d'homotopie, d'où

$$K^n(X;A) = K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^0;A).$$

Exemples d'algèbres de Banach stables.

1) Soit H un espace d'Hilbert. Alors, l'algèbre de Banach

$$A = \text{End } H/K$$

où K est l'idéal des opérateurs compacts est stable (Voir §IV). Par suite

$$K^n(X) = K^{n-1}(X,A)$$

est une bonne définition de K -théorie pour X paracompact.

2) Pour toute algèbre de Banach A , son stabilisé \tilde{A} défini dans le Ch.II, §I est stable.

III. K-théorie de la catégorie des algèbres de Banach

Comme une application du Chapitre IV, nous allons formuler la K-théorie pour la catégorie K des algèbres de Banach sur le corps k ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Bien entendu, c'est un cas particulier de K-théories mentionnées dans le Ch.II, §V et §VI.

THEOREME 1:

Soit $K =$ la catégorie des algèbres de Banach sur k ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Alors il existe une seule suite $\{K^n\}_{n \leq 0}$ des foncteurs sur K à valeurs dans Ab . telle que

$$1) \quad K^0(A) = K(A)$$

2) (Exactitude) Pour toute fibration $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ (i.e. une suite exacte), on a une suite exacte:

$$\longrightarrow K^{n-1}(A) \longrightarrow K^{n-1}(A^n) \longrightarrow K^n(A') \longrightarrow K^n(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow K^0(A'').$$

3) (Homotopie) Si A est contractile, alors

$$K^n(A) = 0 \quad \text{pour tout } n \leq 0.$$

Preuve:

Pour une algèbre de Banach unitaire (i.e. ayant un élément unité), on pose

$$K^n(A) = K^n(L(A)).$$

Pour une algèbre de Banach A non unitaire, soit A^+ l'algèbre augmentée (Ch.II, §III) avec $\varepsilon: A^+ \longrightarrow k$, on pose alors

$$K^n(A) = \text{Ker} (K^n(A^+) \longrightarrow K^n(k)).$$

Vérifions e.g. 3). Soient $A \xrightarrow[f_1]{f_0} B$ deux applications homotopiques où A, B sont unitaires. Démontrons d'abord que

$$f_0^* = f_1^* : K^n(A) \longrightarrow K^n(B).$$

Il suffit de supposer que f_0, f_1 sont topologiquement homotopiques i.e. il existe $f: A \longrightarrow B(I)$ tel que

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B(I) \\
 & & \begin{array}{l} \nearrow p_0 \\ \searrow p_1 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} B \\ B \end{array}
 \end{array}
 \quad p_0 f = f_0 \quad \text{et} \quad p_1 f = f_1.$$

où pour $\alpha: I \longrightarrow B$, $p_t(\alpha) = \alpha(t)$, $t \in I$.

Considérons un élément

$$x = (C^{p,q} \otimes A^r; \eta, \zeta) \in K^{p,q}(L(A)).$$

Pour $g: A \longrightarrow B$, on a

$$g^*(x) = (C^{p,q} \otimes B^r; g(\eta), g(\zeta))$$

donc

$$f_t^*(x) = (C^{p,q} \otimes B^r; f_t(\eta), f_t(\zeta)) \quad \text{où } f_t = p_t f \text{ pour } t \in I.$$

Par suite, $f_0(\eta)$ (resp. $f_0(\zeta)$) est homotope à $f_1(\eta)$ (resp. $f_1(\zeta)$), d'où

$$f_0^*(x) = f_1^*(x) \quad \text{dans } K^{p,q}(B).$$

Si A et B ne sont pas nécessairement unitaires, le même résultat subsiste:

$$f_0, f_1: A \xrightarrow{\sim} B \text{ homotopiques} \Rightarrow f_0^* = f_1^*.$$

Supposons maintenant A est contractile i.e. $\text{Id}_A \sim 0$ (homotope à 0). En considérant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ & \rightarrow 0 \rightarrow & \end{array}$$

on a $K^n(A) = 0$ parce que $K^n(0) = 0$.

THEOREME 2:

On a des isomorphismes

$$K^n \simeq K^{n+8} \quad \text{si } k = \mathbf{R}$$

$$K^n \simeq K^{n+2} \quad \text{si } k = \mathbf{C}.$$

Preuve:

Conséquence immédiate de la définition et le théorème de périodicité du Ch. IV, § II.

THEOREME 3:

Soit K = la catégorie des algèbres de Banach sur k ($= \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}).

Alors il existe une seule suite $\{K^n\}_{n \geq 0}$ de foncteurs de K à valeurs dans \mathbf{Ab} telle que

- 1) $K^0(A) = K(A)$
- 2) Exactitude, même que 2) du théorème 1.
- 3) $K^n(A) = 0$ si A est flasque
- 4) $A \longrightarrow \hat{A}$ (stabilisé) induit un isomorphisme $K^n(A) \xrightarrow{\sim} K^n(\hat{A})$.

Preuve:

On va définir $K^n(A)$ même manière que pour $n \leq 0$ i.e.,

$$K^n(A) = K^n(L(A)) \quad \text{si } A \text{ est unitaire}$$

$$K^n(A) = \text{Ker } (K^n(A^+) \longrightarrow K^n(k)) \quad \text{si } A \text{ n'est pas unitaire.}$$

Vérifions e.g. 3). Il suffit de montrer que

$K^n(C) = 0$ si C est une catégorie flasque (Ch. III, §IV). i.e. il existe un foncteur $\tau: C \longrightarrow C$ tel que $\tau \oplus \text{Id}_C \xrightarrow{\sim} \tau$. Soit

$$x = (E, \eta_1, \eta_2) \in K^{p,q}(C), \quad n = p - q.$$

Considérons

$$\tau(x) = (\tau(E), \tau(\eta_1), \tau(\eta_2)) \in K^{p,q}(C).$$

On a alors

$$x + \tau(x) = \tau(x) \quad \text{dans } K^{p,q}(C)$$

d'où $x = 0$.

IV. Utilisation des opérateurs de Fredholm

Définition:

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Un opérateur linéaire $D: H \longrightarrow H$ est dit de Fredholm si

$$\dim \text{Ker } D < +\infty \quad \text{et} \quad \dim \text{Coker } D < +\infty.$$

Soit $F(H) =$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm $\subset \text{End } (H)$ topologisé par la norme uniforme

Une relation avec la K -théorie est donnée par

THEOREME (Jänich-Atiyah).

$F(H)$ est un espace classifiant pour $K(X)$, X compact, i.e.,

$$K(X) \cong [X, F(H)].$$

On sait:

THEOREME (classique):

D est un opérateur de Fredholm si et seulement s'il existe un opérateur D' tel que $DD' - 1$ et $D'D - 1$ sont des opérateurs compacts.

En utilisant ce théorème, on peut écrire l'espace $F(H)$ comme suit: Soit

$$A = \text{End } H/K$$

où K est l'idéal des opérateurs compacts. Soit

$$\varphi: \text{End } H \longrightarrow A$$

la projection canonique. Alors, on a

$$F(H) = \varphi^{-1}(A^*)$$

où $A^* = GL(A,1) =$ les éléments inversibles de A .

Une conséquence de cette considération est que $GL(A,1)$ est aussi un espace classifiant pour $K(X)$ parce que on a une fibration $F(H) \longrightarrow GL(A,1)$ de fibre K qui est contractile.

De plus, on a

THEOREME

$$A = \text{End } H/K$$

est une algèbre de Banach stable.

