# Résumé des cours de MM1 donnés

Frédéric Hélein

Année universitaire 2011-2012

## 1 Mercredi 21 septembre

J'ai commencé les nombres complexes : j'ai d'abord brièvement rappelé les nombres entiers, rationnels et réels. Pour les réels j'ai rappelé les propriétés de l'addition et de la multiplication (associativité, commutativité, élément neutre, inverse, distributivité...). Puis j'ai introduit les complexes "à la main", en incorporant "$i$" dans la sauce. J'ai expliqué comment additionner et multiplier dans les complexes, la conjugaison complexe, l'inverse, le module, la représentation géométrique sur un plan. J'ai terminé en résolvant les équations du second ordre à coefficients réels.

## 2 Vendredi 23 septembre

Nombres complexes (suite) J'ai montré deux propriétés sur le module d'un nombre complexe :

$$|z||z'| = |z||z'|, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

et j'ai illustré l'inégalité géométrique sur un dessin.

Puis j'ai montré la décomposition d'un nombre complexe sous la forme du produit de son module par un nombre complexe de module égal à 1.

J'en suis donc arrivé à l'étude des nombres complexes de module égal à 1 et le lien avec la trigonométrie : j'ai défini l'argument d'un tel nombre, montré la formule de produit (les angles s'ajoutent), défini l'exponentielle de i fois un angle. Puis j'ai montré la formule de Moivre et expliqué comment l'appliquer au calcul de $\cos n\theta$, etc. (avec une courte parenthèse sur la formule du binôme et les coefficients binômiaux). Finalement j'ai traité la résolution de l'équation $z^n = 1$ (racines $n$-ième de l'unité).

## 3 Mercredi 28 septembre

J'ai terminé le chapitre sur les nombres complexes, d'abord en présentant les racines $n$-ième d'un nombre complexe, puis comment résoudre une équation du second degré avec des coefficients complexes.

Ensuite j'ai parlé de certains liens avec la géométrie du plan :
- comment écrire l'équation d'une droite, d'un cercle sous la forme d'une équation sur les variables complexes ;
- les transformations homographiques complexes ;
- l'image d'une droite ou d'un cercle par une transformation homographique est un cercle ou une droite.

## 4 Vendredi 30 septembre

J'ai commencé le chapitre sur les ensembles et les applications. Je n'ai parlé que des ensembles :

Définition d'un ensemble, d'un élément, d'un sous-ensemble, réunion, intersection, ensemble vide, inclusion, complémentaire, propriétés de commutativité, associativité et distributivité pour les opérations de réunion et intersection, loi de Morgan. Représentation par des diagrammes et lien avec le langage de la logique.

## 5 Mercredi 5 octobre

J'ai terminé la présentation des ensembles : définition d'un ensemble de cardinal fini et du cardinal d'un tel ensemble. Puis j'ai défini l'ensemble des parties d'un ensemble et le produit cartésien de deux ensembles et sa représentation graphique. J'ai présenté quelques propriétés du produit cartésien (avec les opérations de réunion et d'intersection).

Ensuite je suis passé aux applications entre ensembles : définition d'un ensemble, de son graphe et de la représentation graphique du graphe. J'ai défini l'application identité, la composition de deux applications, montré que cette opération est associative. J'ai terminé avec les définitions des applications injectives, surjectives ou bijectives.

## 6 Vendredi 7 octobre

J'ai continué ma présentation sur les applications, en montrant qu'être surjectif et injectif équivaut à être bijectif. J'ai défini l'application inverse ou réciproque d'une bijection. J'ai présenté des exemples pour illustrer les notions de surjection et d'injection. Puis je suis revenu sur les ensembles finis en donnant une nouvelle définition du cardinal en terme de bijection avec l'ensemble $\{1, ..., n\}$. J'ai défini également les ensembles dénombrables (avec des exemples et des contre-exemples). J'ai montré ensuite que l'ensemble des parties d'un ensemble $E$ est en bijection avec l'ensemble des applications de $E$ vers $\{0, 1\}$ et j'en ai déduit que son cardinal est $2^{\mathrm{Card}(E)}$. A la fin j'ai défini l'image directe et l'image inverse d'une partie par une application et expliqué comment se comportent les opérations d'inclusion, réunion et intersection vis des images directes et inverse (avec un topo spécial sur l'intersection).

