Mesures gaussiennes et espaces de Fock

Thierry Lévy *

Peyresq - Juin 2003

Introduction

Les mesures gaussiennes et les espaces de Fock sont deux objets qui apparaissent naturellement et peut-être, à première vue, assez indépendamment en théorie quantique des champs. Par exemple, la quantification stochastique d'un champ dont le hamiltonien est quadratique donne lieu à une mesure gaussienne. D'un autre côté, si l'état d'un certain type de particules est décrit par un vecteur d'un certain espace de Hilbert, l'état d'un système constitué d'un nombre indéterminé ou variable de ces particules est décrit par un vecteur d'un espace de Fock associé à cet espace de Hilbert.

Dans ce texte, je vais expliquer de façon aussi simple que possible un lien très fort qui unit ces deux objets. Nous allons commencer par examiner les mesures gaussiennes, en dimension finie puis infinie. Ceci nous amènera à définir les espaces de Hilbert gaussiens, dont l'étude nous conduira, assez naturellement j'espère, aux espaces de Fock.

Tout ce qui est exposé ici est classique et la référence que j'ai le plus utilisée est le livre de S. Janson [?], en particulier pour la seconde moitié. Pour ce qui concerne les mesures gaussiennes, on trouvera une introduction agréable à lire au début de l'article de survey de D. Stroock [?].

Ce texte est issu d'un exposé donné à Peyresq en juin 2003.

1 Mesures gaussiennes en dimension finie

Pour définir une mesure gaussienne sur un espace vectoriel, il faut s'y être donné préalablement un produit scalaire. Soit donc H un espace de Hilbert[1],

*CNRS, UMR 8553 - DMA - 45, rue d'Ulm - 75230 Paris Cedex 05

[1] La théorie fonctionne aussi bien dans le cas réel que dans le cas complexe. Nous allons, pour simplifier quelques notations, nous placer dans le cas réel.

que nous supposons pour l'instant de dimension finie. Nous noterons $(\cdot,\cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme. Il existe sur H une unique mesure borélienne invariante par les translations et qui assigne la masse 1 à tout cube de H d'arête 1 : c'est la mesure de Lebesgue, que nous noterons dh. L'expression

$$d\gamma_H(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2}\, dh. \tag{1}$$

où d est la dimension de H, définit parfaitement une mesure de probabilités sur H, que nous appellerons la mesure gaussienne standard sur H.

La constante qui apparaît dans cette expression est simplement celle qui assure que $\int_H d\gamma_H = 1$. On vérifie aisément que si $e_1,\ldots,e_d$ est une base orthonormée de H, alors la mesure image de γ_H par l'application de H dans $\mathbb{R}^d$ qui envoie h sur $((e_1,h),\ldots,(e_d,h))$ est la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d}$, où $\gamma_{\mathbb{R}}$ est la loi de Gauss standard sur $\mathbb{R}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}^d,\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d})$ est donc le modèle universel de la mesure gaussienne sur un espace de Hilbert de dimension finie.

Lorsqu'on veut généraliser cette construction à un espace de dimension infinie, on doit abandonner l'expression (**??**) qui est devenue inopérante : la constante de normalisation tend vers zéro lorsque d tend vers l'infini et il n'existe sur un espace vectoriel topologique de mesure invariante par translation[2] que s'il est localement compact.

Pour définir γ_H lorsque H est séparable de dimension infinie, nous pouvons tenter de compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{lccc} \dim H = d & (H,\gamma_H) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d,\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d}) \\ \dim H = \infty & (H,\ ?\ ) & \longleftarrow & (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}), \end{array}$$

où les flèches sont déterminées par le choix d'une base orthonormée de H. La mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}}$ existe[3] et elle est caractérisée par le fait que, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, sa projection sur $\mathbb{R}^I$ est la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes I}$. Nous voudrions considérer sa mesure image par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & H \\ x=(x_0,x_1,\ldots) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\geq 0} x_i e_i. \end{array} \tag{2}$$

[2]Il s'agit de mesures σ-finies, c'est-à-dire telles que l'espace entier soit une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. Sans cette hypothèse, la mesure de comptage définie par $m(A) = \sharp A$ conviendrait !

[3]C'est une mesure sur l'ensemble des suites, sous laquelle chaque élément de la suite a une distribution gaussienne standard et est indépendant de tous les autres. Le lecteur sceptique en trouvera en appendice une construction à partir de la seule mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Bien entendu, il y a une différence fondamentale avec le cas où H est de dimension finie : l'application ci-dessus n'est pas un isomorphisme linéaire et n'est définie que sur un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en l'occurence ℓ^2. Si on avait $\gamma_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\ell^2) = 1$ ou tout du moins si cette mesure était strictement positive, on pourrait définir une mesure image. Mais ce n'est pas si simple.

