Correction des exercices sur le calcul des variations

1 Le brachistrochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0, H)$ et $B = (1, 0)$ les extrémités de Γ. Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0, -1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est laché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \longmapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.
1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.
Réponse — D'une part $\dot{u}(t)$ doit être tangent à Γ en $u(t)$, c'est à dire être parallèle au vecteur $(1, f'(x(t)))$, donc il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\dot{u}(t) = \lambda(t)(1, f'(x(t)))$. D'autre part, l'énergie totale $E(t)$ est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t) = \frac{1}{2}m|\dot{u}|^2$ et de l'énergie potentielle associée à la force de gravitation $E_p(t) = mgy(t)$. Cette énergie est conservée car il n'y a pas de frottement. Donc

$$mgH = mgy(0) = \frac{1}{2}m|\dot{u}(t)|^2 + mgy(t),$$

ce qui entraîne que $|\dot{u}(t)| = \sqrt{2g(H - y(t))}$. Donc $|\lambda(t)|\sqrt{1 + f'(x(t))^2} = \sqrt{2g(H - y(t))}$ et

$$\dot{u}(t) = \pm\sqrt{\frac{2g(H - y(t))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) = \pm\sqrt{\frac{2g(H - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) \tag{1}$$

2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0, 1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T.
Réponse — La condition $f'(0) < 0$ garantit que le point A n'est pas un point d'équilibre et que donc le corps ne peut pas rester au point A. En effet à l'instant 0, le corps est soumis à la force de gravitation $mg(0, -1)$ et à une force de réaction de Γ qui est orthogonale à Γ (car il n'y a pas de frottement), donc de la forme $\lambda(-f'(0), 1)$. Comme la somme $mg(0, -1) + \lambda(-f'(0), 1)$ doit être tangente à Γ, elle doit être de la forme $\mu(1, f'(0))$. En identifiant, on obtient d'abord que $\mu = -\lambda f'(0)$, puis que $\lambda = mg/f'(0)^2$ et donc enfin que la première composante de la force vaut $-mg/f'(0) > 0$. Donc $\ddot{x}^1(0) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ sur $]0, \varepsilon]$.
Deuxièmement comme $f < H$ sur $]0, 1]$, on a en particulier $f(x(\varepsilon)) < H$ (puisque $x(\varepsilon) > 0$) et donc $\overline{f} := \sup_{[x(\varepsilon),1]} f < H$. Vu (1), cela entraîne que $\dot{x}$ ne change pas de signe et donc, par continuité, reste positif pour tout temps. En particulier le signe $\pm$ dans (1) est $+$. De plus $\dot{x}(t)$ est minoré par un nombre strictement positif et donc il existe un temps $T > 0$ tel que $x(T) = 1$.
3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0, 1]$ et on note $\tau : [0, 1] \longrightarrow [0, T]$ l'application inverse de $x : [0, T] \longrightarrow [0, 1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0, 1]$, $x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ, puis de f uniquement.
Réponse — D'abord on déduit de (1) que :

$$\dot{x} \circ \tau(s) = \sqrt{\frac{2g(H - f(s))}{1 + f'(s)^2}}$$

et donc

$$T = \int_0^1 \frac{d\tau}{ds}(s)ds = \int_0^1 \frac{ds}{\dot{x} \circ \tau(s)} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + f'(s)^2}{2g(H - f(s))}}ds.$$

4) On pose $h(x) = H - f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.
Réponse — On obtient l'action

$$\mathcal{A}[h] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+h'(s)^2}{h(s)}} ds.$$

Le lagrangien de cette action ne dépent pas de s et est donc invariant par translation dans cette variable. Cela est analogue en mécanique aux problèmes variationnels indépendants du temps : l'énergie ou hamiltonien est alors conservée. Il s'agit ici de la quantité

$$\frac{\partial L}{\partial h'} h' - L = -\frac{1}{\sqrt{2gh(1+h'^2)}}.$$

5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s) = \cot\frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.
Réponse — Les points critiques de l'action $\mathcal{A}$ satisfont l'équation

$$h(1+h'^2) = C,$$

oú C est une constante strictement positive. En posant $h'(s) = \cot\frac{\theta}{2}$ dans l'équation, on obtient $h = C\sin^2\frac{\theta}{2}$. Donc $dh = C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$. Comme par ailleurs $dh = h'ds = \cot\frac{\theta}{2}ds$, on en déduit que

$$ds = \tan\frac{\theta}{2} C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = C\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = Cd(\theta - \sin\theta).$$

