Examen du 7 janvier 2011

1 Effet photoélectrique

On éclaire une cathode de potassium et on observe un effet photoélectrique.
(i) lorsqu'on éclaire avec une lumière ultra-violette de longueur d'onde $\lambda_1 = 2\ 537 \cdot 10^{-10}$ m, l'énergie maximale des électrons éjectés est $E_1 = 3,14$ eV ;
(i) lorsqu'on éclaire avec une lumière jaune de longueur d'onde $\lambda_2 = 5\ 890 \cdot 10^{-10}$ m, l'énergie maximale des électrons éjectés est de $E_2 = 0,36$ eV ;
(Remarque : 1 eV $= 1,60219 \cdot 10^{-19}$ joule.)
1) Expliquer comment on peut retrouver la valeur de la constante de Planck h à partir de ces données expérimentales. (Faute d'avoir prévu la calculatrice, inutile de calculer la valeur numérique).
2) Expliquer comment on peut calculer l'énergie minimale nécessaire pour extraire un électron du potassium.

2 Gaz parfait de fermions

On considère un système de N particules quantiques identiques et indiscernables. On suppose que ces particules sont des *fermions*, ce qui signifie que deux de ces particules ne peuvent occuper le même état quantique. Nous supposerons (pour simplifier) qu'il existe une décomposition de l'espace de Hilbert décrivant une seule particule :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} V_s \quad \text{(somme hilbertienne)},$$

où chaque V_s est un sous-espace propre de l'opérateur hamiltonien H pour la valeur propre ϵ_s (on suppose que $s < s' \Longrightarrow \epsilon_s < \epsilon_{s'}$ et $\lim_{s\to+\infty} \epsilon_s = +\infty$). On note $Q_s := \dim V_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Nous dirons qu'il y a au plus Q_s fermions « dans chaque espace V_s » pour signifier « ayant le niveau d'énergie ϵ_s ».

Histoire de fixer les idées : si nous supposons que l'on a choisi dans chaque sous-espace propre V_s une base orthonormée $(e_s(1), \cdots, e_s(Q_s))$, une hypothèse simplificatrice sera de considérer que l'ensemble des différents remplissages possibles de V_s par un nombre arbitraire de fermions est en correspondance avec l'ensemble des droites complexes de $\Lambda^* V_s$ qui sont engendrées par un vecteur de la forme $e_s(i_1)\wedge\cdots\wedge e_s(i_p)$, où $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq Q_s$.

On fait enfin l'hypothèse que, étant une configuration telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il y a N_s fermions dans V_s, l'énergie du gaz est

$$E = \sum_s N_s \epsilon_s. \tag{1}$$

1) Expliquer en quoi la dernière hypothèse signifie que l'on a supposé que le gaz est parfait.
2) Calculer le nombre $W(N_s)_{s\in\mathbb{N}}$ d'états quantiques du gaz correspondant à une configuration avec N_s (avec $N_s \leq Q_s$) fermions dans chaque V_s.
3) Calculer l'entropie du gaz dans la configuration $(N_s)_{s\in\mathbb{N}}$. On pourra supposer que les nombres Q_s, N_s et $Q_s - N_s$ sont grands et faire les approximations habituelles.
4) On suppose que le gaz est à l'équilibre sous les contraintes (1) et :

$$N = \sum_s N_s,$$

où N, le nombre total de fermions, est fixé. Montrer en utilisant la théorie de Boltzmann qu'il existe des constantes β et μ telles que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \log(Q_s - N_s) - \log N_s - \beta\epsilon_s - \mu = 0.$$

5) En déduire des expressions de N_s, E et N en fonction de Q_s, β et μ.
6) On introduit la fonction

$$Z(\beta,\mu) := \prod_{s\in\mathbb{N}} \left(1 + e^{-\beta\epsilon_s - \mu}\right)^{Q_s}.$$

Montrer qu'il est possible d'exprimer E et N en fonction de Z et de ses dérivées partielles.
7) Essayer de justifier par un raisonnement physique le fait que

$$\beta = \frac{1}{kT}. \tag{2}$$

On pourra pour cela faire l'hypothèse que $\lim_{s\to+\infty} Q_s = +\infty$, considérer le cas où les fermions sont pour la plupart à un niveau d'énergie arbitrairement grand, mais où N reste borné et comparer l'expression (1) avec celle qui donne l'énergie d'un gaz parfait classique $\langle H\rangle = \int_{\mathcal{P}} He^{-H/kT}$.
Que revèlent ces considérations dans le cas où, à l'inverse, la température est basse ?
8) Déterminer l'entropie en fonction de E, N et Z.
9) Retrouver (2).