Lemme 1 *Le sous-espace ℓ^2 de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de $\gamma_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$-mesure nulle.*

Preuve – Définissons sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la fonction $e^{-\sum_i x_i^2}$ en la prolongeant par 0 hors de ℓ^2. Son intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} e^{-\sum_i x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}} &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{i=0}^n x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=0}^n x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}x_i^2} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 3^{-\frac{n}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

La fonction $e^{-\sum_i x_i^2}$ étant strictement positive sur ℓ^2, on a le résultat. □

2 En dimension infinie : fonctions aléatoires

Pour comprendre comment on contourne ce problème, la meilleure chose à faire est de penser à H comme à un espace de Hilbert de fonctions et à $\sum x_i e_i$ dans l'expression (**??**) comme à une série de fonctions à coefficients aléatoires. Nous venons de voir que cette série ne converge presque jamais - au sens de la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}}$ - dans H. En revanche, on peut montrer qu'elle converge avec probabilité 1 en un sens plus faible, qui dépend de H. Par exemple, si H est l'espace $H_0^1([0,1])$ des fonctions L^2 à dérivée L^2 sur $[0,1]$ et nulles en 0[4], la série aléatoire converge, avec probabilité 1, uniformément[5]. Dans ce cas, pour $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}}$-presque tout x, la série $\sum x_i e_i$ définit une fonction continue sur

[4] Ces fonctions sont absolument continues sur $[0,1]$: elles ont donc une valeur en chaque point.

[5] C'est N. Wiener qui a compris et démontré le premier ce point précis. Cependant, si le résultat de convergence ne dépend pas de la base de H qu'on choisit, la facilité de la preuve en dépend beaucoup. Or Wiener avait choisi une base de fonctions sinusoïdales, mal adaptée à ce problème. La base de Haar de l'espace H^1 permet de simplifier considérablement la preuve, qu'on pourra par exemple trouver dans le livre de Mc Kean [**?**].

$[0,1]$, nulle en 0 : l'application (**??**) est finalement définie presque partout de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $C_0([0,1])$ et sa mesure image est par définition la mesure gaussienne $\gamma_{H_0^1}$ de H_0^1, qui s'appelle mesure de Wiener.

Ce qui est "paradoxal", c'est que $\gamma_{H_0^1}(H_0^1) = 0$: c'est ce que nous dit le lemme **??**. Nous avons ici une belle illustration d'un phénomène général : lorsqu'on essaie de construire une mesure de probabilités sur un espace fonctionnel de dimension infinie (c'est-à-dire d'en choisir un élément au hasard), on trouve une mesure portée par un espace plus gros et dans lequel l'espace initial est de mesure nulle : on tire des fonctions moins régulières que ce qu'on escomptait.

Prenons un autre exemple et traitons-le plus en détail : construisons la mesure gaussienne sur $H = L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, d\theta/2\pi)$, dans lequel nous choisissons la base $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, avec $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. À tout x de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ nous pouvons associer[6] la série de Fourier $\sum x_i e_i$. Sous la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{Z}}$, c'est une série de Fourier aléatoire qui n'est presque jamais celle d'une fonction L^2. En revanche, si nous pouvons donner une borne supérieure à la croissance des coefficients de cette série, nous pourrons identifier un espace dans lequel elle converge. Une telle borne nous est fournie par le lemme suivant, dont la portée n'est bien entendu pas limitée au cas de L^2.

Lemme 2 *Pour $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{Z}}$-presque-tout x de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, on a*

$$\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{|x_n|}{\sqrt{2\log n}} \leq 1.$$

Cette inégalité s'obtient aisément à l'aide d'une estimation de la queue d'une variable gaussienne et du lemme de Borel-Cantelli. Il y a d'ailleurs égalité. Soit maintenant u une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \left(\sum_{n=-N}^{N} x_n e_n(\theta) \right) u(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=-N}^{N} x_n \hat{u}(-n),$$

où $\hat{u}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de u. Comme u est C^2, $\hat{u}(n) = o(|n|^{-2})$ et vu le lemme précédent, cela permet de garantir pour presque-tout x la convergence du terme de droite lorsque N tend vers l'infini. La série $\sum_n x_n e_n$ existe donc pour presque-tout x comme un élément du dual de $C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. On pourrait être plus précis sur l'espace dans lequel vit cette

[6] Avoir remplacé $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$ ne change rien.

distribution[7], mais nous pouvons définir la mesure gaussienne sur H comme la mesure image de $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{Z}}$ par l'application suivante, définie presque partout :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})' \\ x & \longmapsto & \sum_n x_n e_n. \end{array}$$