## 7 Mercredi 12 octobre

J'ai commencé les "fonctions polynômes", j'en ai donné la définition sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). (J'ai mentionné rapidement l'existence de la notion de "polynômes", plus abstraite et à laquelle j'emprunte la notation $\mathbb{K}[X]$ pour noter l'ensemble des fonctions polynômes.) J'ai montré que la somme et le produit de deux polynômes sont des polynômes, explicité ces opérations et calculé le degré de la somme ou du produit de deux polynômes, ainsi que le coefficient du terme dominant. J'ai présenté de même la composition de deux polynôme, montré que c'était un polynôme, dont j'ai calculé le degré. Ensuite j'ai commencé à parler de racine d'un polynôme. J'ai défini cette notion, et annoncé que j'allais montrer qu'une valeur $\lambda$ est racine d'un polynôme $P$ ssi on peut factoriser $P$ avec $x - \lambda$ comme facteur et je me suis arrêté après un petit lemme préliminaire.

## 8 Vendredi 14 octobre

J'ai démontré que, pour tout polynôme $P$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda$ est racine de $P$ ssi $P$ se factorise et l'un des facteurs est $x - \lambda$. J'ai défini en même temps l'ordre d'une racine.

Ensuite j'ai commencé la continuité. J'ai donné la définition de la continuité d'une fonction en un point a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

J'ai passé pas mal de temps à décortiquer cette définition. Puis j'ai démontré que toute fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est continue partout.

A la fin j'ai mentionné que l'on peut définir la même notion pour des fonctions d'une variable complexe, que les polynômes complexes étaient continus et que la preuve était identique.

## 9 Mercredi 19 octobre

J'ai parlé de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle : j'ai donné la définition d'une fonction dérivable, présenté l'interprétation géométrique en terme de pente de la droite tangente. Puis, j'ai démontré que la somme et le produit de deux fonctions dérivables est dérivable (ces preuves m'ont demandé un certain temps). Enfin j'en ai déduit (à partir du calcul de la dérivée d'une fonction constante ou de la fonction $x \longmapsto x$) que les fonctions polynômes sont dérivables. J'ai terminé en expliquant qu'une fonction dont la dérivée est positive sur un intervalle est croissante et en commençant l'étude d'une fonction ($x^3 - 3x$), que je terminerai la prochaine fois.

## 10 Vendredi 21 octobre

J'ai terminé l'étude de l'exemple de fonction polynôme que j'avais commencé au cours précédent ($x^3 - 3x$). Puis j'ai expliqué comment étudier le signe d'un polynôme lorsqu'on connaît ses racines réelles avec leurs degrés de multiplicité (en mentionnant que c'est utile pour l'étude des fonctions). Ensuite j'ai montré que toute fonction polynôme est déterminée par les valeurs de toutes ses dérivées en 0, grâce à l'écriture sous forme d'un développement de Taylor. Puis j'ai expliqué la division euclidienne des polynômes sur un exemple et j'en ai donné deux applications : une nouvelle preuve du résultat de factorisation d'un polynôme par $x - \lambda$, si $\lambda$ est une racine et comment simplifier une fonction rationnelle.

## 11 Mercredi 26 octobre

J'ai commencé l'algèbre linéaire en abordant d'abord les systèmes de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues. J'ai d'abord traité un exemple simple pour $n = 2$, puis présenté la méthode générale du pivot de Gauss pour $n = 2$ et enfin pour $n$ quelconque. Puis j'ai traité deux exemples de systèmes $3 \times 3$ : l'un avec une unique solution, l'autre dépendant d'un paramètre et admettant soit zéro, soit une droite affine de solutions, selon les valeurs du paramètre. A la fin j'ai défini les matrices carrés $n \times n$ et les matrices colonnes à $n$ lignes et le produit d'une matrice carrée par une matrice colonne. J'ai montré comment un système pouvait s'écrire sous forme matricielle (note : les matrices ne sont pas au programme, mais j'en parle quand même, car ça n'est pas compliqué du tout).

## 12 Vendredi 28 octobre

J'ai présenté les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. J'ai commencé par définir l'addition et la multiplication par un scalaire réel dans $\mathbb{R}^n$. Puis j'ai défini les notions de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de sous-espace vectoriel engendré par une partie $A$ de $\mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{Vect}(A)$ (comme plus petit sous-espace vectoriel contenant $A$) et j'ai donné la caractérisation d'un sous-espace vectoriel engendré par une collection finie $v_1, \cdots, v_p$ de vecteurs sous la forme de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs. Puis j'ai défini une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel, une famille libre et une base. J'ai montré qu'une famille de vecteur est une base ssi elle est génératrice et libre. J'ai terminé en donnant l'exemple de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et quelques exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

## 13 Mercredi 2 novembre

J'ai démontré un certain nombre de résultats théoriques sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Le premier que, dans un sous-espace vectoriel $E$, si on a une famille libre et une famille génératrice, alors on a l'alternative suivante :

- soit on peu agrandir la famille libre en y ajoutant un vecteur pioché dans la famille génératrice ;
- soit, si ça n'est pas possible, la famille libre est en fait une base de $E$.

