Compléments sur les séries

1 Le développement décimal d'un nombre réel

1.1 La fonction « partie entière »

Nous partons de la propriété suivante : pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq a < n+1$. Une autre caractérisation de cet entier n est qu'il est le plus grand entier relatif contenu dans $]-\infty, a]$.

Définition — *On appelle* **partie entière de** a *l'entier relatif noté* $E(a)$ *et défini par*

$$E(a) \leq a < E(a) + 1. \tag{1}$$

1.2 Le développement décimal d'un nombre réel

Soit $a \in \mathbb{R}$, considérons la suite de nombres rationnels

$$u_n = \frac{E(10^n \cdot a)}{10^n}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple, si $a = \pi$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ u_1 & = & 3,1 \\ u_2 & = & 3,14 \\ u_3 & = & 3,141 \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

On voit sur l'exemple choisi que cette suite approche la valeur de a de façon de plus en plus fine par des nombres décimaux. Vérifions cela plus en détail en étudiant les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2.1 u_n est croissante

En effet l'inégalité $E(10^n \cdot a) \leq 10^n \cdot a$ entraîne

$$10 \cdot E(10^n \cdot a) \leq 10^{n+1} \cdot a.$$

Mais comme le plus grand entier qui est plus petit ou égal à $10^{n+1} \cdot a$ est $E(10^{n+1} \cdot a)$, on en déduit que

$$10 \cdot E(10^n \cdot a) \leq E(10^{n+1} \cdot a).$$

Divisant par 10^{n+1}, on obtient

$$\frac{E(10^n \cdot a)}{10^n} \leq \frac{E(10^{n+1} \cdot a)}{10^{n+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \leq u_{n+1}. \tag{2}$$

1.2.2 u_n fournit un encadrement de a de plus en plus fin

En effet, toujours à cause de (1), on a $E(10^n \cdot a) \leq 10^n \cdot a < E(10^n \cdot a) + 1$ et donc, en divisant par 10^n,

$$u_n \leq a < u_n + \frac{1}{10^n}. \tag{3}$$

On voit au passage que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par a et donc, comme elle est croissante, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans (3), on obtient

$$\ell \leq a \leq \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell = a.$$

Mais on a mieux : en utilisant encore (1) (une fois pour $10^{n+1} \cdot a$, une fois pour $10^n \cdot a$), on a

$$E(10^{n+1} \cdot a) \leq 10^{n+1} \cdot a = 10 \cdot (10^n \cdot a) < 10 \cdot (E(10^n \cdot a) + 1) = 10 \cdot E(10^n \cdot a) + 10.$$

Mais comme les valeurs aux deux extrémités dans cette suite de relations sont des *entiers*, cela signifie que $E(10^{n+1} \cdot a) \leq 10 \cdot E(10^n \cdot a) + 9$. Donc en divisant par 10^{n+1},

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{9}{10^{n+1}}. \tag{4}$$

1.2.3 Une série associée à a

Posons $a_0 = u_0 = E(a)$ et

$$a_n = u_n - u_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

On voit que a_0 peut être a priori un entier relatif quelconque, et que $a_n = \frac{E(10^n \cdot a) - 10 \cdot E(10^{n-1} \cdot a)}{10^n} = \frac{d_n}{10^n}$, où d_n est a priori un entier relatif. Mais les inégalités (2) et (4) entraînent

$$0 \leq a_n \leq \frac{9}{10^n}, \quad \forall n \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d_n \in [\![0, 9]\!], \quad \forall n \geq 1.$$

Donc, à partir du rang $n = 1$, la *suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **positive** et **majorée** par la suite $\left(\frac{9}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

A présent considérons la *série de terme général* a_n : cela consiste à associer à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Les théorèmes du cours[1] nous garantissent que cette série est *convergente*, c'est à dire que la suite des sommes partielles s_n converge (en utilisant notament le fait que la série géométrique de raison $\frac{1}{10}$ est convergente, ce qui entraîne que la série $9 \cdot \sum \frac{1}{10^n}$ est convergente). En fait, il est immédiat que

$$s_n = a_0 + \sum_{j=1}^{n} u_j - u_{j-1} = u_n$$

et donc que la limite de s_n est

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

[1] Exercice : lesquels ?