Preuve:

D'après le théorème de Jänich-Atiyah, on a

$$\begin{array}{ccc}
 K(X) & \xrightarrow{\sim} & [X, F(H)] \\
 & \searrow \sim & \downarrow \\
 & & [X, F(H \oplus H)]
 \end{array}$$

où la flèche verticale est donnée par

$$F(H) \ni D \longmapsto D \oplus 1 \in F(H \oplus H).$$

Donc, on a

$$[X, F(H)] \xrightarrow{\sim} [X, F(H \oplus H)].$$

D'après l'existence de fibrations à fibres contractiles:

$$F(H) \longrightarrow GL(A,1) \quad \text{et} \quad F(H \oplus H) \longrightarrow GL(A,2)$$

on a,

$$[X, GL(A,1)] \xrightarrow{\sim} [X, F(H)] \xrightarrow{\sim} [X, F(H \oplus H)] \xrightarrow{\sim} [X, GL(A,2)].$$

qui est induite par

$$GL(A,1) \ni a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(A,2).$$

Plus généralement, on a

$$[X, GL(A,n)] \xrightarrow{\sim} [X, GL(A,n+1)].$$

Donc, en particulier

$$\pi_i(GL(A,n)) \xrightarrow{\sim} \pi_i(GL(A,n+1)),$$

d'où, d'après un théorème de J.H.C. Whitehead, on a une équivalence d'homotopie:

$$GL(A,n) \sim GL(A,n+1).$$

V. Filtrations de catégories de Banach.

Considérons deux catégories de Banach

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}.$$

Utilisons les notations suivantes:

$\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \dots$, objets de \mathcal{D}

E, F, G, \dots , objets de \mathcal{C}

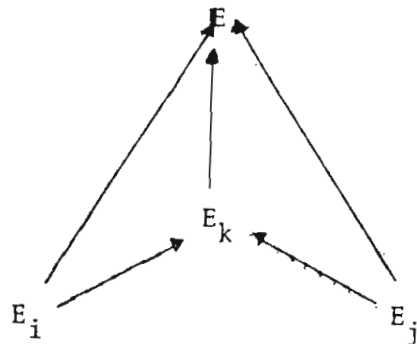
$(s.p) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ dit morphisme direct dans \mathcal{D}

où $s : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $p : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ tels que $ps = \text{Id}_{\mathbb{E}}$.

Définition:

Soit $\mathbb{E} \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Une \mathcal{C} -filtration de \mathbb{E} est la donnée de $E_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et morphismes directs $(s_i, p_i) : E_i \longrightarrow \mathbb{E}$ vérifiant l'axiome:

F.1: Pour tout i, j il existe k tel que on a un diagramme commutatif:



Définition:

La catégorie \mathcal{D} est dite C-filtrée si pour tout objet \mathbb{E} de \mathcal{D} , une C-filtration $(s_i, p_i): E_i \longrightarrow \mathbb{E}$ est donnée de telle façon que les axiomes F.2 - F.4 sont vérifiés:

F.2: Soient $F \in \text{Ob } C$ et $f: \mathbb{E} \longrightarrow F$ dans \mathcal{D} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_i: E_i \longrightarrow F$ dans C tels que

$$\|f - f_i p_i\| < \varepsilon$$

i.e.

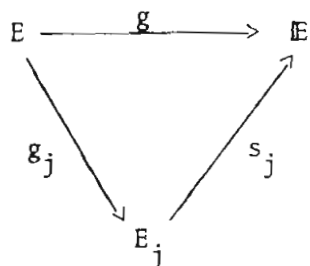
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E} & \xrightarrow{f} & F \\
 p_i \searrow & & \nearrow f_i \\
 & E_i &
 \end{array}$$

commute à ε près.

F.3 (dual de F.2) Soient $E \in \text{Ob } C$ et $g: E \longrightarrow \mathbb{E}$ dans \mathcal{D} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_j: E \longrightarrow E_j$ dans C tels que

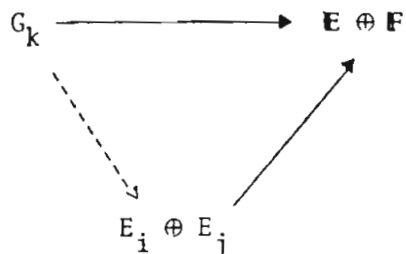
$$\|g - s_j g_j\| < \varepsilon$$

i.e.

commute à ϵ près.

F.4: Pour deux objets E, F de \mathcal{D} , la C -filtration de $E \oplus F$ est équivalente à la C -filtration:

$$(s_i, p_i) \oplus (s'_j, p'_j): E_i \oplus E_j \longrightarrow E \oplus F.$$

i.e. pour tout k , il existe i, j tels queet pour tout i, j il existe ℓ tel que

$$\begin{array}{ccc}
 E_i \oplus E_j & \xrightarrow{\quad} & E \oplus F \\
 & \searrow \text{---} & \nearrow \\
 & G_\ell &
 \end{array}$$

Exemples:

- 1) $C = E =$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension fini
 $\mathcal{D} = H =$ la catégorie des espaces de Hilbert

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{E} & \text{un espace de Hilbert} & \\
 \begin{array}{c} \downarrow p_i \\ \uparrow s_i \\ E_i \end{array} & \text{où } s_i: E_i \longrightarrow \mathbf{E} \text{ inclusion} & \\
 & p_i: \mathbf{E} \longrightarrow E_i \text{ projection orthogonale.} &
 \end{array}$$

2) Si \mathcal{D} est C -filtrée, alors la catégorie $\mathcal{D}_T(X)$ des fibrés triviaux sur un espace compact X est $C_T(X)$ -filtrée.

3) Soit C une catégorie de Banach quelconque. Définissons deux catégories C_1 et C' de sorte que

- i) $C_1 \supset C'$ est C' -filtrée.
 ii) C' est équivalente à C
 iii) C_1 est flasque.

Définition de C_1 :

Ob C_1 : une suite (E^1, E^2, E^3, \dots) où $E^i \in \text{Ob } C$ et il y a un nombre fini d'objets distincts parmi E^1, E^2, E^3, \dots .

Morphisme dans C_1 :

$$(E^1, E^2, E^3, \dots) \xrightarrow{f} (F^1, F^2, F^3, \dots)$$

est une matrice $f = (f_{ji})$ où $f_{ji} \in C(E^i, E^j)$ telle que

$$\|f\| = \sup_i \sum_j \|f_{ji}\| < +\infty.$$

Définition de C' .

La sous-catégorie pleine de C_1 dont les objets sont les suites finies i.e.

$$(E^1, E^2, \dots, E^n, 0, 0, \dots).$$

Vérification de i) C_1 est C' -filtrée.

Définissons une C' -filtration pour

$$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3, \dots) \in \text{Ob } C_1.$$

comme suit:

$$E_i = (E^1, E^2, \dots, E^i, 0, 0, 0, \dots) \in \text{Ob } C'$$

$$s_i: E_i \longrightarrow E \quad \text{injection canonique}$$

$$p_i: E \longrightarrow E_i \quad \text{projection canonique.}$$

Vérification de ii) $C' \sim C$ (équivalence de catégories)

Définissons $\theta: C \longrightarrow C'$ par

$$\theta(E) = (E, 0, 0, \dots) \in \text{Ob } C'.$$

Alors θ est pleinement fidèle et essentiellement surjectif e.g.

$$(E^1, E^2, \dots, E^n, 0, 0, \dots) \sim (E^1 \oplus \dots \oplus E^n, 0, 0, \dots) \text{ dans } C'.$$

Vérification de iii) C_1 est flasque.

