

Géométrie euclidienne

# 1 Le groupe des isométries

## 1.1 Passer d'une base orthonormée à une autre

Commençons par le problème suivant : soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  une autre base de  $E$ . Soit  $P$  la matrice de passage de  $(e_1, \dots, e_n)$  à  $(u_1, \dots, u_n)$ , i.e.

$$(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n)P \iff u_j = \sum_{i=1}^n e_i P_{ij}.$$

Nous cherchons une condition **nécessaire et suffisante sur  $P$**  pour que  $(u_1, \dots, u_n)$  soit **aussi** une base orthonormée.

Pour cela notons  $A$  la matrice de la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (c'est à dire le produit scalaire!) dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$ . Alors la base  $u$  est orthonormée ssi  $A = 1_n$ . Or la théorie des formes quadratiques nous dit que  $A$  s'obtient à partir de la matrice de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$ , c'est à dire  $1_n$ , et de  $P$  par la relation

$$A = {}^t P 1_n P = {}^t P P.$$

Donc nous en déduisons la :

**Proposition 1** *Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée et si  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  à la base  $(u_1, \dots, u_n)$ , alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est orthonormée ssi*

$${}^t P P = 1_n.$$

*Remarque* — On peut aussi retrouver ce résultat directement : nous avons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n e_k P_{ki}, \sum_{\ell=1}^n e_\ell P_{\ell j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n P_{ki} P_{kj}.$$

On reconnaît à droite l'élément de la matrice  ${}^t P P$  situé à l'intersection de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne. Et donc  $(u_1, \dots, u_n)$  est orthonormée ssi  $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j$ , c'est à dire ssi  ${}^t P P = 1_n$ .

On note  $O(n) := \{P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t P P = 1_n\}$ .

**Lemme 1** *On a les deux propriétés suivantes :*

(a) *Si  $P \in O(n)$ , alors  $P$  admet un inverse qui appartient à  $O(n)$  et, plus précisément,  $P^{-1} = {}^t P$*

(b) *si  $P, P' \in O(n)$ , alors  $PP' \in O(n)$ .*

*Autrement dit  $O(n)$  est un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$ , c'est donc en particulier un groupe pour le produit des matrices.*

*Démonstration* — La première assertion, c'est à dire le fait que tout  $P \in O(n)$  est inversible, avec  ${}^tP$  comme inverse, est une conséquence immédiate de la définition de  $O(n)$ . La deuxième propriété pourrait être démontrée directement en prouvant que, si  ${}^tPP = 1_n$  et  ${}^tP'P' = 1_n$ , alors  ${}^t(P'P')(PP') = 1_n$  (Exercice : le faire!); mais nous allons l'établir par une autre méthode qui repose sur la caractérisation donnée par la proposition 1.

Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$  et soit  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  les deux autres bases de  $E$  telles que :

$$(u_1, \dots, u_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)P \quad \text{et} \quad (v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)P',$$

(c'est à dire  $P$  est la matrice de passage de  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  à  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $P'$  est la matrice de passage de  $(u_1, \dots, u_n)$  à  $(v_1, \dots, v_n)$ ). Alors on a, à cause de la proposition 1 :

- $P \in O(n)$  et  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  orthonormée  $\implies (u_1, \dots, u_n)$  est orthonormée
- $P' \in O(n)$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  orthonormée  $\implies (v_1, \dots, v_n)$  est orthonormée

Mais

$$(v_1, \dots, v_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)PP',$$

et donc, puisque  $(v_1, \dots, v_n)$  est orthonormée, on doit avoir  $PP' \in O(n)$  toujours à cause de la proposition 1.

**Définition 1** L'ensemble  $O(n) := \{P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^tPP = 1_n\}$ , muni du produit matriciel est le **groupe orthogonal** de dimension  $n$ .

## 1.2 Isométries

**Définition 2** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. On appelle **isométrie de  $E$**  tout endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(on dira alors que  $f$  préserve le produit scalaire). On note  $O(E)$  l'ensemble des isométries de  $E$ .

**Proposition 2**  $O(E)$  est un groupe pour la loi de composition  $\circ$ .

*Démonstration* — Nous devons montrer que :

- **toute isométrie  $f \in O(E)$  est inversible.** Pour cela, comme  $f$  est un endomorphisme, il suffit de montrer que  $f$  est injectif (ce qui entraîne automatiquement que  $f$  est surjectif), c'est à dire que  $\text{Ker } f = \{0\}$ . Or  $\forall x \in E, f(x) = 0$  entraîne que  $\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = \|0\|^2 = 0$ , donc que  $x = 0$
- **la composée de deux isométries est une isométrie.** C'est une conséquence très simple de la définition de  $O(E)$  et nous la laissons au lecteur à titre d'exercice.