Nous en déduisons l'écriture

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

notée dans la vie courante sous la forme du développement décimal

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \cdots .$$

Exercice pour réfléchir : montrer que le cas où $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$, $d_n = 9$ ne se produit jamais (indication : montrer que si cela était vrai alors $a = a_0 + \left(\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{d_j}{10^j}\right) + \frac{d_{n_0}+1}{10^{n_0}}$).

2 Produit de deux séries absolument convergentes

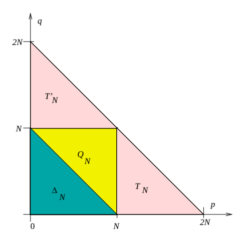
Théorème — *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *et soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de terme général*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{p+q=n} a_p b_q, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supposons que les séries de terme général a_n *et* b_n *sont* **absolument convergentes**, *alors la série de terme général* c_n *est aussi absolument convergente et, de plus*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \tag{5}$$

Preuve — Nous poserons $A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ et $B = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ et nous considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: pour tout $N \in \mathbb{N}$,
- $\Delta_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | \, p + q \leq N\}$
- $Q_N = [\![1, N]\!]^2$
- $T_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | \, p > N, p + q \leq 2N\}$
- $T'_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | \, q > N, p + q \leq 2N\}$



a) Montrons d'abord que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est absolument convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} |c_n| &= \sum_{n=0}^{N} |\sum_{p+q=n} a_p b_q| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{p+q=n} |a_p||b_q| \\
&= \sum_{(p,q)\in\Delta_N} |a_p||b_q| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in Q_N} |a_p||b_q| \\
&= \left(\sum_{p=0}^{N} |a_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{N} |b_q|\right) \leq AB.
\end{aligned}$$

Et comme $|c_n| \geq 0$ cela prouve que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ converge, c'est à dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est absolument convergente.
b) Etablissons à présent la relation (5). Noter qu'il s'agit de montrer qu'une certaine limite $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n)$ est égale à un produit de deux limites. Pour cela, nous choisissons $N \in \mathbb{N}$ et évaluons

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{p=0}^{N} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{N} b_q\right)\right| &= \left|\sum_{(p,q)\in\Delta_{2N}} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in Q_N} a_p b_q\right| \\
&= \left|\sum_{(p,q)\in T_N} a_p b_q + \sum_{(p,q)\in T'_N} a_p b_q\right| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in T_N} |a_p||b_q| + \sum_{(p,q)\in T'_N} |a_p||b_q| \\
&\leq \left(\sum_{p=N+1}^{2N} |a_p|\right)\left(\sum_{q=1}^{N} |b_q|\right) + \left(\sum_{p=1}^{N} |a_p|\right)\left(\sum_{q=N+1}^{2N} |b_q|\right) \\
&\leq \left(\sum_{p=N+1}^{\infty} |a_p|\right) B + A \left(\sum_{q=N+1}^{\infty} |b_q|\right).
\end{aligned}$$

Or la dernière quantité tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2N} c_n = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{p=0}^{N} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{N} b_q\right) = \left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{N} a_p\right)\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{q=0}^{N} b_q\right).$$

Noter que, puisque $\lim_{N\to+\infty} c_{2N+1} = 0$ (exercice : le démontrer), on a aussitôt $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2N+1} c_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2N} c_n$. On en déduit (5).

Exemple : si $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ et $b_n = \frac{\beta^n}{n!}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!}$ sont absolument convergentes pour toutes les valeurs de α et β. De plus on calcule que $c_n = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$. On en déduit que, si on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

alors $f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta)$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$.