En conclusion

$$(s,h)(\theta) = C(\theta - \sin\theta, 1-\cos\theta) + (s_0, 0),$$

qui est la paramétrisation d'une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangiennne de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,v) & \longmapsto & \Lambda(t,x,v) \end{array}$$

et on lui associe l'action

$$\mathcal{L}[u] := \int_I \Lambda(t, u(t), \dot{u}(t))dt,$$

définie pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ est point critique de $\mathcal{L}$. Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(t,x,v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)v^i. \tag{2}$$

Indication : on commencera par identifier l'application

$$\begin{array}{rccc} E = (E_1, \cdots, E_n) : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & (t,x,v,w) & \longmapsto & E(t,x,v,w) \end{array}$$

telle que l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$ s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $E = 0$.
Réponse — L'équation d'Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, u(t), \dot{u}(t))\right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad \forall i,$$

se développe en :

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial v^j}(t,u(t),\dot u(t))\ddot u^j(t)+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial x^j}(t,u(t),\dot u(t))\dot u^j(t)+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial t}(t,u(t),\dot u(t))-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}(t,u(t),\dot u(t))=0,\quad\forall i,$$

où il est sous-entendu que l'on somme sur j, à chaque fois que cet indice apparaît deux fois. Cette relation s'écrit $E_i(t,u(t),\dot u(t),\ddot u(t))=0$, $\forall i$, où :

$$E_i(t,x,v,w):=\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial v^j}(t,x,v)w^j+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial x^j}(t,x,v)v^j+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial t}(t,x,v)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}(t,x,v).$$

A présent nous remarquons que, pour tout $(t,x,v,w)\in I\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, il existe une application régulière $u:I\longrightarrow\Omega$ telle que $(t,x,v,w)=(t,u(t),\dot u(t),\ddot u(t))$. Donc l'hypothèse faite sur le lagrangien Λ revient à supposer que les fonctions E_i sont nulles. Notons que E_i est de la forme $A_i(t,x,v)+B_{ij}(t,x,v)w^j=0$. En particulier, il faut que les coefficients B_{ij} s'annulent, c'est à dire :

$$\forall i,\quad\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial v^j}(t,x,v)=0,$$

ce qui entraîne que Λ est une fonction affine de v dont les coefficients sont des fonctions de (t,x), i.e. $\Lambda(t,x,v)=a(t,x)+b_j(t,x)v^j$. En reportant cette expression dans :

$$\forall i,\quad A_i(t,x,v)=\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial x^j}(t,x,v)v^j+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial v^i\partial t}(t,x,v)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}(t,x,v)=0,$$

on obtient :

$$\forall i,\quad\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t,x)v^j+\frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x)-\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x)-\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t,x)v^j=0.$$

Cette relation n'est satisfaite pour tout v que si :

$$\forall i,\quad\frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x)-\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x)=0\quad\text{et}\quad\forall i,j,\quad\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t,x)-\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t,x)=0,$$

ou encore $d(adt+b_idx^i)=0$, ce qui entraîne qu'il existe une fonction $S:I\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $adt+b_idx^i=dS$ et donc (2).

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangienne

$$\begin{array}{rccc}L: & I\times\Omega\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (t,x,v) & \longmapsto & L(t,x,v).\end{array}$$

On suppose que L est continue sur $I\times\Omega\times\mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I\times\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ et que $I\times\Omega\ni(t,x)\longmapsto L(t,x,0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute application $u:I\longrightarrow\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$, on note $\mathcal{L}[u]:=\int_I L(t,u(t),\dot u(t))dt$. On suppose que $\mathcal{L}$ est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi:I\longrightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, on a :

$$\mathcal{L}[u\circ\varphi]=\mathcal{L}[u].\tag{3}$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha\in\mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α, si

$$\forall v\in\mathbb{R}^n,\forall s\in]0,+\infty[,\quad f(sv)=s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad\alpha f(v)=\sum_{i=1}^n v^i\frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

Réponse — Il suffit de dériver par rapport à s la relation $f(sv) = s^\alpha f(v)$ et de prendre $s = 1$.
2) Montrer que la condition (3) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall (t,x,v,w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t,x,v,w) = 0.$$

Réponse — Tout difféomorphisme φ de I dans lui-même qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact peut être connecté à l'identité par une homotopie[1] $\Phi : [0,1] \times I \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall s \in [0,1]$, $\Phi(s,\cdot)$ est un difféomorphisme de I dans I qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact. La relation (3) est alors équivalente à prouver la relation

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[u\circ\Phi(s,\cdot)]\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{L}[u\circ\Phi(s+\varepsilon,\cdot)] - \mathcal{L}[u\circ\Phi(s,\cdot)]}{\varepsilon} = 0, \quad \text{pour tout } u : I \longrightarrow \Omega.$$