### Caractérisation matricielle dans une base orthonormée

Soit  $f \in \text{End}(E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Alors, si  $f$  est une isométrie, il est clair que l'on a nécessairement

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle, \quad \forall i, j. \tag{1}$$

Mais (1) est aussi une condition suffisante car, si elle est satisfaite, on a :  $\forall x, y \in E$ ,

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle f \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right), f \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

et donc  $f$  est bien dans  $O(E)$ .

Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$ . Cherchons à quelle condition sur  $A$  on a  $f \in O(E)$ . En notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

on a

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}, \quad \forall j,$$

et

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n e_k a_{ki}, \sum_{\ell=1}^n e_\ell a_{\ell j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

Donc une **condition nécessaire et suffisante** pour que  $f$  soit une isométrie est (1), qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle &= \langle e_i, e_j \rangle, \quad \forall i, j \\ \iff \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} &= \delta_{ij}, \quad \forall i, j \\ \iff {}^t A A &= 1_n \\ \iff A &\in O(n). \end{aligned}$$

Nous en concluons que :

**Proposition 3** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ , si  $f \in \text{End}(E)$  et si  $A$  est la matrice de  $f$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $f \in O(E)$  ssi

$$A \in O(n), \quad \text{i.e.} \quad A A = 1_n.$$

### Petit récapitulatif des propriétés de $O(n)$

Nous avons vu que  $O(n)$  forme un groupe et, en particulier, toute matrice  $A \in O(n)$  est inversible, avec  $A^{-1} = {}^t A$ . Une autre propriété est capitale :

$$\forall A \in O(n), \quad 1 = \det(1_n) = \det({}^t A A) = (\det {}^t A) (\det A) = (\det A)^2.$$

Donc

$$\forall A \in O(n), \quad \det A = \pm 1.$$

Cela nous amène à définir :

**Définition 3** *L'ensemble*

$$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

est un sous-groupe de  $O(n)$ , appelé **groupe des rotations** de dimension  $n$ .

Nous devons justifier l'assertion faite dans la définition ci-dessus, à savoir que  $SO(n)$  est un sous-groupe de  $O(n)$ . Autrement dit, il faut montrer que :

1.  $\forall A \in SO(n)$ ,  $A$  admet un inverse dans  $SO(n)$  : cela provient de l'identité  $\det(A^{-1}) = \det({}^t A) = \det A$
2.  $\forall A, A' \in SO(n)$ ,  $AA' \in SO(n)$  : cela provient de l'identité  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .

**Etude d'un premier exemple : le groupe  $O(2)$** 

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2),$$

cherchons à analyser la relation  ${}^t AA = 1_2$ . Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

cela nous donne le système d'équations :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \text{(i)} \\ ab + cd = 0 & \text{(ii)} \\ b^2 + d^2 = 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

La relation (i) équivaut à :  $\exists \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Alors la relation (ii) nous donne :  $b \cos \theta + d \sin \theta = 0$ , donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mais alors la relation (iii) entraîne :  $\lambda^2 = 1$ , donc

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \lambda = \pm 1.$$

Il est alors intéressant de remarquer que  $\det A = ad - bc = \lambda$ . Ainsi

– si  $\det A = 1$ ,  $A \in SO(2)$  et, plus précisément,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ .

– si  $\det A = -1$ ,  $A \in O(2) \setminus SO(2)$  et, plus précisément

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

est la matrice<sup>1</sup> de la symétrie orthogonale dans  $\mathbb{R}^2$  d'axe la droite engendrée par

$$u = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , qui est en même temps une base orthonormée pour la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^2$

**Exercice** Démontrer que toute matrice  $A$  dans  $O(2)$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}^2$  et que : si  $\det A = 1$ ,  $A$  est seulement diagonalisable dans  $\mathbb{C}^2$ , avec les valeurs propres  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  ; si  $\det A = -1$ ,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}^2$ , avec les valeurs propres  $1$  et  $-1$ .

### 1.3 Diagonalisation des isométries

Nous allons étudier plus en détail la structure du groupe  $O(n)$  des isométries.

**Lemme 2** Soit  $A \in O(n)$ , alors, si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est aussi valeur propre de  $A$ . De plus les valeurs propres de  $A$  sont toutes de module égal à  $1$ .