3 Un résultat hors programme : le théorème de resommation de Riemann

Ce résultat dit que, si une série est **absolument convergente**, alors l'ordre dans lequel on somme ne change pas le résultat.
Théorème — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ soit absolument convergente, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$, alors, pour toute bijection $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)}$ est absolument convergente et*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \tag{6}$$

Preuve — Observons d'abord que, en posant $m = \phi(n)$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |u_{\phi(n)}| \leq \sum_{m=0}^{\sup \phi([\![0,N]\!])} |u_m| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |u_m| < \infty,$$

ce qui entraîne le fait que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)}$ est absolument convergente. Prouvons maintenant (6) : fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{m=M+1}^{\infty} |u_m| < \varepsilon$. Alors, comme ϕ est une bijection il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $[\![0, M]\!] \subset \phi([\![0, N]\!])$ (il suffit de prendre pour N le suprémum de l'ensemble fini $\phi^{-1}([\![0, M]\!])$) et donc à partir de la décomposition

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)} = \sum_{m=0}^{M} u_m + \sum_{0 \leq n \leq N;\, \phi(n) \geq M+1} u_{\phi(n)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\sum_{m=0}^{\infty} u_m - \sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)}| &= |\sum_{m=M+1}^{\infty} u_m - \sum_{0 \leq n \leq N;\, \phi(n) \geq M+1} u_{\phi(n)}| \\ &= |\sum_{M+1 \leq m;\, m \notin \phi([\![0,N]\!])} u_m| \leq \sum_{m=M+1}^{\infty} |u_m| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien (6).

Notons que, dans ce résultat, l'hypothèse que la série est absolument convergente est vraiment capitale. Le résultat suivant, assez spectaculaire mais plus difficile, prouve en effet que l'addition des termes dans les séries convergentes mais non absolument convergentes n'est pas commutative !

4 Un résultat hors programme et difficile

Théorème — *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est* **convergente** *mais* **non absolument convergente**. *Alors, pour* **n'importe quelle** *valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\phi(n)}$ soit convergente et telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\phi(n)} = \lambda.$$

Remarque : on a choisi une suite définie sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour alléger les notations dans la suite. *Preuve* — Soit $u_n^+ = \sup(0, u_n)$ et $u_n^- = -\inf(0, u_n)$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$. Commençons par remarquer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ divergent toutes les deux, puisque si par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ convergeait, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergerait, ce qui est contradictoire (même raisonnement pour $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$).

L'idée est alors que l'on dispose d'« un réservoir infini de termes positifs » ($\sum u_n^+$) et d'« un réservoir infini de termes négatifs » ($\sum u_n^-$) et que l'on peut piocher alternativement dans un des réservoirs. Voyons la mise en oeuvre de cette idée, qui est un peu délicate à écrire.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* | \, u_n \geq 0\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}^* | \, u_n < 0\}$. On a $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$ et de plus ces deux ensembles sont infinis dénombrables (à cause de $\sum_{n \in A} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty$ et $\sum_{n \in B} u_n = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty$). Soit $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow A$ et $\beta : \mathbb{N}^* \longrightarrow B$ les uniques bijections monotones croissantes entre les ensembles considérés. Supposons pour fixer les idées que $\lambda > 0$. On considère

$$p_1 = \inf\{p \in \mathbb{N}^* | \sum_{i=1}^{p} u_{\alpha(i)} > \lambda\}.$$

Cette valeur est finie puisque $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty$. On pose alors

$$\phi(i) = \alpha(i), \quad \forall i \in [\![1, p_1]\!].$$

Puis on considère

$$q_1 = \inf\{q \in \mathbb{N}^* | \sum_{i=1}^{p_1} u_{\alpha(i)} + \sum_{j=1}^{q} u_{\beta(j)} < \lambda\}$$

et on pose

$$\phi(p_1 + j) = \beta(i), \quad \forall j \in [\![1, q_1]\!].$$

On continue : on pose

$$p_2 = \inf\{p \in \mathbb{N}^* | \sum_{i=1}^{p_1} u_{\alpha(i)} + \sum_{j=1}^{q_1} u_{\beta(j)} + \sum_{i=1}^{p} u_{\alpha(p_1+i)} > \lambda\}$$