Pour $E = (E^1, E^2, E^3, \dots) \in \text{Ob } C_1$, définissons

$$\tau(E) = E \oplus E \oplus E \oplus \dots \quad (\text{somme dénombrable})$$

et pour $f: E \longrightarrow F$, $\tau(f) = f \oplus f \oplus f \oplus \dots$. Alors, on a

$$\tau \oplus \text{Id}_{C_1} \sim \tau.$$

VI. Suites exactes et résolutions de catégories de Banach.Définition:

Soient $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ deux catégories de Banach telles que \mathcal{D} est \mathcal{C} -filtrée. Un morphisme $k: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ de \mathcal{D} est dit complètement continu (par rapport à cette \mathcal{C} -filtration) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $s_i: F_i \longrightarrow \mathbb{F}$ et $k_i: \mathbb{E} \longrightarrow F_i$ tels que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{k} & \mathbb{F} \\ & \searrow k_i & \nearrow s_i \\ & F_i & \end{array}$$

soit commutatif à ε près, i.e. $\|k - s_i k_i\| < \varepsilon$.

Remarque: $k: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est complètement continu

\Leftrightarrow Existence d'un diagramme commutatif à ε près:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{k} & \mathbb{F} \\ & \searrow p_j & \nearrow \ell_j \\ & E_j & \end{array}$$

\Leftrightarrow Existence d'un diagramme commutatif à ϵ près:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{E} & \xrightarrow{k} & \mathbf{F} \\
 \downarrow p_j & & \uparrow s_i \\
 \mathbf{E}_j & \xrightarrow{k_{ji}} & \mathbf{F}_i
 \end{array}$$

Notation:

$K(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ = l'ensemble des morphismes complètement continus.

Proposition:

Si $k: \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est complètement continu et si $f: \mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{E}$, $g: \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'$ sont des morphismes de \mathcal{D} , les morphismes $kf: \mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{F}$ et $gk: \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}'$ sont aussi complètement continus i.e., $K(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ est un idéal dans \mathcal{D} .

Définition: de la catégorie quotient \mathcal{D}/\mathcal{C} .

$$\text{Ob } \mathcal{D}/\mathcal{C} = \text{Ob } \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}/\mathcal{C} (\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{F})/K(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

Définition:

Une suite

$$C' \xrightarrow{\theta} C \xrightarrow{\chi} C''$$

est dite exacte si

- 1) C est $\theta(C')$ -filtrée.
- 2) $\text{Ker } (C(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \longrightarrow C''(\chi\mathbf{E}, \chi\mathbf{F})) = K(\mathbf{E}, \mathbf{F})$
- 3) θ et χ sont des foncteurs de Serre.

Exemple:

Si \mathcal{D} est C -filtrée, alors la suite

$$C \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/C$$

est exacte.

On dit aussi la suite

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/C \longrightarrow 0$$

est exacte.

THEOREME (d'exactitude) Soit

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\theta} D \xrightarrow{\varphi} D/C \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Alors, on a une suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & K^{n-1}(D) & \longrightarrow & K^{n-1}(D/C) & \longrightarrow & K^n(C) & \longrightarrow & K^n(D) & \longrightarrow & K^n(D/C) & \longrightarrow \\ & & & \searrow & & \downarrow \varphi & & \nearrow & & & \\ & & & & & K^n(\varphi) & & & & & \end{array}$$

Preuve:

Définissons deux applications $K^n(C) \longrightarrow K^n(\varphi)$ et $K^n(\varphi) \longrightarrow K^n(C)$ qui sont inverses l'une l'autre.

Définition de $K^n(C) \longrightarrow K^n(\varphi)$.

Soit $(E, \eta_1, \eta_2) \in K^{p,q}(C)$ où $n = p - q$. Considérons $(\theta(E), \theta(\eta_1), \theta(\eta_2))$. Alors $\varphi\theta(\eta_1) = \varphi\theta(\eta_2) = 0$ d'où

$$(\theta(E), \theta(\eta_1), \theta(\eta_2)) \in K^{p,q}(\varphi).$$

Définition de $K^n(\varphi) \longrightarrow K^n(\mathcal{C})$.

Soit $(C^{p,q+1} \otimes F, \eta_1, \eta_2) \in K^{p,q}(\varphi)$ où $\eta_1 = \varepsilon_{q+1}$ et $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2)$. Posons $\zeta = \eta_1 - \eta_2$. Alors $\varphi(\zeta) = 0$ i.e. ζ est complètement continu. Prenons ε -approximation ζ_i de ζ dans $\text{End}(C^{p,q+1} \otimes F_i)$:

$$\begin{array}{ccc}
 C^{p,q+1} \otimes F & \xrightarrow{\zeta} & C^{p,q+1} \otimes F \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 C^{p,q+1} \otimes F_i & \xrightarrow{\zeta_i} & C^{p,q+1} \otimes F_i
 \end{array}$$

où $F_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Soient

$$\eta'_1 = \varepsilon_{q+1} \quad \text{et} \quad \eta'_2 = \eta'_1 + \zeta_i.$$

Définissons

$$(C^{p,q+1} \otimes F_i, \eta'_1, \eta'_2) \in K^n(\mathcal{C})$$

comme l'image de $(C^{p,q+1} \otimes F, \eta_1, \eta_2)$.

D'après l'exemple 3) du §V, il existe toujours une résolution flasque d'une catégorie de Banach C quelconque:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow \dots$$

où chaque C_i est flasque.

Définition:

La suspension SC d'une catégorie de Banach C est définie par une suite exacte:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C_1 \longrightarrow SC \longrightarrow 0$$

où C_1 est flasque. Plus généralement, pour une résolution flasque de C :

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\theta_1} C_1 \xrightarrow{\theta_2} C_2 \xrightarrow{\theta_3} C_3 \xrightarrow{\theta_4} \dots$$

on a $S^n C = S(S^{n-1}C) = C_n / \theta_n(C_{n-1})$.

D'après le théorème d'exactitude, on a

$$K^n(C) \simeq K(S^n C).$$

Remarque:

Si $C = L(A)$, on peut démontrer

$$\mathcal{C}_1 \simeq P(CA) \quad \text{où } CA \text{ est la cône de } A$$

$$\widetilde{SC} \simeq P(SA) \quad \text{où } SA \text{ est la suspension de } A \text{ définies dans le Ch.II, §1.}$$

Vérification de $\mathcal{C}_1 = P(CA)$.

Considérons le foncteur $L(CA) \longrightarrow C_1$ défini par

$$(CA)^n \longmapsto (A^n, A^n, A^n, \dots) = B_n$$

$$CA(n,m) \ni f \longmapsto \text{transformation } B_n \longrightarrow B_m$$

Par définition, c'est un foncteur pleinement fidèle et tout objet de C_1 est un foncteur direct d'un B_n . Donc,

$$P(CA) = \widetilde{L(CA)} = \mathcal{C}_1.$$

VII. Construction de $K^{p,q}$ à l'aide d'opérateurs de Fredholm

Considérons la suite exacte:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow \check{H} \longrightarrow 0$$

de l'exemple 1) de §V avec H flasque et $\check{H} = H/E$. Pour un espace compact X , la suite

$$0 \longrightarrow E_T(X) \longrightarrow H_T(X) \longrightarrow \check{H}_T(X) \longrightarrow 0$$

est aussi exacte. Donc, d'après le théorème d'exactitude (§VI), on a

$$K^{n-1}(X, \check{H}) = K^{n-1}(\check{H}_T(X)) \simeq K^n(E_T(X)) = K^n(X).$$

Remarque:

Pour un espace paracompact X , on peut définir $K^n(X)$ par $K^{n-1}(\check{H}_T(X))$.

