

EXERCICES SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

1 Le brachistochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0, H)$ et $B = (1, 0)$ les extrémités de Γ . Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0, -1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est lâché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \mapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.

1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.

2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0, 1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T .

3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0, 1]$ et on note $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, T]$ l'application inverse de $x : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0, 1], x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ , puis de f uniquement.

4) On pose $h(x) = H - f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.

5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s) = \cot \frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère une densité lagrangienne de classe \mathcal{C}^2

$$\begin{aligned} \Lambda : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\longmapsto \Lambda(t, x, v) \end{aligned}$$

et on lui associe l'action $\mathcal{L}[u] := \int_I \Lambda(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ définie pour toute application $u : I \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 . On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u : I \rightarrow \Omega$ est point critique de \mathcal{L} . Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x) v^i. \quad (1)$$

Indication : on commencera par identifier l'application $E = (E_1, \dots, E_n) : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ qui, à tout (t, x, v, w) associe une expression $E(t, x, v, w)$ telle que l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par les points critiques de \mathcal{L} s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0, \forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $\bar{E} = 0$.

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère une densité lagrangienne

$$\begin{aligned} L : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\longmapsto L(t, x, v). \end{aligned}$$

On suppose que L est continue sur $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$, est de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que $I \times \Omega \ni (t, x) \mapsto L(t, x, 0)$ est de classe \mathcal{C}^2 . Pour toute application $u : I \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 , on note $\mathcal{L}[u] := \int_I L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$. On suppose que \mathcal{L} est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi : I \rightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I , on a :

$$\mathcal{L}[u \circ \varphi] = \mathcal{L}[u]. \quad (2)$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α , si

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall s \in]0, +\infty[, \quad f(sv) = s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \alpha f(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

2) Montrer que la condition (2) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall (t, x, v, w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t, x, v, w) = 0.$$

3) Dédire de la question précédente que, $\forall j = 1, \dots, n, \forall (t, x) \in I \times \Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t, x, v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t, x, v) = L(v, x, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) v^i. \quad (3)$$

4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, x, v). \quad (4)$$

5) Dédire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe \mathcal{C}^2 et positivement homogène de degré 1 par rapport à v sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et des fonctions $a, b_1, \dots, b_n : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F_0(x, v) + a(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) v^i.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) \right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F(x, v) + \Lambda(t, x, v), ;$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (1) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v . (Indication : poser $S(t, x) = \int_0^t a(\tau, x) d\tau$.)

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) dx^i \end{aligned}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.