*Démonstration* — Prenons une telle matrice d’isométrie  $A$  associons-lui l’endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Ax, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{C}^n$  est identifié avec l’ensemble des matrices colonnes avec  $n$  composantes complexes et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(i) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $f$ , alors  $\exists x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $x \neq 0$  et  $Ax = f(x) = \lambda x$ . Cela entraîne, en utilisant le fait que les éléments de la matrice  $A$  sont réels :

$$A\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

Cette identité nous indique donc que  $\bar{\lambda}$  est aussi valeur propre de  $f$  (avec le vecteur propre  $\bar{x}$ ). En particulier, si  $\lambda$  n’est pas réel, alors  $\bar{\lambda} \neq \lambda$ .

(ii) Utilisons à présent le fait que  ${}^tAA = 1_n$  : cela donne,  $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ,

$${}^t(\overline{Ax})Ax = {}^t(\overline{\lambda x})Ax = \overline{\lambda} \overline{x} {}^tAAx = \overline{\lambda} \overline{x} {}^tAAx = \overline{\lambda} \overline{x} 1_n x = \overline{\lambda} \overline{x} x.$$

Mais, si on suppose en plus que  $x$  est vecteur propre de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors

$${}^t(\overline{Ax})Ax = {}^t(\overline{\lambda x})\lambda x = \overline{\lambda} \overline{x} \lambda x = |\lambda|^2 \overline{x} x.$$

En comparant les deux identités, on en déduit que

$$\overline{\lambda} \overline{x} x = |\lambda|^2 \overline{x} x.$$

Et comme on peut déduire facilement de  $x \neq 0$  le fait que  $|x|^2 \neq 0$ , on conclut que  $|\lambda|^2 = 1$ . Donc  $\lambda$  a bien un module égal à  $1$ .

**Corollaire 1** Si  $A \in O(n)$  et si  $\lambda$  est une valeur propre **réelle** de  $A$ , alors  $\lambda = \pm 1$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre **non réelle** de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est une autre valeur propre de  $A$ .

**Lemme 3** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie  $n$ . Soit  $f \in O(E)$  une isométrie de  $E$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $f$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $f$ .

*Démonstration* — Rappelons que dire que «  $F$  est stable par  $f$  » signifie que :  $\forall x \in F, f(x) \in F$ . Observons maintenant que, puisque  $F$  est stable par  $f$  et

$$\forall x \in F, \quad \|f(x)\| = \|x\|,$$

la restriction  $f|_F$  de  $f$  à  $F$  est une isométrie de  $F$  dans  $F$ . Donc en particulier  $f|_F$  est inversible, i.e.  $\forall y \in F, \exists! x \in F$  tel que  $y = f(x)$ . A présent, soit  $a \in F^\perp$  quelconque et cherchons à montrer

que  $f(a) \in F^\perp$ , c'est à dire à montrer que  $\forall y \in F, \langle f(a), y \rangle = 0$ . D'après ce qui précède  $\exists x \in F, y = f(x)$ , donc

$$\langle f(a), y \rangle = \langle f(a), f(x) \rangle = \langle a, x \rangle = 0.$$

Donc  $f(a) \in F^\perp$ .

### Application : analyse de $O(\mathbb{R}^3)$

Travaillons dans  $\mathbb{R}^3$  muni de la structure euclidienne canonique : c'est celle qui est telle que la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  soit orthonormée. Soit  $f \in O(\mathbb{R}^3)$ .

**Première observation** : le polynôme caractéristique  $\det(f - \lambda 1_n)$  est un polynôme réel du troisième degré, donc il admet *au moins une* valeur propre réelle  $\lambda$ . Soit  $u$  le vecteur propre de  $f$  correspondant à cette valeur propre, i.e.

$$f(u) = \lambda u.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que  $\|u\| = 1$ . De plus, d'après le lemme 2 on sait que  $\lambda = \pm 1$ .

**Deuxième observation** : on note  $F := \mathbb{R}u$  la droite engendrée par  $u$ . Elle est bien évidemment stable par  $f$  et, d'après le lemme 3, le plan  $F^\perp = u^\perp$  est stable par  $f$ . Donc en fait la restriction  $f|_{u^\perp}$  de  $f$  à  $u^\perp$  est une isométrie de  $u^\perp$ . Soit  $(u_1, u_2)$  une base orthonormée de  $u^\perp$  et soit  $B$  la matrice de  $u^\perp$  dans  $(u_1, u_2)$ . Alors  $B \in O(2)$ . On peut donc appliquer l'analyse de  $O(2)$  faite précédemment.