Nous allons construire les groupes $K^{p,q}(X)$ à l'aide d'opérateurs de Fredholm:

Définition:

Soit X un espace compact. Considérons les paires:

(E, D) où E est un fibré hilbertien de $C^{p,q}$ -module gradué i.e. $C^{p,q+1}$ -module. $D: E \longrightarrow E$ est une famille continue d'opérateurs de Fredholm $D_x: E_x \longrightarrow E_x$ ($x \in X$) telle que

$$D^* = D \quad \text{autoadjoint}$$

$$D e_i = - e_i D \quad i = 1, 2, \dots, p+q+1.$$

On dit que deux paires sont homotopiques:

$$(E, D) \sim (E', D')$$

s'il existe une paire (E, D) sur $X \times I$ avec projections (E, D) et (E', D') .

Finalement,

$\overline{K}^{p,q}(X)$ = le groupe de Grothendieck du monoïde engendré par les classes d'équivalence homotopique des paires (E, D) .

Notation:

$\sigma(E, D) \in \overline{K}^{p,q}(X)$ déterminé par la paire (E, D) .

Lemme 1:

Si D est inversible, alors $\sigma(E,D) = 0$.

Preuve: Posons

$$E' = E \oplus E \oplus \dots \quad \text{somme dénombrable}$$

$$D' = D \oplus D \oplus \dots$$

Comme D est inversible, D' est aussi une famille d'opérateurs de Fredholm de sorte que (E',D') est aussi une paire et

$$(E,D) + (E',D') = (E',D')$$

d'où $\sigma(E,D) = 0$.

Lemme 2:

Soit (E,D) une paire. Il existe une paire (F,Δ) avec Δ inversible et une graduation η_1^1 de $C^{p,q+1}$ -module $E \oplus F$.

Preuve: Posons

$$F = \bar{E} \oplus E \oplus \bar{E} \oplus E \oplus \dots$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots$$

Alors,

$$E \oplus F = E \oplus \bar{E} \oplus E \oplus \bar{E} \oplus \dots$$

et

$$\eta'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \quad \text{sur } E \oplus F$$

est une graduation de $C^{p,q+1}$ -module $E \oplus F$.

Nous allons définir une application

$$\bar{K}^{p,q}(X) \longrightarrow K^{p,q-1}(X; \check{H}) \simeq K^{p,q}(X).$$

On peut démontrer que c'est un isomorphisme.

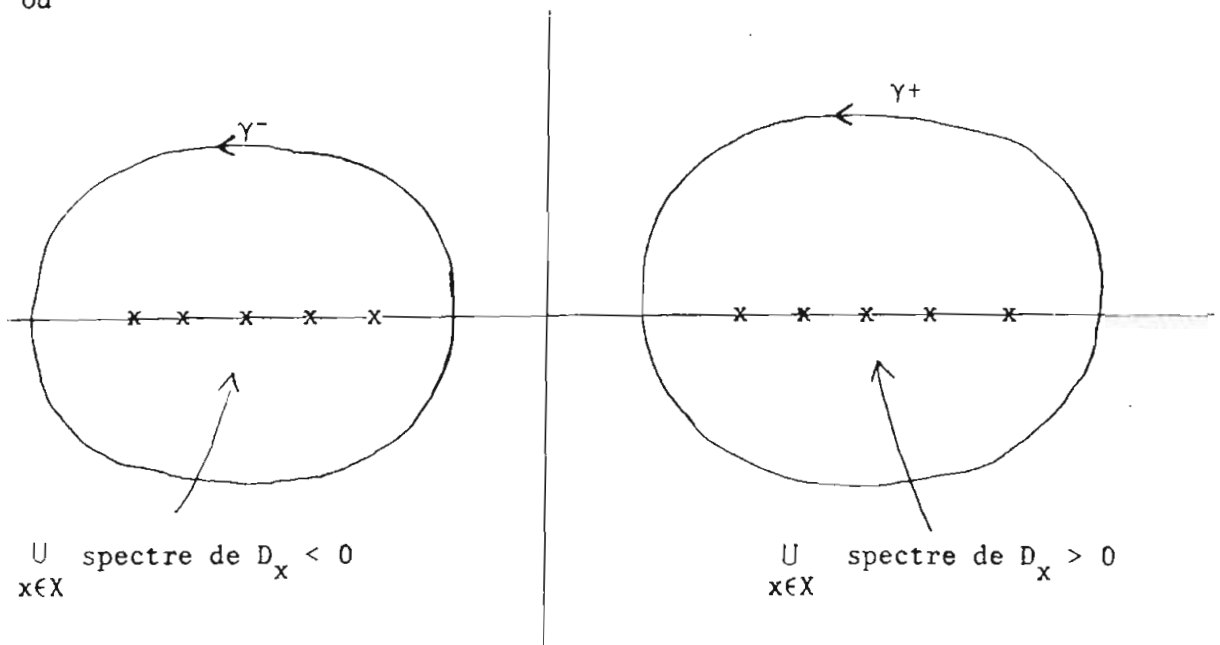
Définition de $\bar{K}^{p,q}(X) \longrightarrow K^{p,q-1}(X; \check{H})$.

Soit $\sigma(E, D) \in \bar{K}^{p,q}(X)$. D'après le lemme 2, on peut supposer que E possède une graduation η'_1 de $C^{p,q+1}$ -module. Par définition, D_x

est un opérateur autoadjoint, donc son spectre est contenu dans l'axe réel. De plus, D_x est un opérateur de Fredholm donc 0 n'est pas dans le spectre de D_x , parce que D_x est inversible modulo les opérateurs compacts (Le théorème classique cité dans §IV). Donc, on peut déformer \check{D} (l'image de D) en une graduation de \check{E} (l'image de E dans \check{H}):

$$\eta_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - \check{D}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} \frac{dz}{z - \check{D}}$$

où



Finalement, l'image de $\sigma(\check{E}, D)$ est

$$(E, \eta_1, \eta_2) \in K^{p, q+1}(X, \check{H})$$

où $\eta_1 = \check{\eta}_1^!$ et η_2 défini en haut.

Remarque:

L'isomorphisme $\bar{K}^{p, q}(X) \xrightarrow{\sim} K^{p, q}(X)$ contient le théorème de Jänich-Atiyah (§IV). Parce que

$$K(X) = K^{0, 0}(X)$$

et

$$\bar{K}^{0, 0}(X) = [X, F(H)]$$

par définition, où H est un espace de Hilbert de dimension infinie.

CHAPITRE VI

K-THEORIE A COEFFICIENTS LOCAUX

I. Groupes de Brauer gradués

On notera k l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On appellera algèbre centrale simple une k -algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée $A = A^0 \oplus A^1$, de dimension finie, unitaire, dont les seuls éléments du centre qui soient de degré 0 sont les scalaires ($Z(A) \cap A^0 = k$), et dont les seuls idéaux gradués soient $\{0\}$ ou A .

Exemples:

1^o) Soit $E = E^0 \oplus E^1$ un k -espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué. Graduons la k -algèbre $A = \text{End } E$ en prenant pour A^0 (resp. A^1) l'ensemble des endomorphismes $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$) qui conservent (resp. échangent E^0 et E^1): A est centrale simple.

2^o) Les algèbres de Clifford $C^{p,q}$ (resp. $C^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) sont centrales simples sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}).

3^o) Si A et B sont deux algèbres centrales simples, il en est encore de même de leur produit tensoriel gradué $A \hat{\otimes} B$.