Nous observons à nouveau le phénomène de grossissement de l'espace : *la mesure gaussienne sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie est portée par un espace de Banach qui le contient et dans lequel il est de mesure nulle.*

Cet espace de Banach ne semble pas être canonique. Néanmoins, il est possible de donner un cadre abstrait à cette construction : pour tout espace de Hilbert H, il existe un espace de Banach B, non unique, tel qu'on ait une injection compacte d'image dense $i : H \longrightarrow B$ et tel que la mesure γ_H soit portée par B, c'est-à-dire que, pour toute base orthonormée $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ de H, la série $\sum_i x_i e_i$ converge $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes\mathbb{N}}(x)$-presque sûrement dans B. On a, comme nous l'avons déjà dit, $\gamma_H(H) = 0$. Le triplet (i, H, B) s'appelle un *espace de Wiener abstrait*. Lorsque H est l'espace L^2 d'un espace mesuré séparable (X, μ), la mesure γ_H s'appelle le *bruit blanc* sur X d'intensité μ. Dans le cas où $H = H_0^1([0,1])$, l'espace des fonctions L^2 sur $[0,1]$ dont la dérivée est une fonction L^2, nulles en zéro, la mesure γ_H peut être portée par $C_0([0,1])$ et s'appelle la *mesure de Wiener*.

Le fait que B ne soit pas canonique peut sembler un peu irritant. On peut tout de même donner des constructions assez générales, comme par exemple celle-ci : H étant donné, on choisit sur H un opérateur A, positif, à trace et sans noyau, puis on définit B comme le complété de H pour la norme $\| h \|_1 = (h, Ah)^{\frac{1}{2}}$. Alors B porte la mesure gaussienne de H. On trouvera plus de détails sur ce point dans l'article [**?**] de L. Gross.

Néanmoins, pour ce qui nous intéresse ici, le bon point de vue est le suivant : l'espace important est H, pas B. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment nous passer complètement d'une description de B.

3 Fonctionnelles définies presque partout

Soit (i, H, B) un espace de Wiener abstrait. Nous identifions, via i, H à un sous-espace de B. Nous avons donc les inclusions suivantes entre H, B et son dual B' :

$$B' \subset H' , \quad H \subset B.$$

[7]On aurait pu prendre u moins régulière que C^2, par exemple C^1 avec dérivée höldérienne d'exposant $\alpha \in]0,1[$, auquel cas $\hat{u}(n) = o(|n|^{-1-\alpha})$.

Chaque élément ξ de H s'identifie[8] à un élément de H' et définit naturellement une forme linéaire sur H mais, comme B' est strictement inclus dans H', cette forme n'est en général pas définie sur B tout entier. Néanmoins, elle est définie sur un ensemble de γ_H-mesure 1 de B, comme nous allons le voir immédiatement[9].

Lemme 3 *Soit $\xi = \sum \xi_i e_i$ un élément fixé de $H' \simeq H$. Alors la série $\sum \xi_i x_i$ converge pour $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$-presque tout x.*

On peut prouver ce lemme par une application directe du théorème des "trois séries" de Kolmogorov (dont on trouvera par exemple l'énoncé et la preuve dans l'excellent livre de D. Williams [**?**]).

Autrement dit, pour tout $\xi \in H'$, il existe une fonctionnelle linéaire $(\xi, \cdot)$ définie γ_H-presque partout sur B par la relation

$$(\xi, \sum_i x_i e_i) = \sum_i \xi_i x_i.$$

Ceci définit bien une fonction presque partout sur B, puisque, par définition de γ_H, presque tout élément de B s'écrit sous la forme $\sum_i x_i e_i$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour étudier cette fonction, nous allons calculer la transformée de Fourier de sa distribution.

$$\begin{aligned}
\int_B e^{-it(\xi,b)}\, d\gamma_H(b) &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} e^{-it\sum \xi_j x_j}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\sum_{j=1}^n \xi_j x_j}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes n}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}t^2\|\xi\|^2}.
\end{aligned}$$

La mesure image de γ_H par $(\xi, \cdot)$ est donc la mesure gaussienne de variance $\| \xi \|^2$, c'est-à-dire la mesure $e^{-x^2/(2\|\xi\|^2)}dx/(\sqrt{2\pi} \| \xi \|)$.

---

[8] Nous adopterons la notation ξ plutôt que h pour les éléments de H vus comme des formes linéaires sur H.

[9] Cet ensemble de mesure 1 ou, ce qui revient au même, son complémentaire, dépendent cependant de ξ ! Sinon, sauf pour un ensemble de mesure nulle, tout élément de B définirait une forme linéaire sur H tout entier et s'identifierait donc à un élément de H : ce dernier serait donc de mesure 1 dans B, ce qui n'est pas le cas. Comme nous savons que H est même de mesure nulle dans B, nous pouvons affirmer que l'intersection de tous les ensembles sur lesquels les formes définies par des éléments de H sont définies est de mesure nulle dans B.