**Synthèse** : notons d'abord que la famille  $(u_1, u_2, u)$  est une base orthonormée. La matrice de  $f$  dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \epsilon, \lambda = \pm 1.$$

Et on a alors  $\det A = \epsilon \lambda$ . On peut alors distinguer quatre cas selon les valeurs de  $\epsilon$  et de  $\lambda$ .

**Cas où  $\det A = 1$** , c'est à dire  $\epsilon = \lambda$

- **Si  $\epsilon = \lambda = 1$** , c'est à dire  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $f$  est une rotation d'angle  $\theta$ , d'axe la droite engendrée et orientée par  $u$ .
- **Si  $\epsilon = \lambda = -1$** , c'est à dire  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $f$  est la symétrie orthogonale autour de la droite engendrée par  $\cos \frac{\theta}{2} u_1 + \sin \frac{\theta}{2} u_2$  (ou encore la rotation d'angle  $\pi$  autour de cette même droite).

**Cas où  $\det A = -1$** , c'est à dire  $\epsilon = -\lambda$

- **Si  $\epsilon = -\lambda = -1$** , c'est à dire  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $f$  est la symétrie orthogonale autour du plan engendré par  $u$  et  $\cos \frac{\theta}{2} u_1 + \sin \frac{\theta}{2} u_2$ .
- **Si  $\epsilon = -\lambda = 1$** , c'est à dire  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $f$  est la composée de la symétrie orthogonale autour du plan engendré par  $(u_1, u_2)$  et d'une rotation dans ce plan, d'angle  $\theta$ .

## 2 Orientation d'un espace vectoriel

En préliminaire, rappelons la définition d'une *relation d'équivalence*.

**Définition 4** 1) Une **relation** dans un ensemble  $X$  est un sous-ensemble  $\mathcal{R}$  de  $X \times X$ . Si  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , on note «  $a\mathcal{R}b$  ».

2) Une relation  $\mathcal{R}$  dans un ensemble  $X$  est une **relation d'équivalence** ssi

–  $\mathcal{R}$  est **réflexive** :  $\forall a \in X, a\mathcal{R}a$

–  $\mathcal{R}$  est **symétrique** :  $\forall a, b \in X, \text{ si } a\mathcal{R}b \text{ alors } b\mathcal{R}a$ .

–  $\mathcal{R}$  est **transitive** :  $\forall a, b, c \in X, \text{ si } a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c, \text{ alors } a\mathcal{R}c$ .

3) Si  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $X$  et si  $a \in X$ , le sous-ensemble

$$[a] := \{b \in X \mid a\mathcal{R}b\}$$

est appelé la **classe d'équivalence de  $a$** .

**Proposition 4** Si  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dsur  $X$ , alors  $X$  est l'union disjointe de toutes les classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$ .

*Démonstration* — exercice!

En effet les classes d'équivalence sont utilisées pour « ranger » les éléments d'un ensemble  $X$  par « classes » d'éléments.

A présent soit  $E$  un *espace vectoriel réel* de dimension finie  $n$  et considérons

$$X := \{\text{bases de } E\}.$$

Notons que si  $e, e' \in X$ , alors la matrice de passage  $P$  de  $e$  à  $e'$  est inversible, donc en particulier a un déterminant non nul, c'est à dire : soit strictement positif, soit strictement négatif. Nous définissons sur  $X$  la relation suivante :

$$\text{si } e, e' \in X, \quad e\mathcal{R}e' \iff \det P > 0.$$

**Proposition 5**  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

*Démonstration* : exercice.

Il est en fait facile de voir qu'il n'y a que deux classes d'équivalence : si on choisit une base  $e_0 \in X$ , alors pour toute autre base  $e \in X$ , si  $P$  est la matrice de passage de  $e_0$  à  $e$ , on a soit  $\det P > 0$ , auquel cas  $e \in [e_0]$ , soit  $\det P < 0$  et alors  $[e_0] \cap [e] = \emptyset$ , mais  $X = [e_0] \cup [e]$ .

**Le choix d'une orientation sur  $E$**  : cela revient à choisir une des deux classes d'équivalence comme « référence ». On note  $X_+$  la classe ainsi sélectionnée. Les bases qui sont dans  $X_+$  sont appelées **bases directes de  $E$** . On dit alors que  $E$  est **orienté**. On remarque que, pour préciser l'orientation de  $E$ , il suffit de connaître une seule base dans  $X_+$ .