Définition:

On dira que deux k -algèbres centrales simples A et A' sont "équivalentes" s'il existe deux k -espaces vectoriels \mathbb{Z}_2 -gradués E et E' tels que $A \hat{\otimes} \text{End } E$ et $A' \hat{\otimes} \text{End } E'$ soient isomorphes. On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'isomorphie de k -algèbres centrales simples. Soit $\text{GBr}(k)$ l'ensemble quotient. Le produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué $\hat{\otimes}$ passe aux quotients et définit sur $\text{GBr}(k)$ une structure de groupe abélien qu'on appelle le groupe de Brauer gradué de k ; il est en effet clair que la loi obtenue sur le quotient est associative et commutative; par ailleurs $A \hat{\otimes} A^{\text{opposé}} \simeq \text{End}_k A$ ($\text{End}_k A$ désignant les endomorphismes d'espace vectoriel, et non d'algèbre), ce qui prouve que la classe d'équivalence de $A^{\text{opposé}}$ est inverse de celle de A dans $\text{GBr}(k)$.

THEOREME: (Wall)

- (1) $\text{GBr}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_8$, et est engendré par les algèbres de Clifford réelles, la classe de $C^{p,q}$ dans $\text{GBr}(\mathbb{R})$ étant $p-q \pmod{8}$.
- (2) $\text{GBr}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}_2$, et est engendré par les algèbres de Clifford complexes, la classe de $C^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\text{GBr}(\mathbb{C})$ étant $p-q \pmod{2}$.

Plus généralement soit X un espace topologique. Considérons les fibrés $\mathcal{A} \longrightarrow X$ en k -algèbres centrales simples. [Par exemple,

si $E = E^0 \oplus E^1$ est un fibré vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué, de dimension finie, de base X , et si $\text{END}(E)$ le fibré en endomorphismes $(\text{END}(E))_X = \text{End}(E_X)$ $\forall x \in X$, $\text{END}(E)$ est un tel fibré]. Deux tels fibrés $\mathcal{A} \longrightarrow X$ et $\mathcal{A}' \longrightarrow X$ en k -algèbres centrales simples seront dits " quivalents" s'il existe deux k -fibrés vectoriels \mathbb{Z}_2 -gradués de dimension finie $E \longrightarrow X$ et $E' \longrightarrow X$ tels que

$$\mathcal{A} \hat{\otimes} \text{END}(E) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}' \hat{\otimes} \text{END}(E')$$

soient isomorphes. On note $\text{GBr}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence: c'est un groupe pour le produit tensoriel gradué $\hat{\otimes}$ des fibrés en algèbres graduées. Plus précisément, on notera $\text{GBr}0(X)$ et $\text{GBr}U(X)$ les groupes correspondant respectivement à \mathbb{R} et \mathbb{C} . [On a évidemment $\text{GBr}0(p^t) = \text{GBr}(\mathbb{R})$ et $\text{GBr}U(p^t) = \text{GBr}(\mathbb{C})$].

THEOREME [7]:

Si X est un C.W. complexe fini connexe,

$$\text{GBr}0(X) = \mathbb{Z}_8 \times H^1(X, \mathbb{Z}_2) \times H^2(X, \mathbb{Z}_2)$$

$$\text{GBr}U(X) = \mathbb{Z}_2 \times H^1(X, \mathbb{Z}_2) \times \text{Torsion } H^3(X, \mathbb{Z}).$$

Attention:

La loi de groupe n'est pas le produit direct; pour $\text{GBr } 0(X)$ par exemple, elle est donnée par:

$$(\lambda, w_1, w_2)(\lambda', w'_1, w'_2) = (\lambda + \lambda', w_1 + w'_1, w_1 w'_1 + w_2 + w'_2).$$

D'autre part, la composante λ dans \mathbb{Z}_8 (resp. \mathbb{Z}_2) de la classe d'équivalence (λ, w_1, w_2) de \mathcal{A} dans $\text{GBr}(X)$ n'est autre que la classe d'équivalence dans $\text{GBr}(k)$ de la fibre type de \mathcal{A} .

Esquisse de la démonstration pour $k = \mathbb{R}$:

Quitte à prendre le produit tensoriel gradué de \mathcal{A} par un fibré trivial, on peut supposer que la composante X est 0, i.e. que la fibre type de \mathcal{A} est l'algèbre $M_{2n}(\mathbb{R})$ des matrices $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M_n(\mathbb{R}) = \text{End}(\mathbb{R}^n)$, M étant de degré 0 si $\beta = \gamma = 0$, et de degré 1 si $\alpha = \delta = 0$. Notons E_n le groupe des automorphismes d'algèbre graduée de $M_{2n}(\mathbb{R})$: la classe d'isomorphie de \mathcal{A} définit un élément (encore noté \mathcal{A}) de $H^1(X, (E_n)_\mathbb{C})$. [Pour tout groupe topologique G , on note $G_\mathbb{C}$ le faisceau des germes de fonctions continues de X dans G].

Rappelons (théorème de Skolem.Noether) que tout automorphisme d'algèbre simple est intérieur: on en déduit, si $\varphi \in E_n$, qu'il existe $T \in GL(2n, \mathbb{R})$ tel que, $\forall M \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = TM^{-1}$. En outre, puisque le centre de $M_{2n}(\mathbb{R})$ ne contient que les scalaires, T est définie à multiplication près par un scalaire non nul. Pour que φ soit un automorphisme d'algèbre graduée, il faut en plus que T appartienne au sous-groupe $F_n \cup F'_n$ de $GL(2n, \mathbb{R})$ où F_n (resp. F'_n) désigne l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (resp $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$) où a et b appartiennent à $GL(n, \mathbb{R})$. On en déduit que $E_n = F_n \cup F'_n / \mathbb{R}^*$.

D'autre part, F_n est un sous-groupe distingué de $F_n \cup F'_n$, et la multiplication à droite par $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ dans $F_n \cup F'_n$ définit une bijection de F_n sur F'_n . Comme, en outre $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}^2 = I_{2n}$, le groupe quotient $F_n \cup F'_n / F_n$ est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . On obtient par conséquent le diagramme commutatif ci-dessous, dont les lignes et les colonnes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & F_n/\mathbb{R}^* \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & F_n \cup F'_n & \longrightarrow & E_n = F_n \cup F'_n / \mathbb{R}^* \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathbb{Z}_2 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Notons $W_1: H^1(X, (E_n)_\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ le morphisme induit par la projection $E_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, et $W_2: H^1(X, (E_n)_\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ le morphisme bord induit par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^* \longrightarrow F_n \cup F'_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 1$$

[Rappelons que $H^2(X, (\mathbb{R}^*)_\mathbb{C}) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ puisqu'on peut restreindre à \mathbb{Z}_2 le groupe structural \mathbb{R}^* des fibrés vectoriels réels de rang 1].

Pour que \mathcal{A} ($\in H^1(X, (E_n)_C)$) provienne d'un élément de $H^1(X, (F_n)_C)$, il faut et il suffit que $W_1(\mathcal{A}) = 0$ et $W_2(\mathcal{A}) = 0$; dire qu'il en est ainsi signifie précisément qu'il existe un fibré vectoriel E , \mathbb{Z}_2 -gradué, tel que $\mathcal{A} \simeq \text{END}(F)$: c'est dire que la classe de \mathcal{A} est nulle dans $\text{GBr}0(X)$. Plus généralement, on associe à tout fibré \mathcal{A} de fibre type $M_{2n}(\mathbb{R})$ le couple $(W_1(\mathcal{A}), W_2(\mathcal{A})) \in H^1(X, \mathbb{Z}_2) \times H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ et à tout fibré \mathcal{A} de fibre type centrale simple réelle un triplet $(\lambda_1(\mathcal{A}), W_1(\mathcal{A}), W_2(\mathcal{A})) \in \mathbb{Z}_8 \times H^1(X, \mathbb{Z}_2) \times H^2(X, \mathbb{Z}_4)$ qui ne dépend en fait que de la classe de \mathcal{A} dans $\text{GBr}0(X)$. On démontre que l'application $\text{GBr}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \times H^1(X, \mathbb{Z}_2) \times H^2(X, \mathbb{Z}_4)$ ainsi définie est bijective grâce à la théorie générale des foncteurs semi-exacts sur la catégorie des CW-complexes finis.