En particulier, la fonction $(\xi, \cdot)$ est dans tous les $L^p(\gamma_H)$ pour $p < \infty$, et sa norme L^2 est exactement la longueur de ξ. L'application

$$\begin{array}{rcl} H \simeq H' & \longrightarrow & L^2(B, \gamma_H) \\ \xi & \longmapsto & (\xi, \cdot) \end{array} \tag{3}$$

est donc une isométrie ! L'application (**??**) identifie donc isométriquement H à un sous espace de $L^2(B, \gamma_H)$ formé exclusivement de variables gaussiennes.

Appelons *espace de Hilbert gaussien* tout sous-espace de $L^2(\Omega, \mathbf{P})$, où $(\Omega, \mathbf{P})$ est un espace de probabilités quelconque, formé exclusivement de variables aléatoires gaussiennes, c'est-à-dire de fonctions ξ qui satisfont, pour tout λ réel ou complexe, l'identité

$$\int_\Omega e^{-\lambda\xi}\, d\mathbf{P} = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \|\xi\|^2_{L^2}}.$$

Nous venons de démontrer que la mesure gaussienne sur un espace de Hilbert H permettait de définir une isométrie de H dans un espace de Hilbert gaussien. Cette isométrie contient toute l'information qui nous intéresse sur la mesure γ_H. En effet, les espaces de probabilités (B, γ_H) et $(\Omega, \mathbf{P})$ sont équivalents, pourvu qu'on les munisse des bonnes tribus : sur B la plus petite tribu telle que toutes les fonctionnelles $(\xi, \cdot)$ soient mesurables et sur Ω la plus petite tribu telle que les variables gaussiennes qui se trouvent dans l'image de H soient mesurables.

Le point essentiel pour nous est donc le suivant : *la mesure gaussienne sur un espace de Hilbert séparable induit une isométrie de cet espace dans un espace de Hilbert gaussien*[10]. Nous identifierons désormais les éléments de H à des variables aléatoires gaussiennes.

Nous allons maintenant étudier certaines propriétés de l'espace gaussien auquel un espace de Hilbert est identifié par sa mesure gaussienne. La lettre ξ désignera un élément de H ou, ce qui est équivalent, une variable aléatoire gaussienne sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Nous aurons souvent besoin de considérer des intégrales sur Ω par rapport à $\mathbf{P}$, comme nous avons considéré jusqu'à maintenant des intégrales sur B par rapport à γ_H. Pour achever de faire disparaître cet espace Ω qui n'est pas canonique, nous adoptons la notation suivante : pour toute fonction $u \in L^1(\Omega, \mathbf{P})$, nous posons

$$E(u) = \int_\Omega u\, d\mathbf{P}.$$

[10] On ne peut cependant pas réduire les mesures gaussiennes à des isométries. Par exemple, le fait que la mesure de Wiener puisse être portée par un espace de fonctions continues est essentiel en théorie des probabilités, mais il est escamoté par le point de vue purement hilbertien. L'isométrie a un nom dans ce cas : c'est l'*intégrale stochastique de Wiener* qu'on note, pour une fonction $h \in H^1$, $\int_0^1 \dot{h}(t)\, dW_t$.

4 Le théorème de Wick

Le théorème de Wick est le résultat fondamental du calcul gaussien.

Théorème 1 (Théorème de Wick) *Soient $\xi_1, \ldots, \xi_m$ des éléments de H. Si $m = 2n$ est pair, alors*

$$E(\xi_1 \ldots \xi_{2n}) = \sum_{(i_1,j_1)\ldots(i_n,j_n)} \prod_{k=1}^{n} (\xi_{i_k}, \xi_{j_k}), \tag{4}$$

où la somme est prise sur toutes les façons d'apparier les nombres entre 1 et $2n$. Si en revanche m est impair, alors cette intégrale est nulle.

Preuve – La façon la plus courte de traiter le cas où m est pair consiste à remarquer que les deux membres de (**??**) sont des formes $2n$-linéaires symétriques sur H et à procéder par polarisation. Il suffit donc de vérifier que

$$E(\xi^{2n}) = A_{2n} \parallel \xi \parallel^{2n},$$

où A_{2n} est le nombre de façons d'apparier $2n$ points. Le membre de gauche est le moment d'ordre $2n$ d'une variable gaussienne de variance $\parallel \xi \parallel^2$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\|\xi\|^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi} \parallel \xi \parallel}.$$

Ceci vaut $(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1 \parallel \xi \parallel^{2n}$ et il ne reste plus qu'à vérifier par récurrence qu'il y a bien $(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1$ façons d'apparier $2n$ points.

