Examen du jeudi 30 septembre 2004 — durée : 3 heures

Notations : (i) On rappelle que le produit extérieur de la p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ par la q-forme $\beta \in \Lambda^q V^*$ est donné par $\forall v_1, \cdots, v_{p+q}$,

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots v_{\sigma(p+q)}).$$

(ii) pour toute p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et pour tout vecteur $X \in V$, on note $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$ la $(p-1)$-forme définie par

$$\forall X_2, \cdots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \cdots, X_p) = \alpha(X, X_2, \cdots, X_p).$$

On appelle « produit intérieur de α par X » la $(p-1)$-forme $X \lrcorner \alpha$.

1 Un peu d'algèbre multilinéaire

Dans ce problème $\alpha \in V^*$ est une 1-forme et $\gamma \in \Lambda^2 V^*$ est une 2-forme.
a) Montrer que $\forall u, v, w \in V$ l'expression $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$ peut se simplifier comme la somme de trois termes.
b) Soit $\alpha \in V^*$ une 1-forme *non nulle*. On note H le noyau de α. Montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $\alpha(u) = 1$. Ce vecteur u est-il unique ?
c) On suppose dans cette question et dans la suite que $\alpha \wedge \gamma = 0$. Montrer que la restriction de γ à H est nulle (i.e. $\forall v, w \in H$, $\gamma(v, w) = 0$).
d) On note $\beta = u \lrcorner \gamma$, où u a été introduit à la question b). Montrer que $\gamma = \alpha \wedge \beta$.

2 Le lemme de Cartan

Démontrer que, sur une variété $\mathcal{M}$, pour tout champs de vecteur X et Y sur $\mathcal{M}$ et pour toute 1-forme différentielle α sur $\mathcal{M}$,

$$d\alpha(X, Y) = L_X \alpha(Y) - L_Y \alpha(X) - \alpha([X, Y]). \tag{1}$$

3 Repère mobile orthonormé

Dans tout ce problème on pourra utiliser et admettre si nécessaire les relations (1), (2) et (3) dans certaines questions.

3.1 Cas général

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $U \subset \mathcal{M}$ un ouvert sur lequel est défini un « repère orthonormé mobile », c'est à dire n champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ $e_1, \cdots, e_n$ sur U tels que $\forall M \in \mathcal{M}$, $(e_1(M), \cdots, e_n(M))$ est une base orthonormée de $T_M\mathcal{M}$. On note

$(\alpha_M^1, \cdots, \alpha_M^n)$ la base duale et on définit ainsi n 1-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note ∇ la connexion de Levi-Civita sur $T\mathcal{M}$ et $\left(\omega_j^i\right)_{1\leq i,j\leq n}$ les formes de connexions, caractérisées par les relations

$$\nabla_u e_i = \omega_i^j(u) e_j, \quad \forall i \in [\![1, n]\!],$$

où u est un champ de vecteur quelconque.

a) Démontrer que $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$, $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$.

b) Démontrer que $\forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$,

$$\alpha^k([e_i, e_j]) = \omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j). \tag{2}$$

c) On définit le tenseur de courbure de Riemann R par la relation

$$R(u, v) \cdot w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w,$$

pour tous champs de vecteur u, v, w sur U. Montrer que $\forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$,

$$R(e_i, e_j) \cdot e_k = \left(d\omega_k^l + \omega_m^l \wedge \omega_k^m\right)(e_i, e_j) e_l. \tag{3}$$

3.2 Cas d'une surface

On suppose dorénavant que $\mathcal{M}$ est une surface, i.e. $\dim \mathcal{M} = n = 2$.

a) Trouver une expression des formes ω_j^i en fonction de e_1, e_2, α^1 et α^2.

b) Exprimer la « courbure de Gauss »

$$K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$$

en fonction des ω_j^i et de e_1 et e_2.

c) Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], U)$ une immersion telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = M_0$. Pour tout $\theta \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on définit une base orthonormée $(v_1(t), v_2(t))$ de $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ (dépendant de façon régulière de t) par

$$\begin{cases} v_1(t) &= \quad \cos\theta(t) e_1(\gamma(t)) + \sin\theta(t) e_2(\gamma(t)) \\ v_2(t) &= -\sin\theta(t) e_1(\gamma(t)) + \cos\theta(t) e_2(\gamma(t)). \end{cases}$$

Trouver une équation sur θ pour que l'on ait

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} v_1(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)} v_2(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

c'est à dire « v_1 et v_2 sont transportés parallèlement le long de γ ».

d) Résoudre cette équation en θ.

e) Soit $\mathcal{B} \subset U$ un domaine fermé dont le bord $\partial\mathcal{B}$ est régulier. On suppose que γ est une paramétrisation directe de $\partial\mathcal{B}$ (modulo le fait que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$). Donner une relation entre $\theta(0)$, $\theta(2\pi)$ et la valeur de $K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$ à l'intérieur de $\mathcal{B}$.

3.3 Usage de coordonnées conformes

On suppose toujours $n = 2$. On considère une carte locale $x = (x^1, x^2) : U \longrightarrow \Omega$, où U est un ouvert de $\mathcal{M}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. On fait l'hypothèse que x est *conforme*, c'est à dire qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $g_{ij}(x) = e^{2f(x)}\delta_{ij}$, $\forall x \in \Omega$. On demande de déterminer dans les coordonnées (x^1, x^2) :

a) un repère mobile orthonormé (e_1, e_2) (le plus simple possible)

b) le corepère mobile (α^1, α^2) dual du repère mobile (e_1, e_2).

c) Les formes de connexion ω_j^i dans ce même repère.

d) La courbure de Gauss $K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$.