Exemples:

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel muni d'une métrique riemannienne définie négative et $C(V)$ le fibré en algèbres de Clifford correspondant. Nous admettrons le

THEOREME:

- (1) La classe de $C(V)$ dans $\text{GBr}0(X)$ est égale à $(\dim V \pmod{8}, W_1(V), W_2(V))$, $W_i(V)$ désignant la $i^{\text{ème}}$ classe de Stiefel-Whitney de V .

- (2) La classe de $C(V) \otimes \mathbb{C}$ dans $\text{GBr } U(X)$ est égale à $(\dim V \pmod{2}, W_1^{\mathbb{R}}(V), \beta(W_2(V)))$ où $\beta: H^2(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{Z})$ est le morphisme bord associé à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{x^2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

En particulier, pour que la classe de $C(V)$ soit nulle dans $\text{GBr}(X)$, il faut et il suffit que V soit spinoriel et de dimension multiple de 8.

II. K-théorie à coefficients locaux

Soit $\mathcal{A} \longrightarrow X$ un fibré en k -algèbres graduées centrales amples, dont la base X est compacte. On va définir un groupe $K^{\mathcal{A}}(X)$ qui généralise le groupe $\bar{K}^{p,q}(x)$ défini au chap.V (qui correspond au cas où \mathcal{A} est le fibré trivial $C^{p,q} \times X \longrightarrow X$, muni d'une graduation triviale ϵ).

Soit $E \longrightarrow X$ un k -fibré hilbertien muni d'une structure de \mathcal{A} -module à gauche \mathbb{Z}_2 -gradué, et soit $D: E \longrightarrow E$ une famille continue d'opérateurs de Fredholm de degré un, $D_x: E_x \longrightarrow E_x$ ($x \in X$) telle que (1) $D^* = D$.

$$(2) \quad \text{Doa}_i = (-1)^i a_i \circ D \quad \forall a_i \in \mathcal{A}^i \quad (i = 0, 1)$$

Deux tels couples (E, D) et (E', D') sur X seront dits "homotopes" s'il existe un couple analogue (E, D) sur $X \times [0, 1]$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ soient respectivement (E, D) et (E', D') . Soit $C^{\mathcal{A}}(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie de tels couples (E, D) : c'est un monoïde abélien pour la loi induite par la somme directe

$$(E, D) + (E', D') = (E \oplus E', D \oplus D').$$

Soit $K^{\mathcal{A}}(X)$ le groupe obtenu par symétrisation.

Proposition:

$K^{\mathcal{A}}(X)$ ne dépend que la classe α de \mathcal{A} , dans $GB_r(X)$.

Il s'agit de montrer que pour tout k -fibré vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué de dimension finie $E \rightarrow X$, $K^{\mathcal{A}}(X)$ et $K^{\hat{\mathcal{A}}^{\otimes \text{END}(E)}}(X)$ sont isomorphes.

Il suffit, pour celà, de montrer qu'il existe une équivalence de catégories

$$X : H^{\mathcal{A}}(X) \longrightarrow H^{\hat{\mathcal{A}}^{\otimes \text{END}(E)}}(X)$$

où $H^{\mathcal{A}}(X)$ désigne la catégorie des k -fibrés vectoriels hilbertiens sur X qui sont des \mathcal{A} -modules à gauche \mathbb{Z}_2 -gradués: on définit X en posant

$$X(M) = M \otimes_k E \quad \text{pour tout objet } M \text{ de } H^{\mathcal{A}}(X)$$

$$X(f) = f \otimes \text{Id}_E \quad \text{pour tout morphisme } f: M \longrightarrow M \text{ dans } H^{\mathcal{A}}(X).$$

Puisque les fibrés considérés sont localement triviaux, il suffit - pour démontrer que X est une équivalence de catégorie - de faire la démonstration lorsque X est un point. Si $E = \mathbb{R}^n$, on alors $M \otimes E = M^n$ et $f \otimes \text{Id}_E = f \oplus f \oplus \dots \oplus f$ (n fois), ceci pour tout objet M et tout morphisme f dans $H^{\mathcal{A}}(\mathbb{P}^t)$. Soit $a = (a_{ij}) : M^n \longrightarrow M^n$ un morphisme de $\mathcal{A} \hat{\otimes} \text{End}(\mathbb{R}^n)$ -modules; puisque $a\lambda = \lambda a \quad \forall \lambda \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que a est nécessairement diagonale, et que les termes de la diagonale sont tous égaux: l'application $f \longrightarrow f \oplus \dots \oplus f$ de $H^{\mathcal{A}}(\mathbb{P}^t)$ (M, N) dans $H^{\mathcal{A} \hat{\otimes} \text{End } \mathbb{R}^n}(M^n, N^n)$ est donc surjective; par ailleurs, elle est évidemment surjective. Ainsi, X est une équivalence de catégorie, dont on montre en plus qu'elle est compatible avec les graduations.

Ainsi, pour tout $\alpha \in \text{GBr}(X)$, on définit $K^\alpha(X)$ (K -théorie "tordue ou "à coefficients locaux").

Si $u: Y \longrightarrow X$ est une application continue entre espaces compacts, on définit de façon évidente, pour tout $\alpha \in \text{GBr}(X)$, un morphisme

$$u^*: K^\alpha(X) \longrightarrow K^{u^{-1}(\alpha)}(Y)$$

où $u^{-1}(\alpha)$ désigne la classe de $u^{-1}(\mathcal{A})$ dans $\text{GBr}(Y)$, \mathcal{A} étant un quelconque représentant de α dans $\text{GBr}(X)$: par abus de notation, on écrira souvent $K^\alpha(Y)$ au lieu de $K^{u^{-1}(\alpha)}(Y)$ lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible sur u .

Structures multiplicatives

Soient X et X' deux espaces compacts, et soient α dans $\text{GBr}(X)$ et α' dans $\text{GBr}(X')$. On définit une application

$$K^\alpha(X) \times K^{\alpha'}(X') \longrightarrow K^{\hat{\alpha} \otimes \alpha'}(X \times X')$$

en associant, aux classes d'équivalence des couples (E, D) et (E', D') , celle du couple

$$E \hat{\otimes} E', \quad \Delta = D \hat{\otimes} \text{ID}_{E'} + \text{Id}_E \hat{\otimes} D'$$

($\hat{\otimes}$ désignant le produit tensoriel gradué complet, on vérifie que Δ est bien de Fredholm, de degré un auto-adjoint, et (anti)-commutant avec les éléments homogènes de degré (im)pair de $\alpha \hat{\otimes} \alpha'$).

Si $X = X'$, l'application diagonale permet de définir une structure d'anneau sur $\bigoplus_{\alpha \in \text{GBr}(X)} K^\alpha(X)$. Si $u: Y \longrightarrow X$ est une application continue $\bigoplus_{\beta \in \text{GBr}(Y)} K^\beta(Y)$ est muni d'une structure de $(\bigoplus_{\alpha \in \text{GBr}(X)} K^\alpha(X))$ -module.

K-théorie à support compact:

Si l'on suppose plus généralement que X est localement compact, mais non nécessairement compact, on définit, pour tout $\alpha \in \text{GBr}(X)$, le groupe $K_C^\alpha(X)$ comme le symétrisé du monoïde des classes d'homotopie de couples (E, D) définis exactement comme dans le cas compact, avec en plus la condition que D est "acyclique à l'infini" (i.e. il existe un compact Q de X tel que $D|_{X-Q}$ soit un automorphisme de $E|_{X-Q}$).