Or, pour tout $s \in [0,1]$ fixé, on peut toujours écrire :

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s+\varepsilon,t)) = u\left(\Phi(s) + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s,t) + o(\varepsilon)\right) = u\left(\Phi(s,t)\right) + \varepsilon\dot{u}(\Phi(s,t))\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s,t) + o(\varepsilon)$$

ou, si on note $u_s(t) := u\left(\Phi(s,t)\right)$ [de sorte que $\dot{u}_s(t) = \dot{u}(\Phi(s,t))\frac{\partial\Phi}{\partial t}(s,t)$] et $X(t) := \frac{\partial\Phi}{\partial s}(s,t)/\frac{\partial\Phi}{\partial t}(s,t)$:

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s+\varepsilon,t)) = u_s(t) + \varepsilon\dot{u}_s(t)X(t) + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u(\Phi(s,t)) = u_s(t).$$

Ainsi, quitte à rebaptiser $u = u_s$, la propriété (3) est équivalente à prouver que, pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ et pour toute fonction régulière $X : I \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact,

$$\mathcal{L}[u + \varepsilon\dot{u}X] = \mathcal{L}[u] + o(\varepsilon^2).$$

En développant :

$$\mathcal{L}[u+\varepsilon\dot{u}X] = \mathcal{L}[u] + \varepsilon\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u(t),\dot{u}(t))\dot{u}^i(t)X(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u(t),\dot{u}(t))\frac{d}{dt}\left(\dot{u}^i(t)X(t)\right)\right]dt + o(\varepsilon),$$

nous voyons que (3) équivaut à : $\forall X \in \mathcal{C}^1_c(I,\mathbb{R})$, $\forall u \in \mathcal{C}^2(I,\Omega)$,

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^i X + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u,\dot{u})\frac{d}{dt}\left(\dot{u}^i X\right)\right]dt = 0.$$

En intégrant par partie et en utilisant le fait que X est à support compact, cela donne :

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u,\dot{u})\right)\dot{u}^i\right] X dt = 0.$$

Comme X est quelconque, on obtient donc en développant, que $\forall t \in I$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial v^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j\partial v^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^j\dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j\partial v^i}(t,u,\dot{u})\ddot{u}^j\dot{u}^i = 0.$$

Et comme cette identité doit être vraie pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(I,\Omega)$, on en déduit comme à l'exercice 2 que : $\forall (t,x,v,w) \in I \times \Omega\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $E(t,x,v,w) = 0$, où

$$E(t,x,v,w) := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial v^i}(t,x,v)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j\partial v^i}(t,x,v)v^j v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j\partial v^i}(t,x,v)w^j v^i.$$

3) Déduire de la question précédente que, $\forall j = 1,\cdots,n$, $\forall (t,x) \in I \times \Omega$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t,x,v) = L(t,x,0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)v^i. \tag{4}$$

1. $\Phi : [0,1] \times I \longrightarrow I$ est une homotopie si $\forall s \in [0,1]$, $\Phi(s,\cdot)$ coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, $\Phi(0,\cdot)$ est l'application identité de I dans I et $\Phi(1,\cdot) = \varphi$. Ici il suffit de prendre $\Phi(s,t) = (1-s)t + s\varphi(t)$.

Réponse — L'expression $E(t,x,v,w)$ est une fonction affine de w. Le fait que E soit identiquement nul entraîne donc en particulier que, pour tout j, le coefficient de w^j s'annule, c'est à dire :

$$\forall j = 1, \cdots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t,x,v)v^i = 0.$$

Cela implique que, $\forall (t,x) \in I \times \Omega$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall s \in]0,+\infty[$, $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,sv)\right) = 0$ et donc que $s \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,sv)$ est une fonction constante. De l'identité :

$$L(t,x,v) - L(t,x,0) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(L(t,x,sv)\right) ds = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,sv)v^i ds$$

on déduit alors (4).
4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \cdots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v). \tag{5}$$

Réponse — Nous allons utiliser la relation $E(t,x,v,0) = 0$ et une conséquence de la relation (4) : en dérivant la relation (4) par rapport à x^i et en multipliant par v^i et en sommant sur i, on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)v^i = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j}(t,x,v)v^j v^i$$

Nous en déduisons la simplification suivante

$$E(t,x,v,0) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v)v^i.$$

Cette expression doit être identiquement nulle. En la dérivant par rapport à v^j, on obtient :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^j}(t,x,0) - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^j}(t,x,v) - \frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i.$$