### Cas d'un espace euclidien

On suppose à présent que  $E$  est euclidien et on définit :

$$X^{ortho} := \{\text{bases orthonormées de } E\} \subset X.$$

Nous restreignons la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  à  $X^{ortho}$  : cela nous donne une relation d'équivalence, que nous noterons encore  $\mathcal{R}$ . Si  $e, e' \in X^{ortho}$ , la matrice de passage  $P$  de  $e$  à  $e'$  est

forcément dans  $O(n)$ , donc a un déterminant égal à  $\pm 1$ . Ainsi la restriction de  $\mathcal{R}$  à  $X^{ortho}$  est définie par :

$$\forall e, e' \in X^{ortho}, \quad e\mathcal{R}e' \iff \det P = 1.$$

Alors  $X^{ortho}$  se divise en deux classes  $X_+^{ortho} := X^{ortho} \cap X_+$  et  $X_-^{ortho} := X^{ortho} \cap X_-$ . A nouveau, orienter  $E$  revient à sélectionner l'une de ces deux classes, que l'on a choisit de noter  $X_+^{ortho}$ . Alors  $X^{ortho} = X_+^{ortho} \cup X_-^{ortho}$ . Enfin on dira qu'une base  $e \in X_+^{ortho}$  est **orthonormée directe**.

### 3 Produit mixte et produit vectoriel

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, X_+^{ortho})$  un *espace vectoriel euclidien orienté* de dimension  $n$  et soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une **base directe** de  $E$ . Pour tout  $n$ -uplet  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E^n$ , soit  $M$  la matrice de passage de  $e$  à  $(v_1, \dots, v_n)$ , i.e. telle que

$$(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)M.$$

**Définition 5** On pose

$$(v_1, \dots, v_n)_e := \det M$$

et on appelle cette quantité le **produit mixte** des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .

Ainsi on a défini une notion de « produit » de  $n$  vecteurs, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . En apparence il se pourrait que ce produit dépende du choix de la base, mais ...

**Proposition 6** L'application  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n)_e$  est indépendant du choix de la base  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , **pourvu que  $e$  soit orthonormée et directe**.

Autrement dit le produit mixte ne dépend que de la structure euclidienne et de l'orientation choisie sur  $E$ .

*Démonstration* — Soit  $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  une autre base orthonormée et directe et soit  $P$  la matrice de passage de  $e$  à  $\tilde{e}$ . Alors  $P \in SO(n)$ . Comment est défini  $(v_1, \dots, v_n)_{\tilde{e}}$ ? à partir de la matrice  $\tilde{M}$  de passage de  $\tilde{e}$  à  $(v_1, \dots, v_n)$  par la relation  $(v_1, \dots, v_n) = \tilde{e}\tilde{M}$ . Cela entraîne :

$$eM = (v_1, \dots, v_n) = \tilde{e}\tilde{M} = eP\tilde{M} \implies M = P\tilde{M}.$$

Donc  $\det M = \det(P\tilde{M}) = (\det P)(\det \tilde{M}) = \det \tilde{M}$ , car  $\det P = 1$ , puisque<sup>2</sup>  $P \in SO(n)$ .

**Conséquence** : puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera

$$(v_1, \dots, v_n)_+$$

le *produit mixte* des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .

#### 3.1 Cas de la dimension 2

Soit  $E$  un plan vectoriel euclidien orienté. Soit  $v_1, v_2$  deux vecteurs dans  $E$  et essayons d'interpréter géométriquement ce qu'est le produit mixte  $(v_1, v_2)_+$ .

Un cas peu intéressant est celui où  $(v_1, v_2)$  n'est pas une base de  $E$  : cela signifie que la matrice  $M$  de passage d'une base orthonormée directe  $(e_1, e_2)$  de  $E$  à  $(v_1, v_2)$  est de rang strictement

---

<sup>2</sup>on remarque qu'en fait on n'a besoin que de l'hypothèse  $\det P = 1$  dans la preuve de la proposition

plus petit que 2, et donc, que  $\det M = 0$ . Alors  $(v_1, v_2)_+ = 0$ .

On va donc supposer que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $E$ . Appliquons une variante (où l'on va utiliser le fait que  $E$  est orienté) du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à  $(v_1, v_2)$ . Nous notons

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Alors il existe un unique vecteur  $u_2 \in E$  tel que  $(u_1, u_2)$  soit une base orthonormée directe de  $E$ .