Lorsque m est impair, la fonction que l'on intègre a une mesure image sur $\mathbb{R}$ impaire : en termes probabilistes, $\xi_1 \ldots \xi_m$ a même loi que $-\xi_1 \ldots \xi_m$. Comme, d'après le résultat dans le cas pair, $(\xi_1 \ldots \xi_m)^2$ est intégrable, $\xi_1 \ldots \xi_m$ l'est aussi et sa valeur moyenne est égale à zéro. □

Une conséquence immédiate mais très importante de ce théorème est que n'importe quel produit $\xi_1 \ldots \xi_m$ est encore dans $L^2(\Omega, \mathbf{P})$. C'est donc toute une sous-algèbre de cet espace L^2 que nous commençons à distinguer. Nous allons voir qu'elle est dense et qu'elle s'identifie à l'espace de Fock symétrique de H. Avant cela, nous allons faire une petite pause pour introduire une notation qui sera utile dans la suite.

Graphes de Feynman

Il est commode de garder en tête l'image de points qu'on apparie. Appelons *graphe de Feynman* (c'est la terminologie qu'utilise Janson dans [**?**]) un graphe tel que de chaque sommet il parte *au plus* une arête. Appelons *ordre* de ce graphe le nombre de ses sommets et son *rang* le nombre de ses arêtes. Nous dirons qu'il est *complet* si de chaque sommet il part une arête. Ceci équivaut à dire que son rang est la moitié de son ordre. Soit Γ un graphe de Feynman dont les n sommets sont numérotés, par exemple celui de la figure **??**.

FIG. 1 – Les sommets sont numérotés de gauche à droite.

A ce graphe Γ particulier, nous pouvons associer une notation κ_Γ (ce serait plutôt un tenseur de $H^{\otimes 7} \otimes L^2(\Omega, \mathbf{P})$) en posant, pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_7$ de H, $\kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_7) = (\xi_1, \xi_3)(\xi_2, \xi_5)(\xi_6, \xi_7)\xi_4$. Nous pouvons, en suivant la même recette, associer à tout graphe de Feynman d'ordre m un tel tenseur κ_Γ de $H^{\otimes m} \otimes L^2(\Omega, \mathbf{P})$. Le théorème de Wick peut alors se reformuler de la façon suivante : pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_m$ de H,

$$E(\xi_1 \ldots \xi_m) = \sum_\Gamma \kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

la somme étant prise sur tous les graphes complets à m sommets. Par exemple, il n'y a pas de graphes complets à un nombre impair de sommets.

5 Décomposition en chaos

Nous allons mettre un peu d'ordre dans la sous-algèbre de $L^2(B, \gamma_H)$ engendrée par $\{\xi : \xi \in H\}$. Pour tout entier $n \geq 0$, appelons $\mathcal{P}_n(H)$ la sous-algèbre engendrée par les produits d'au plus n variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Par convention, $\mathcal{P}_0(H)$ est l'espace des fonctions constantes sur B. Nous avons une suite croissante de sous-algèbres. Posons $H^{:0:} = \overline{\mathcal{P}}_0(H)$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$H^{:n:} = \overline{\mathcal{P}}_n(H) \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}(H) = \overline{\mathcal{P}}_n(H) \cap \overline{\mathcal{P}}_{n-1}(H)^\perp,$$

où les barres indiquent l'adhérence dans L^2. Nous avons donc deux écritures du même sous-espace de $L^2(\Omega, \mathbf{P})$:

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} \overline{\mathcal{P}}_n(H)} = \overline{\bigoplus_{n \geq 0} H^{:n:}}.$$

Théorème 2 *L'égalité suivante est vraie :*

$$\overline{\bigoplus_{n\geq 0} H^{:n:}} = L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbf{P}).$$

Dans ce théorème, $\sigma(H)$ désigne la tribu engendrée sur B par les éléments de H : c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle toutes les fonctions ξ sont mesurables. L'inclusion du membre de gauche dans le membre de droite est immédiate.

Preuve – Nous allons donner la preuve dans le cas où H est de dimension finie. La preuve générale s'en déduirait par l'ajout d'un argument technique simple.