J'en ai déduit le résultat que, dans un sous-espace vectoriel $E$, si on a une famille libre et une famille génératrice, alors le nombre de vecteurs dans la famille libre est inférieur ou égal à celui des vecteurs dans la famille génératrice. Le premier corollaire est que l'on peut définir la dimension d'un sous-espace vectoriel. J'ai conclu en montrant que, dans un sous-espace vectoriel $E$ de dimension $k$, toute famille libre qui comporte $k$ éléments ou toute famille génératrice qui comporte $k$ éléments est une base de $E$.

## 14 Vendredi 4 novembre

J'ai commencé par rappeler le dernier résultat de la séance précédente (pour une famille à $k$ éléments dans un sous-espace vectoriel de dimension $k$, "libre" ou "générateur" entraîne "base"). J'ai donné comme corollaire : si $E$ et $F$ sont deux sous-espaces vectoriels, alors :
a) [ $E \subset F$ ] entraîne que [ $\dim E \leq \dim F$ ]
b) [ $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$ ] entraîne que [ $E = F$ ].
Ensuite j'ai commencé à explorer les applications de tous ces résultats théoriques :

- j'ai énuméré les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- j'ai écrit l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ (mais je n'ai pas encore défini "hyperplan") et j'ai montré que, si l'équation est non trivial, alors la dimension de l'hyperplan est $< n$ (en disant qu'on verra plus tard que sa dimension est $n-1$)
- j'ai étudié les solutions de l'équation $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, montré que, si $(a_1, a_2)$ est non nul, c'est une droite vectorielle dont une base est $(-a_2, a_1)$
- j'ai étudié les solutions de $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, montré que, si $(a_1, a_2, a_3)$ est non nul c'est un plan vectoriel et il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants dans ce plan pour en avoir une base. J'ai terminé par un exemple d'une telle équation.

## 15 Mercredi 9 novembre

J'ai fait un récapitulatif sur la résolution des systèmes linéaires, en travaillant sur les systèmes de deux équations à deux inconnues, en présentant la discussion d'un point de vue algébrique (pivot) et géométrique à la fois et en comparant les deux points de vue.

Les sous-espaces affines étant apparus naturellement comme espaces des solutions d'un système, j'ai donné la définition suivante d'un sous-espace affine : un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine associé au sous-espace vectoriel $\vec{E}$ si, $x$ étant fixé dans $E$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $y$ est dans $E$ ssi $y - x$ est dans $\vec{E}$. Puis j'ai expliqué qu'un sous-espace affine est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires (non homogènes en général).

A la fin j'ai donné la définition d'un hyperplan vectoriel et j'ai montré que l'espace des solution d'une équation linéaire homogène à $n$ inconnues (et à coefficients non triviaux) est un hyperplan vectoriel. J'ai introduit et utilisé pour le cela le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour clore le chapitre sur l'algèbre linéaire, il me reste à parler des déterminants $2 \times 2$ et du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

## 16 Mercredi 16 novembre

J'ai terminé l'algèbre linéaires avec deux notions : le déterminant $2 \times 2$ et le produit vectoriel de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Pour le déterminant, je l'ai d'abord défini pour un système de deux équations à deux inconnues, en montrant que le système admet une unique solution ssi le déterminant est non nul. Puis j'ai défini le déterminant de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, montré que ce déterminant est non nul ssi le système des deux vecteurs est une base de $\mathbb{R}^2$ et fait le lien entre les deux notions (déterminant d'un système ou d'un couple de vecteurs). J'ai donné l'interprétation géométrique du déterminant (aire du parallélogramme) sans preuve. Pour le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace, j'ai donné la définition et expliqué (sans preuve) qu'il est orthogonal aux deux vecteurs dont on part. J'ai montré que cela permet ainsi d'obtenir l'équation d'un plan dans l'espace en partant de deux vecteurs qui l'engendrent.

A la fin j'ai abordé la théorie des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, mais je me suis borné à rappeler les propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$ : structure de corps (sans prononcer ce mot), relation d'ordre et propriété archimèdienne.

## 17 Vendredi 18 novembre

J'ai présenté la propriété des segments emboîtés pour $\mathbb{R}$. J'ai expliqué que cette propriété n'était pas vraie dans $\mathbb{Q}$ (en prenant l'exemple de la suite de segments $[a_n, b_n]$, où $a_0 = 2$, $a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$ et $b_n = 1/a_n$, dont l'intersection se réduit à $\{\sqrt{2}\}$, je n'ai pas détaillé la preuve de cela, j'ai juste montré rapidement que racine de 2 était irrationnel). Puis j'ai montré en utilisant cette propriété que tout ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, avec le corollaire que toute suite de réels croissante et majorée converge.