- En effet, soit  $u_1^\perp$  l'espace orthogonal à  $u_1$ , c'est une droite, elle donc engendrée par un vecteur non nul  $w \perp u_1$ . Donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, u_2 = \lambda w$ .
- $u_2$  doit être de norme 1, donc  $|\lambda| = 1/\|w\|$ . Cela laisse deux possibilités pour  $u_2$  :  $w/\|w\|$  ou  $-w/\|w\|$ .
- enfin la base  $(u_1, u_2)$  doit être directe. Mais la matrice de passage de  $(u_1, w/\|w\|)$  à  $(u_1, -w/\|w\|)$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , c'est à dire de déterminant égal à  $-1$ . Donc  $(u_1, w/\|w\|)$  et  $(u_1, -w/\|w\|)$  sont dans deux classes d'équivalence différentes. Mais comme il n'y a que deux classes, c'est qu'une et une seule de ces deux bases est directe. C'est celle-là qui sera  $(u_1, u_2)$

Soit  $M$  la matrice de passage de  $(u_1, u_2)$  à  $(v_1, v_2)$  et notons là  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors :

- $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$  implique que  $a = \|v_1\|$  et  $c = 0$
- puisque  $(u_1, u_2)$  est orthonormée et  $v_2 = bu_1 + du_2$ , on a  $b^2 + d^2 = \|v_2\|^2$ . Donc  $\exists \theta \in \mathbb{R}, (b, d) = (\|v_2\| \cos \theta, \|v_2\| \sin \theta)$ .

Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \|v_1\| & \|v_2\| \cos \theta \\ 0 & \|v_2\| \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad (v_1, v_2)_+ = \det M = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin \theta.$$

Et le produit mixte de  $v_1$  par  $v_2$  est le produit des normes des vecteurs et du sinus de l'angle qu'ils forment. Il est intéressant de comparer cette relation avec  $\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos \theta$ , de sorte que l'on a toujours

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 + (v_1, v_2)_+^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2.$$

Géométriquement,  $(v_1, v_2)_+$  s'interprète comme l'aire algébrique du parallélogramme de côtés  $v_1$  et  $v_2$ .

### 3.2 Cas de la dimension 3

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Pour toute paire de vecteurs  $(v_1, v_2) \in E^2$ , on considère la forme linéaire sur  $E$  définie par

$$\begin{aligned} \ell : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (v_1, v_2, x)_+ \end{aligned}$$

Suivant un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois, il existe une unique façon de représenter cette forme linéaire par un produit scalaire par un vecteur de  $E$ , i.e.  $\exists! w \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \quad (v_1, v_2, x)_+ = \ell(x) = \langle w, x \rangle.$$

**Définition 6** Le vecteur  $w \in E$  ainsi défini s'appelle le **produit vectoriel de  $v_1$  et de  $v_2$**  et est noté :

$$w := v_1 \times v_2.$$

Autrement dit on a construit une application bilinéaire

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1 \times v_2, \end{aligned}$$

caractérisée de façon unique par la relation

$$\forall x \in E, \quad (v_1, v_2, x)_+ = \langle v_1 \times v_2, x \rangle.$$

## Interprétation géométrique

Soit  $(v_1, v_2) \in E^2$  et supposons que le rang de  $(v_1, v_2)$  soit égal à 2 (sinon on a tout de suite  $v_1 \times v_2 = 0$ ). Nous allons construire une base orthonormée directe selon un procédé analogue à celui utilisé dans le paragraphe précédent : nous choisissons

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

et  $u_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$  de sorte que  $(u_1, u_2)$  soit une base orthonormée de  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ . Cela se fait en utilisant la méthode de Gram-Schmidt. Puis on peut montrer d'une façon tout à fait similaire à ce qui a été fait en dimension 2 (exercice !) qu'il existe un unique vecteur  $u_3$  tel que  $(u_1, u_2, u_3)$  soit une base orthonormée de  $E$ . On montre ainsi qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $v_1 = \|v_1\|u_1$  et  $v_2 = \|v_2\| \cos \theta u_1 + \|v_2\| \sin \theta u_2$ . Enfin pour tout vecteur  $x \in E$ , soit  $(x_1, x_2, x_3)$  ses coordonnées dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ , de sorte que

$$(v_1, v_2, x) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} \|v_1\| & \|v_2\| \cos \theta & x_1 \\ 0 & \|v_2\| \sin \theta & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(v_1, v_2, x)_+ = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin \theta \cdot x_3 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin \theta \langle u_3, x \rangle.$$

Ainsi nous avons :

$$v_1 \times v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin \theta u_3.$$

Et le produit vectoriel de  $v_1$  et de  $v_2$  est donc :