Si X est compact, on peut prendre, pour Q , X tout entier, de sorte que $K_C^\alpha(X) = K^\alpha(X)$.

Si X est localement compact et non compact et si α se prolonge en α au compactifié \dot{X} , on a un homomorphisme évident $K_C^\alpha(X) \longrightarrow K^{\dot{\alpha}}(\dot{X})$ (\dot{X} désignant le compactifié d'Alexandroff) qui induit un isomorphisme de $K_C^\alpha(X)$ sur $\hat{K}^{\dot{\alpha}}(\dot{X}) = \text{Ker} [K^{\dot{\alpha}}(\dot{X}) \longrightarrow K^\alpha(p^t)]$.

Toutes les définitions et constructions faites ci-dessus dans le cas compact s'étendent immédiatement au cas localement compact.

III. Classe fondamentale d'un fibré vectoriel réel

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et de base compacte, et soit Q une métrique riemannienne définie positive sur V . Posons $V^+ = (V, Q)$ et $V^- = (V, -Q)$. Le fibré $C(V^+ \oplus V^-) = C(V^+) \hat{\otimes} C(V^-)$ opère sur le fibre $\wedge V = \bigoplus_{i \geq 0} \wedge^i V$ de la façon suivante: Pour tout $v \in V$, définissons

$d_v: \wedge V \longrightarrow \wedge V$ comme étant la multiplication extérieure par v , et

$\delta_v: \wedge V \longrightarrow \wedge V$ comme étant égale à la transposée $(d_v)^t$ de d_v

[rappelons que V est muni de la forme Q , non dégénérée].

Pour tout $w = (v^+, v^-) \in V^+ \oplus V^-$, on définit $\varphi(w) \in \text{END}(V)$ comme étant égal à $d_{v^+ + v^-} + \delta_{v^+ - v^-}$. On vérifie aisément que

$\varphi(w) \cdot \varphi(w) = [Q(v^+) - Q(v^-)] \text{Id}_{\wedge V}$. Par conséquent φ définit un homomor-

phisme $\tilde{\varphi}: C(V^+ \oplus V^-) \longrightarrow \text{END}(\wedge V)$ de fibrés en algèbres, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V^+ \oplus V^- & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \text{END}(\wedge V) \\
 \downarrow & \nearrow \varphi \simeq & \\
 C(V^+ \oplus V^-) & &
 \end{array}$$

[En fait $\varphi \simeq$ est un isomorphisme: cf. Bourbaki-Algèbre].

Soit $\pi: V \longrightarrow X$ la projection de V . Sur le fibré image réciproque $\pi^{-1}\wedge V$, de base V , définissons l'opérateur $\Delta: \pi^{-1}\wedge V \longrightarrow \pi^{-1}\wedge V$ en posant, $\forall v \in V$, $\Delta_v =$ multiplication par $(v, 0)$ dans le $C(V^+ \oplus V^-)_x$ -module $(\pi^{-1}\wedge V)_v = \wedge V_x$ (où $x = \pi(v)$). Puisque $C(V^-)$ est inclus dans $C(V^+ \oplus V^-)$, et que $\pi^{-1}(\wedge V)$ est un $C(V^+ \oplus V^-)$ -module, c'est aussi un $C(V^-)$ -module; et puisque $\varphi(v, 0) \cdot \varphi(0, v') = -\varphi(0, v') \cdot \varphi(v, 0)$, Δ anti-commute avec les générateurs de degré 1 de $C(V^-)$; par ailleurs, $\varphi(v, 0) = d_v + \delta_v = \Delta_v$ est auto-adjoint; enfin, puisque $(\varphi(v, 0))^2 = Q(v)\text{Id}_{\wedge V_x}$ est un automorphisme de $\wedge V_x$ dès que $v \neq 0$, Δ est un automorphisme en dehors de la section nulle de V (qui est un compact de V , puisque X est compact): c'est dire que le couple $(\pi^{-1}\wedge V, \Delta)$ définit un élément u_V de $KO_c^{C(V^-)}(V)$, qu'on appellera la classe fondamentale du fibré V (il est clair que u_V ne dépend pas de la métrique définie positive Q).

IV- Théorème de Thom-Gysin

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et de base compacte, et reprenons les notations du § précédent.

THEOREME de Thom -Gysin

La multiplication ϕ par u_V induit, pour tout $\alpha \in \text{GBr}0(X)$, un isomorphisme de $K0^\alpha(X)$ sur $K0_c^{\alpha \otimes C(V^-)}(V)$

Remarque

En particulier, si V est spinoriel, la classe de $C(V^-)$ dans $\text{GBr}0(X)$ est égale à $(\dim V \pmod{8}, 0, 0)$, et ϕ est un isomorphisme de $K0^\alpha(X)$ sur $K0^{\alpha + \dim V \pmod{8}}(\dot{V})$. Si, de plus, $\alpha = (i \pmod{8}, 0, 0)$ (i.e. α est trivial), on obtient, compte tenu de ce que la $K0$ -théorie est périodique de période 8 - que ϕ est un isomorphisme de $K0^i(X)$ sur $K0^{\sim i + \dim V}(V)$: on retrouve ainsi le théorème classique de Thom -Gysin en $K0$ -théorie pour les fibrés spinoriels. Pour les fibrés non spinoriels, il est indispensable d'introduire la K -théorie tordue si l'on veut obtenir un isomorphisme de Thom -Gysin.

Démonstration

Soit $T \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et Q une métrique riemannienne définie positive sur T . Définissons, pour

tout $\beta \in \text{GBr}0(X)$, l'application $\bar{t}_T: K0^{\beta \hat{\otimes} C(T)}(X) \longrightarrow K0_C^\beta(T)$ en associant, à la classe dans $K0^{\beta \hat{\otimes} C(T)}(X)$ du couple (E, D) la classe dans $K0_C^\beta(T)$ du couple $(p^{-1}E, \Delta)$ où $\Delta: p^{-1}E \longrightarrow p^{-1}E$ est défini par $\Delta_t = D_x + \rho(t): E_x \longrightarrow E_x$, où $x = p(t)$, et où $\rho(t)$ désigne la multiplication par t dans le $C(T_x)$ -module E_x (E est un $\beta \hat{\otimes} C(T)$ -module, donc en particulier un $C(T)$ -module). On laisse au lecteur le soin de vérifier que $(p^{-1}E, \Delta)$ définit bien un élément de $K0_C^\beta(T)$.

Lemme:

\bar{t}_T est un isomorphisme.

Montrons comment le théorème de Thom -Gysin s'en déduit. On a vu en effet au §III que $\wedge V$ est un $C(V^+ \oplus V^-)$ -module grâce à $\hat{\varphi}: C(V^+ \oplus V^-) \longrightarrow \text{END}(\wedge V)$. Comme $\hat{\varphi}$ est même un isomorphisme, la classe de $C(V^+ \oplus V^-) = C(V^+) \hat{\otimes} C(V^-)$ est nulle dans $\text{GBr}0(X)$, de sorte que l'homomorphisme

$$\mu: K0^\alpha(X) \longrightarrow K0^{\alpha \hat{\otimes} C(V^+) \hat{\otimes} C(V^-)}(X)$$

défini par $(E, D) \longrightarrow (\wedge V \hat{\otimes} E, \text{Id}_{\wedge V} \hat{\otimes} D)$ est en fait un isomorphisme: c'est en effet celui qui exprime que $K0^{\hat{U}}(X)$ ne dépend que de la classe

α de \mathcal{A} dans $\text{GBr}0(X)$. Mais, puisque $\bar{t}_V: KO_C^{\alpha \hat{\otimes} C(V^+) \otimes C(V^-)}(X) \longrightarrow KO_C^{\alpha \hat{\otimes} C(V^-)}(V)$ est un isomorphisme d'après le lemme, $\bar{t}_V \circ r: KO^\alpha(X) \longrightarrow KO_C^{\alpha \hat{\otimes} C(V^-)}(V)$ est encore un isomorphisme. Or $\bar{t}(\wedge V \hat{\otimes} E, \text{Id}_{\wedge V \hat{\otimes} D}) = \phi(E, D)$: ceci prouve que ϕ est un isomorphisme.