et

$$\phi(p_1 + q_1 + i) = \alpha(p_1 + i), \quad \forall i \in [\![1, p_2]\!], \text{ etc.}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = +\infty$, on voit qu'il est possible de continuer cette construction indéfiniment et que l'application ϕ ainsi construite est une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $A \cup B = \mathbb{N}^*$. Pour une valeur de $N \in \mathbb{N}^*$ de la forme $N = p_1 + q_1 + \cdots + p_s + q$, où $q \in [\![1, q_s]\!]$ alors

$$\sum_{n=1}^{N} u_{\phi(n)} = \sum_{i=1}^{p_1} u_{\alpha(i)} + \sum_{j=1}^{q_1} u_{\beta(j)} + \cdots + \sum_{i=1}^{p_s} u_{\alpha(p_1+\cdots+p_{s-1}+i)} + \sum_{j=1}^{q} u_{\beta(q_1+\cdots+q_{s-1}+j)}.$$

Pour une valeur de $N \in \mathbb{N}^*$ de la forme $N = p_1 + q_1 + \cdots + p_s + q_s + p$, où $p \in [\![1, p_{s+1}]\!]$ alors

$$\sum_{n=1}^{N} u_{\phi(n)} = \sum_{i=1}^{p_1} u_{\alpha(i)} + \sum_{j=1}^{q_1} u_{\beta(j)} + \cdots + \sum_{i=1}^{p_s} u_{\alpha(p_1+\cdots+p_{s-1}+i)} + \sum_{j=1}^{q_s} u_{\beta(q_1+\cdots+q_{s-1}+j)} + \sum_{i=1}^{p} u_{\alpha(p_1+\cdots+p_s+i)}.$$

Il reste à prouver la convergence de $\sum_{n=1}^{N} u_{\phi(n)}$ vers λ. Supposons par exemple que $N = p_1 + q_1 + \cdots + p_s + q_s + p$, où $p \in [\![0, p_{s+1} - 1]\!]$. Alors

$$\sum_{n=1}^{N} u_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{p_1+q_1+\cdots+q_s} u_{\phi(n)} + R_N \leq \lambda, \tag{7}$$

où $R_N = 0$ si $p = 0$ et $R_N = \sum_{i=1}^{p} u_{\alpha(p_1+\cdots+p_s+i)}$ si $1 \leq p \leq p_{s+1} - 1$. L'inégalité dans (7) provient de la définition de p_{s+1}. On en déduit, en utilisant notament le fait que $R_N \geq 0$, que

$$|\lambda - \sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)}| = \lambda - \sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)} = \lambda - \sum_{n=1}^{p_1+q_1+\cdots+q_s} u_{\phi(n)} - R_N \leq \lambda - \sum_{n=1}^{p_1+q_1+\cdots+q_s} u_{\phi(n)}.$$

Et en utilisant cette fois-ci la définition de q_s (qui entraîne $\sum_{n=1}^{p_1+q_1+\cdots+q_s-1} u_{\phi(n)} \geq \lambda$) on obtient :

$$|\lambda - \sum_{n=0}^{N} u_{\phi(n)}| \leq \left(\lambda - \sum_{n=1}^{p_1+q_1+\cdots+q_s-1} u_{\phi(n)}\right) - u_{\phi(p_1+q_1+\cdots+q_s)} \leq -u_{\phi(p_1+q_1+\cdots+q_s)} = |u_{\phi(p_1+q_1+\cdots+q_s)}|.$$

On a une majoration du même type si $N = p_1 + q_1 + \cdots + p_s + q$, où $q \in [\![0, q_s - 1]\!]$. On voit donc que pour conclure il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = 0$. Cela est une conséquence du fait que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |u_n| < \varepsilon,$$

et du fait que ϕ est une bijection : en choisissant $n \geq \sup \phi^{-1}([\![1, N]\!])$, on a alors $\phi(n) \geq N$, ce qui entraîne que $|u_{\phi(n)}| < \varepsilon$.