

EXERCICES SUR LA PHYSIQUE STATISTIQUE

1 Entropie de Shannon

On considère des expériences aléatoires avec n résultats a_1, \dots, a_n . On cherche à associer à chaque n et à chaque mesure de probabilité (p_1, \dots, p_n) sur $\{a_1, \dots, a_n\}$ une quantité qui mesure l'incertitude sur le résultat d'une expérience en connaissant juste les probabilités p_1, \dots, p_n de chaque événement. On notera, pour tout n :

$$H_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}[n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p_1, \dots, p_n) & \longmapsto & H(p_1, \dots, p_n) \end{array}$$

la fonction qui, à chaque p_1, \dots, p_n , associe cette quantité, où $\mathcal{M}[n]$ est l'ensemble des probabilités sur $\{a_1, \dots, a_n\}$. Suivant Claude Shannon, on postule les axiomes suivants sur la famille de fonctions $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(A1) Dans le cas *équiprobable* où $p_1 = \dots = p_n = 1/n$, on note

$$f(n) := H_n \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

et on définit ainsi une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. On fait alors l'hypothèse que **la fonction f est croissante** (plus on a de choix, plus l'incertitude est grande).

(A2) Si on réalise deux expériences *indépendantes* : la première avec n_1 résultats équiprobables et la deuxième avec n_2 résultats équiprobables, alors **l'incertitude associée à l'expérience qui associe les deux** (et qui comporte alors $n_1 n_2$ résultats équiprobables) **est la somme des incertitudes** :

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2).$$

(A3) Pour une expérience aboutissant à $n = n_1 + n_2$ résultats, si on regroupe les n_1 premiers résultats dans $A = \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ et les n_2 suivants dans $B = \{a_{n_1+1}, \dots, a_n\}$, alors **l'incertitude totale** $H_n(p_1, \dots, p_n)$ **est la somme de l'incertitude de savoir si le résultat sera dans A ou dans B** (c'est à dire $H_2(p_A, p_B)$, où $p_A = p_1 + \dots + p_{n_1}$ et $p_B = p_{n_1+1} + \dots + p_n$) **et de la moyenne de l'incertitude sur le résultat dans $\{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ sachant que le résultat y est et de l'incertitude sur le résultat dans $\{a_{n_1+1}, \dots, a_n\}$ sachant que le résultat y est.** Autrement dit :

$$H_n(p_1, \dots, p_n) = H_2(p_A, p_B) + p_A H_{n_1} \left(\frac{p_1}{p_A}, \dots, \frac{p_{n_1}}{p_A} \right) + p_B H_{n_2} \left(\frac{p_{n_1+1}}{p_B}, \dots, \frac{p_n}{p_B} \right).$$

(A4) Enfin la fonction $p \mapsto H_2(p, 1-p)$ est **continue**.

Le but de cet exercice est de montrer que, si les axiomes (A1), (A2), (A3) et (A4) sont satisfaits, alors il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}[n]$,

$$H_n(p_1, \dots, p_n) = -C \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \tag{1}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a

$$k f(n) \leq s f(2) \leq (k+1) f(n),$$

où k est l'unique entier tel que $n^k \leq 2^s < n^{k+1}$. En déduire que

$$f(n) = \frac{f(2)}{\log 2} \log n.$$

2) Montrer que, pour $p \in [0, 1]$, on a

$$H_2(p, 1-p) = -C [p \log p + (1-p) \log(1-p)].$$

On pourra pour cela considérer d'abord les cas où $p = r/s \in \mathbb{Q}$.

3) Conclure en montrant (1) par récurrence.

2 Equirépartition de l'énergie

On considère un système de N oscillateurs harmoniques indépendants : l'état à un certain instant t de ce système est caractérisé par un vecteur $z(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t)) \in \mathbb{R}^N$ dont l'énergie est $H(z(t))$ où :

$$H(z) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{z_i^2}{2}$$

et où les constantes a_i sont toutes strictement positives. On munit \mathbb{R}^N de la mesure de probabilité

$$d\nu = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(z)} d\mu(z),$$

où $d\mu(z) = dz_1 \cdots dz_N$ et $Z(\beta)$ est tel que $\int_{\mathbb{R}^N} d\nu = 1$. Calculer, pour tout $i = 1, \dots, N$, la valeur moyenne de l'énergie correspondant au degré de liberté numéro i , c'est à dire $\langle a_i z_i^2 / 2 \rangle_\nu$ et montrer que cette quantité ne dépend pas de a_i .