Démonstration du lemme (esquisse)

(i) \bar{t} est transitive en le sens suivant: $\forall \beta \in \text{GBr}0(X)$ et pour tout couple T, T' de fibrés vectoriels réels de dimension finie et de base X , le diagramme suivant est commutatif (p désignant la projection $T' \longrightarrow X$):

$$\begin{array}{ccc}
 KO_C^{\beta \hat{\otimes} C(T \oplus T')}(X) & \xrightarrow{\bar{t}_{T \oplus T'}} & KO_C^\beta(T \oplus T') \\
 \searrow \bar{t}_{T'} & & \nearrow \bar{t}_{p^{-1}T} \\
 & & KO_C^{\beta \hat{\otimes} C(T)}(T')
 \end{array}$$

(ii) Grâce à la suite exacte de Mayer-Vietoris, on se ramène au cas où T et β sont triviaux ($\beta = C^{p,q}$)

(iii) Par transitivité, on se ramène ensuite au cas où T est trivial de rang 1 et $\beta = C^{p,q}$.

(iv) Dans ce cas

$$\bar{t}_T: \bar{K}^{p,q+1}(X) \longrightarrow \bar{K}_C^{p,q}(X \times \mathbb{R})$$

Mais $\bar{K}_C^{p,q}(X \times \mathbb{R}) = K^{p,q}(X \times D^1, X \times S^0)$. On vérifie que \bar{t}_T coïncide alors avec l'isomorphisme \bar{t} figurant dans la démonstration du théorème de périodicité de Bott (cf. chap.IV), d'où le lemme.

RÉFÉRENCES

Pour les démonstrations détaillées, voir pour la K-théorie des catégories de Banach et la périodicité de Bott:

- [1] M. Karoubi: "Annales de l'E.N.S. 1968, p.161-270.
- [2] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.263, p.275, 341, 357.
- [3] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.267 p.305, 328, 345.
- [4] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.268, p.596, 710.
- [5] R. Wood: "Topology" 1965, p.371-389.

- Pour la K-théorie algébrique:

- [6] Karoubi et Willamayor: (à paraître)

- Pour la K-théorie à coefficients locaux et le théorème de Thom-Gysin

- [7] Donovan and Karoubi: "Graded Brauer group and K-theory with local coefficients" (à paraître aux Publ. Math. IHES).

Livres classiques de K théorie:

[8] M. Atiyah: "K-theory" (Benjamin, 1967).

[9] D. Husemoller: "Vector bundles (Mac Graw Hill, 1967)

Pour les algèbres de Clifford:

[10] N. Bourbaki: "Algèbre" Ch.9 (Hermann 1959).

[11] Atiyah-Bott-Shapiro: "Topology 1964 p.3-38

FACULTÉ DES SCIENCES - UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PUBLICATIONS DU SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1. LIONS, Jacques L., Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 176 p., \$3.00.
2. WAELBROECK, Lucien, Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 148 p., \$2.50.
3. MARANDA, Jean-Marie, Introduction à l'algèbre homologique, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 52 p., \$2.00.
4. KAHANE, Jean-Pierre, Séries de Fourier aléatoires, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p., \$3.00.
5. PISOT, Charles, Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p., \$3.00.
6. DAIGNEAULT, Aubert, Théorie des modèles en logique mathématique, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 138 p., \$2.50.
7. JOFFE, Anatole, Promenades aléatoires et mouvement brownien, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, viii et 144 p., \$2.50.
8. DIEUDONNÉ, Jean, Fondements de la géométrie algébrique moderne, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, x et 154 p., \$3.00.
9. RIBENBOIM, Paulo, Théorie des valuations, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, 317 p., \$4.00.
10. HILTON, Peter, Catégories non abéliennes, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 151 p., \$2.50.
11. ECKMANN, Beno, Homotopie et cohomologie, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1965, 134 p., \$2.50.
12. FOX, Geoffrey, Intégration dans les groupes topologiques, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 360 p., \$4.00.

13. AGMON, Shmuel, Unicité et convexité dans les problèmes différentiels, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 156 p., \$3.00.
14. BRELOT, Marcel, Axiomatique des fonctions harmoniques, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1969, 148 p., \$2.50.
15. BROWDER, Felix E., Problèmes non linéaires, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 156 p., \$3.00.
16. STAMPACCHIA, Guido, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 328 p., \$4.00.
17. BARROS-NETO, José, Problèmes aux limites non homogènes, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 87 p., \$2.00.
18. ZAIDMAN, Samuel, Equations différentielles abstraites, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 81 p., \$2.00.
19. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, Equations aux dérivées partielles, textes de : Robert CARROLL, George DUFF, Jöran FRIBERG, Jules GOBERT, Pierre GRISVARD, Jindřich NEČAS et Robert SEELEY, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 144 p., \$2.50.
20. FRAÏSSÉ, Roland, L'algèbre logique et ses rapports avec la théorie des relations, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 81 p., \$2.00.
21. HENKIN, Leon, Logical Systems Containing Only a Finite Number of Symbols, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 50 p., \$2.00.
22. Non disponible.
23. Non disponible.
24. LEBLANC, Léon, Représentabilité et définissabilité dans les algèbres transformationnelles et dans les algèbres polyadiques, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 126 p., \$2.50.
25. MOSTOWSKI, Andrzej, Modèles transitifs de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 174 p., \$3.00.
26. FUCHS, Wolfgang H. J., Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable complexe, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 138 p., \$2.50.
27. HAYMAN, Walter K., Les fonctions multivalentes, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 56 p., \$2.00.

28. LELONG, Pierre, Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables), (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 304 p., \$4.25.
29. RAHMAN, Qazi Ibadur, Applications of Functional Analysis to Extremal Problems for Polynomials, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 69 p., \$2.00.
30. ROSSI, Hugo, Topics in Complex Manifolds, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 85 p., \$2.00.
31. HUBER, Peter J., Théorie de l'inférence statistique robuste, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 148 p., \$2.75.
32. KAC, Mark, Aspects probabilistes de la théorie du potentiel, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1970, 154 p., \$3.25.
33. LECAM, Lucien M., Théorie asymptotique de la décision statistique, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 146 p., \$2.75.
34. NEVEU, Jacques, Processus aléatoires gaussiens, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 230 p., \$3.75.
35. VAN EEDEN, Constance, Nonparametric Estimation, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 48 p., \$2.25.
36. KAROUBI, Max, K-théorie, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 182 p., \$3.25.
37. KOHN, Joseph J., Complexes différentiels, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.
38. KUIPER, Nicolas H., Variétés hilbertiennes; aspects géométriques, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 154 p., \$3.25.
39. KURANISHI, Masatake, Déformations des variétés complexes compactes, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.
40. NARASIMHAN, Raghavan, Global Problems on Stein Manifolds, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.
41. SPENCER, Donald D., Systèmes d'équations différentielles partielles linéaires et déformations des structures de pseudo-groupes, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.
42. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, Analyse globale, textes de : P. LIBERMANN, K. D. ELWORTHY, N. MOULIS, K. K. MUKHERJEA, N. PRAKASH, G. LUSZTIG, et W. SHIH, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

décembre 1970