Soit donc H un espace de Hilbert de dimension finie m. Soit u une fonction de $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbf{P})$ qui est orthogonale à tous les $H^{:n:}$. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_m$ une base de H, que nous choisissons orthonormée pour simplifier. Alors, comme u est mesurable par rapport aux ξ_i, il existe une fonction ϕ mesurable sur $\mathbb{R}^m$ telle que $u = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Cette fonction ϕ est dans $L^2(\mathbb{R}^m, \gamma_{\mathbb{R}^m})$ puisque $u \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$, et donc également dans $L^1(\mathbb{R}^m, \gamma_{\mathbb{R}^m})$. Admettons pendant un moment que, pour tout ξ,

$$e^{-i\xi} \in \overline{\bigoplus_{n\geq 0} H^{:n:}}.$$

L'hypothèse sur u entraîne donc, pour tous $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, avec $\xi = \sum_i t_i \xi_i$, la relation

$$\begin{aligned} 0 = E(ue^{-i\xi}) &= E(\phi(\xi_1, \ldots, \xi_m) e^{-i(t_1\xi_1 + \ldots + t_m\xi_m)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x_1, \ldots, x_m) e^{-i(t_1x_1 + \ldots + t_mx_m)} \, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes m}(x_1, \ldots, x_m) \\ &= \widehat{\phi\gamma_{\mathbb{R}^m}}(t_1, \ldots, t_m). \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier de la mesure $\phi\gamma_{\mathbb{R}^m}$ est-elle identiquement nulle. Nécessairement, $\phi = 0$ $\gamma_{\mathbb{R}^m}$-presque partout, donc presque partout au sens de Lebesgue et $u = 0$.

Pour finir la preuve, il ne reste qu'à vérifier que $\sum_{n\geq 0} (-i\xi)^n/n!$ converge dans L^2 vers $e^{-i\xi}$. Or

$$\left| e^{-i\xi} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(-i\xi)^m}{m!} \right| \leq 1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{|\xi|^m}{m!} \leq 1 + e^{|\xi|}.$$

Comme le terme de gauche tend vers 0 presque partout et le terme de droite appartient à L^2, la convergence annoncée a lieu. $\square$

Cette décomposition s'appelle la décomposition en chaos de l'espace L^2 de la mesure gaussienne.

Dans le cas d'un espace de dimension 1, nous n'avons rien fait d'autre que d'orthogonaliser la base $1, x, x^2, \dots$ de l'espace des polynômes, si bien que $\mathbb{R}^{:n:} = \mathbb{R}H_n$, où H_n est le n-ième polynôme de Hermite. Le théorème implique donc en particulier que ces polynômes forment une famille totale dans $L^2(\gamma_{\mathbb{R}})$.

6 Produits de Wick

Nous allons maintenant décrire pour tout n un isomorphisme canonique entre la puissance tensorielle symétrique $H^{\odot n}$ et l'espace $H^{:n:}$.

Pour tout n, notons π_n la projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ sur $H^{:n:}$.

Définition 1 *Étant donné $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$, on définit leur produit de Wick $:\xi_1 \dots \xi_n: \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$ par*

$$:\xi_1 \dots \xi_n := \pi_n(\xi_1 \dots \xi_n).$$

L'espace $H^{\odot n}$ peut être vu comme le quotient de $H^{\otimes n}$ par le sous-espace engendré par les tenseurs de la forme $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n - \xi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(n)}$, où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. La classe de $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n$ est notée $\xi_1 \odot \dots \odot \xi_n$. On munit $H^{\odot n}$ du produit scalaire suivant :

$$(\xi_1 \odot \dots \odot \xi_n, \eta_1 \odot \dots \odot \eta_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i, \eta_{\sigma(i)}).$$

Toute application linéaire symétrique partant de $H^{\otimes n}$ se factorise donc en une application partant de $H^{\odot n}$. Par exemple, le produit de Wick définit une application

$$:: : H^{\odot n} \longrightarrow H^{:n:},$$

dont l'image est dense par définition de $H^{:n:}$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme.

Rappelons que si Γ est un graphe de Feynman, son rang $r(\Gamma)$ est le nombre de ses arêtes. La jolie formule suivante nous donne une expression du produit de Wick.

Proposition 1 *Soient $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$. Alors*

$$:\xi_1 \dots \xi_n := \sum_{\Gamma} (-1)^{r(\Gamma)} \kappa_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

la somme étant prise sur tous les graphes de Feynman à n sommets.

Par exemple, pour $n = 3$, cette formule donne la relation

$$:\xi_1\xi_2\xi_3 := \xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1, \xi_2)\xi_3 - (\xi_2, \xi_3)\xi_1 - (\xi_3, \xi_1)\xi_2.$$

Preuve – Il nous faut montrer d'une part que le membre de droite appartient à $H^{:n:}$, d'autre part que la différence entre $\xi_1 \dots \xi_n$ et le membre de droite est orthogonal à $H^{:n}$. Commençons par ce dernier point.