- soit égal à 0 si le rang de  $(v_1, v_2)$  est différente de 2
- soit, si le rang de  $(v_1, v_2)$  est deux, le vecteur de  $E$  de longueur égale à  $\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot |\sin \theta|$  (c'est à dire l'aire *absolue* du parallélogramme de côtés  $v_1$  et  $v_2$ ), *orthogonal au plan engendré par  $(v_1, v_2)$*  et tel que  $(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$  soit une base directe de  $E$

## 4 Endomorphismes auto-adjoints

### 4.1 Définitions

**Définition 7** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f \in \text{End}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . L'adjoint de  $f$  est l'unique endomorphisme de  $E$  noté  $f^*$ , tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle y, f(x) \rangle = \langle f^*(y), x \rangle.$$

### Existence et unicité de l'adjoint

Rappelons que (en notant  $E^*$  le dual de  $E$ ) :

$$\begin{aligned} \chi : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto [y \longmapsto \langle x, y \rangle] \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Pour tout  $y \in E$  fixé, considérons

$$\begin{aligned} \chi(y) \circ f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle y, f(x) \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\chi(y) \circ f \in E^*$ , grâce à l'isomorphisme  $\chi$ , on sait que  $\exists! z \in E$  tel que  $\chi(z) = \chi(y) \circ f$ , ce qui équivaut à :

$$\forall x \in E, \quad \chi(z)(x) = (\chi(y) \circ f)(x) \iff \langle z, x \rangle = \langle y, f(x) \rangle.$$

On note alors  $f^*(y) := z$ , puisqu'il satisfait les conditions requises. On démontre aisément que  $f^*$  est linéaire.

### Expression dans une base orthonormée

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et soit  $A = (a_{ij})$  la matrice de  $f$  dans la base  $e$ , i.e.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}.$$

Puisque  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée,

$$\begin{aligned} f^*(e_i) &= \sum_{j=1}^n \langle f^*(e_i), e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^n \langle e_i, f(e_j) \rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left\langle e_i, \sum_{k=1}^n e_k a_{kj} \right\rangle e_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j. \end{aligned}$$

Donc la matrice de  $f^*$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$  est  ${}^t A$ .

### Endomorphismes auto-adjoints

**Définition 8** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme  $f \in \text{End}(E)$  de  $E$  est dit **auto-adjoint** ssi

$$f = f^*.$$

De façon équivalente,  $f$  est auto-adjoint ssi sa matrice  $A$  dans une base orthonormée est **symétrique** :  $A = {}^t A$ .

## 4.2 Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints

L'objectif de cette section est de montrer que tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

**Lemme 4** Soit  $A \in M(n, \mathbb{R})$  une matrice **symétrique**. Alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles.

*Démonstration* — Commençons par remarquer que les valeurs propres de  $A$  sont parmi les racines du polynôme caractéristique et donc sont a priori dans  $\mathbb{C}$ . Considérons l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Soit  $\lambda$  une racine du polynôme caractéristique de  $f$ . Alors il existe un vecteur propre (non nul)  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$Ax = f(x) = \lambda x.$$

On a alors, en utilisant d'abord le fait que  $A$  est réelle, puis que  $A$  est symétrique,

$${}^t \bar{x} A = {}^t \bar{x} \bar{A} = {}^t \bar{x} {}^t A = {}^t (\bar{A} x) = {}^t (\overline{\lambda x}) = \bar{\lambda} {}^t \bar{x}.$$

Donc nous pouvons calculer de deux façons différentes la quantité  ${}^t \bar{x} Ax$  :

$${}^t \bar{x} Ax = ({}^t \bar{x} A) x = \bar{\lambda} {}^t \bar{x} x \quad \text{ou} \quad {}^t \bar{x} Ax = {}^t \bar{x} (Ax) = \lambda {}^t \bar{x} x.$$

En comparant ces deux expressions et en utilisant le fait que  $x \neq 0 \implies {}^t \bar{x} x \neq 0$ , on en déduit que  $\bar{\lambda} = \lambda$ .

**Lemme 5** *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et soit  $f \in \text{End}(E)$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $f$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $f$ .*

*Démonstration* — Il s'agit de montrer que, pour n'importe quel vecteur  $y$  choisi dans  $F^\perp$ , on a  $f(y) \in F^\perp$ . Cela provient de l'identité :

$$\forall x \in F, \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle.$$

On voit bien dans cette relation que, si  $F$  est stable par  $f$ , alors  $f(x) \in F$  et donc, si  $y \perp F$ , alors  $f(y) \perp F$ .