Or, d'après la question 3),

$$\frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i\right) = \frac{\partial}{\partial t}(0) = 0,$$

donc on obtient la relation demandée.
5) Déduire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et positivement homogène de degré 1 par rapport à v et des fonctions $a, b_1, \cdots, b_n : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F_0(x,v) + a(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)v^i.$$

Réponse — Nous commençons par écrire un développement de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,v) &= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,sv)\right) ds \\
&= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial t}(t,x,sv)v^i ds \\
&= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i ds,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5) pour obtenir la dernière ligne. Le terme dans l'intégrale s'avérant être indépendant de s, on en déduit que :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,v) = \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,0)v^i.$$

En supposant que $0 \in I$ et en intégrant l'identité précédente entre 0 et t, on obtient :

$$L(t,x,v) = L(0,x,v) + \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial t}(\tau,x,0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau,x,0)v^i \right) d\tau,$$

ce qui nous donne la relation demandée avec :

$$F_0(x,v) := L(0,x,v) - L(0,x,0), \quad a(t,x) := L(0,x,0) + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial t}(\tau,x,0)d\tau \quad \text{et} \quad b_i(t,x) := \int_0^t \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau,x,0)d\tau.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer [2] que

$$\forall (t,x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x) \right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F(x,v) + \Lambda(t,x,v), \tag{6}$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (2) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v. (Indication : poser $S(t,x) = \int_0^t a(\tau,x)d\tau$.)
Réponse — Nous repartons du résultat de la question précédente : $L(t,x,v) = F_0(x,v) + a(t,x) + b_i(t,x)v^i$ et substituons cette expression dans la relation $E(t,x,v,w) = 0$. Cela nous donne :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x) \right) v^i = 0.$$

Posons $S(t,x) = \int_0^t a(\tau,x)d\tau$, de sorte que $\frac{\partial S}{\partial t} = a$, et $\Lambda(t,x,v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)v^i$. Alors $a(t,x) + b_i(t,x)v^i - \Lambda(t,x,v) = \left(b_i(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)\right) v^i$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a + b_i v^i - \Lambda\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(b_i - \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i}\right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x^i}\right) v^i = 0.$$

Cela signifie que $a + b_i v^i - \Lambda$ est une fonction de (t,x,v) qui est indépendante de t et linéaire en v, i.e.

$$a(t,x) + b_i(t,x)v^i - \Lambda(t,x,v) = c_i(x)v^i,$$

où les c_i sont des fonctions sur Ω. On conclut en posant $F(x,v) := F_0(x,v) + c_i(x)v^i$, qui reste une fonction positivement homogène de degré un en v.

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ v & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i \end{array}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.
Réponse — a) Pour le « lagrangien nul » Λ obtenu à l'exercice deux, on a d'après (2) :

$$p_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t,x,v) = b_i(t,x) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x).$$

2. Toutes mes excuses, il y avait une erreur dans l'énoncé, cette erreur est corrigée ici.

Donc si on fixe (t, x) alors l'application $v \longmapsto p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, x, v) dx^i$ est constante, est donc de rang zéro et en particulier dégénérée. [Remarque : l'image totale de la transformée de Legendre, c'est à dire l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T^*(I \times \Omega) \\ (t, x, v) & \longmapsto & \big(t, x, \frac{\partial S}{\partial t}(t, x), \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x)\big) \end{array}$$

est une sous-variété de dimension $n + 1$ de $T^*(I \times \Omega)$ sur laquelle la forme symplectique $\omega = dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dx^i$ s'annule. Une telle sous-variété est appelée *sous-variété lagrangienne*.]
b) Pour le lagrangien invariant par difféomorphisme obtenu à la question trois, on a, en vertu de (6),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x) + \frac{\partial F}{\partial v^i}(x, v).$$

Comme la fonction F est homogène de degré 1 par rapport à v, $\frac{\partial F}{\partial v^i}$ est homogène de degré 0 par rapport à v, ce qui signifie que $\frac{\partial F}{\partial v^i}(x, \lambda v) = \lambda \frac{\partial F}{\partial v^i}(x, v)$. Donc, pour x fixé, l'image de $v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)$ est, dans une situation générique, une hypersurface de $(\mathbb{R}^n)^*$. La transformation de Legendre est donc encore dégénérée. [Remarque : Dans une situation générique, l'image totale de la transformée de Legendre est une hypersurface de $T^*(I \times \Omega)$. La restriction de la forme symplectique à cette hypersurface n'est pas nulle, mais est dégénérée, au sens où elle admet en chaque point un noyau de dimension 1. L'intégration de cette distribution de droites tangentes à l'hypersurface donne les trajectoires hamiltoniennes.]