En examinant le membre de droite, on n'y trouve qu'un terme de degré n, à savoir $\xi_1 \dots \xi_n$, qui correspond au graphe sans aucune arête. Tous les autres sont au plus de degré $n-2$, donc

$$\xi_1 \dots \xi_n - \sum_\Gamma (-1)^{r(\Gamma)} \kappa_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{P}_{n-2} \subset (H^{:n:})^\perp.$$

Pour prouver que le membre de droite appartient à $H^{:n:}$, choisissons $m < n$, $\eta_1, \dots, \eta_m \in H$ et calculons

$$E\left(\eta_1 \dots \eta_m \sum_\Gamma (-1)^{r(\Gamma)} \kappa_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)\right) = \sum_\Gamma (-1)^{r(\Gamma)} E(\kappa_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)\eta_1 \dots \eta_m).$$

Pour ce faire, il faut naturellement utiliser le théorème de Wick, ce qui introduit une seconde sommation sur des graphes. Le lecteur se convaincra lui-même mieux que je ne pourrais le faire que, grâce à la présence des signes $(-1)^{r(\Gamma)}$, les seuls graphes qui survivent dans cette double somme sont ceux dont aucune arête n'a ses deux extrémités sur des sommets associés aux ξ. Puisque $m < n$, il n'y a aucun tel graphe et la quantité qu'on calcule est nulle. L'orthogonalité annoncée est prouvée. □

Exemple 1 *Ce résultat prouve en particulier que le produit de Wick ne dépend pas de l'espace ambiant. Par exemple, si $H = \mathbb{R}$, la fonctionnelle qui correspond à $\xi = 1$ est simplement l'identité : $\xi = x$ sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, \gamma_\mathbb{R})$. Nous savons dans ce cas que $:\xi^n:$ est proportionnel au n-ième polynôme de Hermite et, d'après le résultat précédent, c'est un polynôme unitaire. C'est donc le polynôme $H_n(x)$ défini dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_n = (x - \partial)^n 1$. Ainsi, la relation*

$$:\xi^n := H_n(\xi),$$

qui est vraie en dimension 1, est-elle vraie pour tout élément de longueur 1 d'un espace de Hilbert H quelconque.

La proposition précédente nous fournit par ailleurs une expression explicite du polynôme H_n :

$$H_n(X) = \sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} X^{2n-k}..$$

De la preuve précédente, et plus précisément de la partie qui était laissée au lecteur, on extrait la formule suivante.

Proposition 2 *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *des éléments de* H*. Alors*

$$E(:\xi_1 \ldots \xi_n : \eta_1 \ldots \eta_m) = \sum_{\Gamma} \kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m),$$

où la somme est prise sur tous les graphes complets dont aucune arête ne joint deux sommets associés à des ξ*.*

Ce résultat entraîne a son tour le suivant.

Théorème 3 *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *des éléments de* H*. Alors si* $m = n$*,*

$$E(:\xi_1 \ldots \xi_n :: \eta_1 \ldots \eta_m :) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i, \eta_{\sigma(i)}).$$

Si $m \neq n$*, cette intégrale est nulle.*

Preuve – Le cas $m \neq n$ est immédiat, par définition des espaces $H^{:n:}$. Lorsque $m = n$, on peut utiliser le fait que $H^{:n:} \perp \mathcal{P}_{n-2}(H)$ et remplacer $:\eta_1 \ldots \eta_n:$ par $\eta_1 \ldots \eta_n$. On est alors ramené au résultat précédent. □

Ce théorème montre que le produit de Wick définit une isométrie $H^{\odot n} \longrightarrow H^{:n:}$. Il y a donc bien isomorphisme entre les deux espaces.

Avant de conclure, prenons le temps de prouver une dernière jolie formule combinatoire, qui est en quelque sorte la réciproque de la première que nous avons énoncée dans cette section. Pour cela, introduisons une variation sur la notation du produit de Wick. Si c est un scalaire et $\xi_1, \ldots, \xi_m$ des éléments de H, posons

$$:c\xi_1 \ldots \xi_m := c :\xi_1 \ldots \xi_m: .$$

Lorsque Γ est un graphe de Feynman, cette extension de notation nous permet de définir $:\kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_m):$.

Proposition 3 *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *des éléments de* H*. Alors*

$$\xi_1 \ldots \xi_n = \sum_{\Gamma} :\kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n):,$$

où la somme est prise sur tous les graphes de Feynman.

Preuve – Pour prouver ce résultat, nous allons prendre un élément de $\cup_m H^{:m:}$ et montrer que le produit scalaire des deux membres avec cet élément sont égaux. Comme $\cup_m H^{:m:}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathbf{P})$, cela permettra de conclure.