**Théorème 1** *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie  $n$ . Alors tout endomorphisme auto-adjoint  $f$  de  $E$  est diagonalisable dans une base orthonormée.*

*Démonstration* — Nous allons montrer par récurrence sur  $n$  la propriété :

$(P_n)$  : tout endomorphisme auto-adjoint sur un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  est diagonalisable dans une base orthonormée.

- preuve de  $(P_1)$  : c'est immédiat
- $(P_n) \implies (P_{n+1})$  : soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n+1$  et  $f \in \text{End}(E)$  auto-adjoint. Grâce au lemme 4 il existe au moins une valeur propre réelle  $\lambda$ . Soit  $u \in E$  un vecteur propre (non nul) de  $f$  pour cette valeur propre :  $f(u) = \lambda u$  et soit  $F$  la droite vectorielle engendrée par  $u$ . Le sous-espace  $F$  est bien évidemment stable par  $f$  donc, d'après le lemme 5, son orthogonal  $F^\perp$  est stable par  $f$ . Cela nous permet de considérer la restriction  $f_{F^\perp}$  de  $f$  à  $F^\perp$  : c'est un endomorphisme auto-adjoint de  $F^\perp$  (exercice : le vérifier). Donc nous pouvons appliquer  $(P_n)$  à  $f_{F^\perp}$ , puisque  $\dim F^\perp = n$  : il existe une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $F^\perp$  constituée de vecteurs propres pour  $f_{F^\perp}$ . On montre facilement que chaque  $u_j$  est aussi vecteur propre de  $f$  (puisque  $F^\perp$  est stable par  $f$ ). Alors la famille  $(u_1, \dots, u_n, u/\|u\|)$  est une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $f$ . Nous avons donc montré  $(P_{n+1})$ .

**Corollaire 2** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel euclidien et soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . Alors il existe une base orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et orthogonale pour  $\varphi$  simultanément.

*Démonstration* — A nouveau nous utilisons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \chi : E &\longrightarrow E^* \\ z &\longmapsto [x \longmapsto \langle z, x \rangle] \end{aligned}$$

Nous commençons par associer à  $\varphi$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ . Pour tout  $y \in E$  fixé, soit

$$\begin{aligned} \ell_y : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(y, x). \end{aligned}$$

Alors, puisque  $\ell_y \in E^*$ ,  $\exists! z \in E$  tel que  $\ell_y = \chi(z)$ . Traduisons : cela signifie que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(y, x) = \ell_y(x) = \chi(z)(x) = \langle z, x \rangle.$$

Notons  $f(y) := z$ . Nous venons de construire une application  $f : E \longrightarrow E$  telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(y, x) = \langle f(y), x \rangle.$$

On vérifie alors sans difficulté que  $f$  est linéaire. De plus, puisque  $\varphi$  est symétrique,

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(y), x \rangle = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Donc  $f$  est **auto-adjoint**. Nous pouvons appliquer le théorème précédent, qui implique que  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $f$ , i.e.  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = \lambda_i e_i$ . Alors

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi(e_i, e_j) = \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Donc on voit que  $(e_1, \dots, e_n)$  est à la fois une base orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et orthogonale pour  $\varphi$ .

## 5 Un complément hors programme

En guise de conclusion au chapitre sur les espaces euclidiens, voici un résultat hors programme. Nous noterons  $\mathcal{T}^+$  le sous-ensemble de  $M(n, \mathbb{R})$  des matrices triangulaires supérieures dont les éléments sur la diagonale principale sont tous strictement positifs (noter que  $\mathcal{T}^+$  est un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$ ).

**Théorème 2** Pour toute matrice  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , il existe une unique matrice  $S \in O(n)$  et une unique matrice  $T \in \mathcal{T}^+$  telles que  $A = ST$ .

*Démonstration* — Associons à  $A$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique (dont on convient également qu'elle est orthonormée) de  $\mathbb{R}^n$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  l'unique base de  $E$  telle que

$$(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)A.$$

Nous appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base  $(v_1, \dots, v_n)$ , cela nous prouve qu'il existe une unique base orthonormée  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  et une unique matrice  $P \in \mathcal{T}^+$  tel que  $(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)P$ . Nous en déduisons que

$$(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)P = (e_1, \dots, e_n)AP.$$

Mais comme les bases  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  sont toutes les deux orthonormées, nécessairement la matrice  $S := AP$  est dans  $O(n)$ . Soit  $T := P^{-1} \in \mathcal{T}^+$ . Alors

$$A = SP^{-1} = ST, \quad \text{avec } S \in O(n) \text{ et } T \in \mathcal{T}^+.$$