3 Précession de Larmor

Cas classique — Pour une particule (classique) ponctuelle se déplaçant dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, on rappelle que le moment cinétique angulaire (par rapport à l'origine) est la fonction à valeurs vectorielle

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \vec{x}\times\vec{p} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2p_3 - x^3p_2 \\ x^3p_1 - x^1p_1 \\ x^1p_2 - x^2p_1 \end{pmatrix}$$

définie sur l'espace de phase $T^*\mathbb{R}^3$. On rappelle aussi les crochets de Poisson $\{L_1, L_2\} = -L_3$, etc., ainsi que l'équation $\frac{d}{dt}(F(u(t)) = \{H,F\}(u(t))$ valable pour toute solution $t \longmapsto u(t)$ des équations de Hamilton.

1) Donner un exemple de hamiltonien H_0 sur $T^*\mathbb{R}^3$ tel que $\{H_0, \vec{L}\} = 0$. (Question subsidiaire : quel est l'ensemble des hamiltoniens H_0 dont le crochet de Poisson avec $\vec{L}$ est nul ?).

Nous allons étudier, dans le cadre classique, la dynamique d'un électron autour du noyau d'un atome d'hydrogène. Plus précisément on suppose que l'hamiltonien qui régit le mouvement de l'électron est la somme $H = H_0 + W$, où H_0 est l'hamiltonien d'interaction entre le noyau (supposé immobile dans un référentiel galiléen) et l'électron et W est l'énergie d'interaction de l'électron avec un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B}$. On suppose que W est petit par rapport à H_0 de sorte que la trajectoire de l'électron s'écarte peu d'une solution du problème de Kepler sur des durées pas trop longues. On peut alors se placer dans le cas, le plus simple, où l'électron a une orbite approximativement circulaire que l'on peut assimiler à un petit circuit électrique. L'interaction avec le champ magnétique est alors de la forme

$$W = -\vec{\mu}\cdot\vec{B},$$

où $\vec{\mu} = \gamma_0\vec{L}$ est le moment magnétique ($\gamma_0 = -\frac{q}{2m_e}$ est le coefficient gyromagnétique).

2) Expliquer pourquoi $\vec{L}$ varie lentement par rapport au mouvement de l'électron. Montrer que son évolution obéit à l'équation :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma_0\vec{L}\times\vec{B}. \tag{3}$$

3) Application : on suppose que

$$\vec{B} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

montrer que $\vec{L}$ est en général animé d'un mouvement périodique de pulsation $\omega_0 = -\gamma_0 B$ (c'est la *précession de Larmor*).

Cas quantique — On examine à présent le même problème qu'auparavant, mais en supposant que la particule est quantique non relativiste, donc que son mouvement est décrit par une équation de Schrödinger. On note

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{W}$$

l'opérateur hamiltonien, où

$$\widehat{W} = -\vec{B} \cdot \widehat{\vec{\mu}}, \quad \text{avec} \quad \widehat{\vec{\mu}} = \gamma_0 \widehat{\vec{L}}.$$

On rappelle les relations de commutation $[\widehat{L}_1, \widehat{L}_2] = i\hbar \widehat{L}_3$, etc.

4) Montrer que la valeur moyenne $\langle \widehat{\vec{\mu}} \rangle$ est solution de l'équation que (3). En déduire que l'on observe encore la précession de Larmor, avec la même fréquence que dans le cas classique.

Cas du spin — On considère à présent un électron soumis à un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B}$. On suppose que l'interaction de son spin avec le champ magnétique est totalement découplée des autres degrés de liberté de l'électron et on décrit donc l'état de l'électron par un vecteur ψ dans l'espace de Hilbert complexe de dimension deux $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$. On peut donc considérer que son hamiltonien se réduit à

$$\widehat{W} = -\vec{B} \cdot \widehat{\vec{\mu}}, \quad \text{avec} \quad \widehat{\vec{\mu}} = \gamma \widehat{\vec{S}} = \mu_0 \vec{\sigma}$$

et

$$\widehat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{(matrices de Pauli).}$$

5) On suppose que $\vec{B} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ecrire l'équation de Schrödinger. Donner la valeur $\psi(t)$ de la solution de cette équation qui vaut $\psi_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ à l'instant $t = 0$.

6) Déterminer la valeur moyenne de la composante $\langle \widehat{\mu}_1(t) \rangle$ en fonction de t pour la solution obtenue à la question précédente. Montrer que cette composante oscille avec une pulsation égale à

$$\omega_0 = -2 \frac{\mu_0 B}{\hbar}.$$

7) Etudier la fréquence de l'oscillation de $\psi(t)$ et comparer avec celle de $\langle \widehat{\mu}_1(t) \rangle$. On pourra en particulier considérer la solution $\psi_(t)$ ayant

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme condition initiale. Conclure.