Nous laissons donc au lecteur le plaisir de vérifier que, si $\eta_1, \ldots, \eta_m$ appartiennent à H,

$$E(\xi_1 \ldots \xi_n : \eta_1 \ldots \eta_m :)$$

et

$$E\left(\sum_\Gamma : \kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n) :: \eta_1 \ldots \eta_m :\right)$$

sont tous deux égaux à la somme des $\kappa_\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ sur tous les graphes complets n'ayant aucune arête joignant deux sommets associés à des η. $\square$

7 Conclusion

Nous sommes partis d'un espace de Hilbert H et avons construit une mesure gaussienne sur H, portée en fait par un espace plus gros qui ne nous intéresse pas beaucoup. Par contre, cette mesure nous a permis de réaliser une isométrie de H dans un espace de Hilbert de variables aléatoires gaussiennes, sur un espace de probabilités que nous avons noté $(\Omega, \mathbf{P})$[11]. Nous avons commencé à analyser l'espace $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbf{P})$, où $\sigma(H)$ est la plus petite tribu qui rend mesurable toutes les variables gaussiennes associées (et désormais identifiées) aux vecteurs de H. Nous avons montré que tous les polynômes en les vecteurs de H appartenaient à cet espace L^2 et y engendraient un sous-espace dense. De la filtration $L^2 = \overline{\cup_n \mathcal{P}_n(H)}$ nous avons déduit la graduation $L^2 = \overline{\oplus_n H^{:n:}}$ par un simple procédé d'orthogonalisation. Enfin, nous avons montré comment le produit de Wick permettait d'identifier canoniquement $H^{:n:}$ à la n-ième puissance symétrique de H. Notons $\Gamma(H)$ l'espace de Fock symétrique de H, défini comme la complétion de

$$\Gamma_*(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\odot n},$$

où la somme directe est orthogonale et le produit scalaire sur $H^{\odot n}$ est celui qui a été défini au début de la section précédente.

[11] Cet espace peut être choisi égal à l'espace de Banach dont nous avons discuté l'existence, mais cela n'a aucune importance pour ce qui suit.

Nous avons donc démontré qu'il existait un isomorphisme canonique

$$\Gamma(H) \simeq L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbf{P})$$

entre l'espace de Fock symétrique de H et l'espace L^2 de la mesure gaussienne sur H.

Appendice : une construction élémentaire de $\gamma_{\mathbb{N}}$

Nous allons construire $\gamma_{\mathbb{N}}$ à partir de la seule donnée de la mesure de Lebesgue, que nous noterons λ, sur $[0,1]$. En langage probabiliste, construire $\gamma_{\mathbb{N}}$ revient à construire une suite indépendante de variables gaussiennes standard.

Tout nombre irrationnel de $[0,1]$ (en particulier, λ-presque tout nombre) admet un unique développement dyadique, c'est-à-dire qu'il s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} a_n,$$

où $a_n \in \{0,1\}$. Nous définissons (λ-p.p.) les fonctions $X_n, n \geq 1$ sur $[0,1]$ par $X_n(x) := a_n = [2^n x] (\text{mod } 2)$. Il est facile de vérifier que les fonctions X_n forment une suite indépendante de variables de Bernoulli, c'est-à-dire que, pour toute suite $n_1, \ldots, n_k$ de k entiers distincts et toute suite $b_1, \ldots, b_k$ de k éléments de $\{0,1\}$,

$$\lambda(\{x \in [0,1] : X_{n_1}(x) = b_1, \ldots, X_{n_k}(x) = b_k\}) = 2^{-k}.$$

À partir de la suite $X_1, X_2, \ldots$, nous pouvons former une suite à deux indices entiers $(Y_k^l)_{l,k \geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes. Il suffit par exemple de poser $Y_k^l = X_{3^l 5^k}$.

Maintenant, nous pouvons reconstituer une infinité dénombrable de variables uniformes sur $[0,1]$, c'est-à-dire construire la mesure $\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu borélienne de la topologie produit. Pour cela, posons, pour tout $k \geq 1$,

$$U_k(x) = \sum_{l \geq 1} 2^{-l} Y_k^l(x).$$

L'application $U : [0,1] \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \ldots)$ est en effet mesurable et satisfait la propriété suivante : pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, l'application composée

$$[0,1] \xrightarrow{U} [0,1]^{\mathbb{N}} \xrightarrow{p_I} [0,1]^I,$$

où $p_I(x_1, x_2, \ldots) = (p_i)_{i \in I}$, envoie la mesure λ sur la mesure $\lambda^{\otimes I}$, la mesure uniforme sur le cube unité de $\mathbb{R}^I$.

Finalement, soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ la fonction de répartition de la mesure gaussienne standard, c'est-à-dire la fonction

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

et soit $G :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ x & \longmapsto & (G(U_1(x)), G(U_2(x)), \ldots) \end{array}$$

est mesurable est sa mesure image est la mesure $\gamma^{\otimes \mathbb{N}}$.