## 18 Mercredi 23 novembre

J'ai commencé à vraiment parler des fonctions continues. En préliminaire, j'ai rappelé la définition d'une suite de réels convergente et la définition de la continuité d'une fonction (déjà vue à l'occasion de l'étude des fonctions polynômes) et j'ai rappelé quelques propriétés élémentaires (une suite convergente est bornée, l'image d'une suite convergente par une fonction continue en la limite de la suite est une suite convergente).

Puis, plat de résistance de la séance, j'ai énoncé et démontré le théorème des valeurs intermédiaires. J'ai ensuite montré, comme exemple d'application, qu'une fonction polynôme de degré impair sur $\mathbb{R}$ admet s'annule au moins en un point.

Enfin j'ai terminé en énonçant le théorème que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et que son suprémum sur cet intervalle est atteint. Je démontrerai ce résultat à la prochaine séance.

## 19 Vendredi 25 novembre

J'ai énoncé et montré le théorème suivant sur les fonctions continues : Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors $f$ est bornée et atteint son suprémum et son infimum. J'ai expliqué sur quelques exemples que les hypothèses (l'intervalle est fermé, la fonction est continue) sont indispensables pour que le théorème puisse s'appliquer.

Puis j'ai abordé les fonctions monotones : j'ai défini les fonctions croissantes et décroissantes, strictement croissantes et décroissantes. J'ai énoncé le théorème suivant : Toute fonction strictement monotone continue sur un intervalle est une bijection vers son image. De plus la fonction inverse est strictement monotone.

J'ai présenté presque toute la preuve de ce théorème, sauf la dernière assertion, qui dit que la fonction inverse est continue. Je montrerai ce point mercredi prochain.

## 20 Mercredi 30 novembre

J'ai terminé la preuve du théorème selon lequel toute fonction continue strictement monotone est bijective et son inverse est continue et strictement monotone. Comme exemple d'application de ce résultat, j'ai défini les fonctions Arcsin et Arctg et dessiné leurs graphes.

Puis j'ai fait quelques petits compléments sur :
- définition de la limite d'une fonction en un point (rappel) ;
- la limite d'une fonction majorée par une constante est majorée par cette constante ;
- toute fonction majorée et croissante sur un intervalle admet une limite à droite de l'intervalle.

Enfin j'ai donné la définition d'une fonction dérivable en un point (et présenté diverses variantes de cette définition).

## 21 Vendredi 2 décembre

J'ai parlé des fonctions dérivables. J'en avais donné la définition la dernière fois. J'ai énoncé les propriétés de bases : combinaisons linéaires, produit (Leibniz), inverse, fraction, composition de fonctions dérivables, avec les formules.

Puis j'ai abordé le lien entre monotonie et signe de la dérivée. J'ai commencé par montrer qu'une fonction dérivable croissante (resp. décroissante) a une dérivée positive (resp. négative) et qu'en un point intérieur où la fonction atteint un maximum ou un minimum local, la dérivée s'annule.

Enfin j'ai énoncé et montré le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.

## 22 Mercredi 7 décembre

Ayant montré le théorème des accroissements finis à la séance précédente, j'en ai présenté quelques applications : toute fonction dérivable dont la dérivée est positive partout (resp. strictement positive) est croissante (resp. strictement croissante), toute fonction dérivable dont la dérivée est bornée est lipschitzienne (sans avoir prononcé ce mot), etc. Puis j'ai montré que toute fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive est une bijection, que son inverse est dérivable et j'ai calculé la dérivée de la fonction inverse.

Ensuite j'ai abordé l'étude de certaines fonctions importante. J'ai d'abord définie la fonction log (comme primitive de $1/x$ s'annulant en 1) et j'ai montré certaines propriétés (comme $\log(xy) = \log x + \log y$). Puis j'ai construit la fonction exponentielle comme étant l'inverse de log et j'ai donc utilisé au passage les résultats théoriques vus précédemment. J'ai montré la loi $e^{x+y} = e^x e^y$ et j'ai terminé en définissant la puissance réelle de n'importe quel réel strictement positif.

Au passage, j'ai évoqué l'intégrale (mais c'est hors programme).

## 23 Vendredi 9 décembre

J'ai continué à parler de la fonction exponentielle. J'ai montré que cette fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$ et même qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance de la variable. Puis j'ai défini les fonctions cosinus et sinus hyperboliques et calculé leurs dérivées. Ensuite j'ai abordé la fonction sinus. J'ai montré géométriquement que le rapport $\sin x/x$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers 0, puis j'en ai déduit que la dérivée de sin est cos, la dérivée de cos est $-\sin$ et la dérivée de tg est $1 + \mathrm{tg}^2$. J'ai terminé en revenant à la fonction Arcsin et en montrant que sa dérivée est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.