

EXERCICES CORRIGÉS SUR LA MÉCANIQUE

1 Problème à deux corps (solutions circulaires)

On étudie le mouvement de deux particules ponctuelles A et B : on note respectivement m_A et m_B les masses de A et B et respectivement x_A et x_B les fonctions du temps t qui donnent les positions de A et B . L'évolution du système est décrite par les points critiques de

$$\int_{\mathbb{R}} \left(m_A \frac{|\dot{x}_A|^2}{2} + m_B \frac{|\dot{x}_B|^2}{2} + \frac{Gm_A m_B}{|x_A - x_B|} \right) dt.$$

On pose

$$C := \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad x := x_B - x_A, \quad m := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad \text{et} \quad e^2 := Gm_A m_B$$

1) Démontrer que l'action se réécrit :

$$\int_{\mathbb{R}} (m_A + m_B) \frac{|\dot{C}|^2}{2} dt + \int_{\mathbb{R}} \left(m \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt.$$

On notera $\mathcal{A}[x]$ la deuxième intégrale.

Réponse — Simple calcul.

2) Démontrer que l'équation d'Euler–Lagrange de \mathcal{A} est :

$$m\ddot{x} = -\frac{e^2}{|x|^3}x. \tag{1}$$

Expliquer pourquoi on peut se ramener à l'étude de x (et laisser de côté C).

Réponse — On obtient que les équations du mouvement sont (1) et $\ddot{C} = 0$: elles se découplent et, en particulier, le centre de masse C a une trajectoire rectiligne uniforme.

3) On recherche les solutions circulaires, de la forme $x(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$. Démontrer qu'une telle expression est solution des équations du mouvement si et seulement si :

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{r^2}. \tag{2}$$

Réponse — Simple calcul.

4) L'énergie cinétique est $E_c = m \frac{|\dot{x}|^2}{2}$, l'énergie potentielle est $E_p = -\frac{e^2}{|x|}$ et l'énergie totale $E = E_c + E_p$. Calculer la valeur de E_c pour une solution circulaire en fonction de e^2 et r . En déduire que $E = -e^2/2r$.

Réponse — On a $\dot{x} = r\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$, donc $|\dot{x}|^2 = r^2\omega^2$ et $E_c = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. On remarque que, d'après (2) on peut aussi écrire $E_c = \frac{1}{2} \cdot m\omega^2 r \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{r^2} \cdot r = \frac{e^2}{2r}$, donc $E = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$.

5) L'intensité du moment angulaire ($\vec{J} := m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$) pour une trajectoire circulaire est $J = m\omega r^2$. Exprimer J en fonction de m , e^2 et r pour une solution circulaire (on pourra utiliser (2)). En déduire la relation suivante entre l'énergie totale et J :

$$E = -\frac{m e^4}{2J^2}. \tag{3}$$

Réponse — De (2) on déduit $\omega^2 = \frac{e^2}{mr^3}$ et donc

$$J = m\omega r^2 = m\sqrt{\frac{e^2}{mr^3}}r^2 = \sqrt{mre}.$$

Donc $2J^2 E = 2mre^2 \left(-\frac{e^2}{2r}\right) = -me^4$, d'où le résultat.

2 Problème à deux corps (suite)

On étudie les points critiques de

$$\mathcal{A}[x] := \int_{\mathbb{R}} \left(m \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt \quad (4)$$

en utilisant les variables de position $x = (x^1, x^2, x^3)$ et de moment $p = (p_1, p_2, p_3)$.

1) Au moyen de la transformée de Legendre, calculer l'hamiltonien $H(x, p)$ et écrire les équations de Hamilton.

Réponse —

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} |p|^2 - \frac{e^2}{|x|}$$

2) On note

$$X_1 := x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2 := x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_3 := x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

et, pour $a = 1, 2, 3$, $J_a := \langle p, X_a \rangle = p_i X_a^i$. Calculer les crochets de Poisson des fonctions H, J_1, J_2 et J_3 entre elles. Quelles conclusions peut-on en tirer sur les solutions des équations de la dynamique ?

Réponse — On trouve $\{J_1, J_2\} = -J_3$, $\{J_2, J_3\} = -J_1$, $\{J_3, J_1\} = -J_2$ et $\{H, J_1\} = \{H, J_2\} = \{H, J_3\} = 0$. Donc les trois composantes du vecteur $J = (J_1, J_2, J_3) = x \times p$ sont conservées le long des solutions du mouvement.

3) Retrouver la loi des aires de Kepler : *les surfaces balayées par le segment joignant les deux points durant deux intervalles de temps de même longueur sont égales.*

Réponse — C'est une conséquence de la conservation de $J = x \times p$, qui équivaut à la conservation de $\frac{1}{2} x \times \dot{x}$, qui est la vitesse aréolaire balayée par ce segment.

4) Démontrer que, pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange de (4), il existe un plan passant par l'origine qui contient la trajectoire de cette solution.

Réponse — Encore une conséquence de la même propriété : le vecteur J garde une direction fixe et x reste donc dans le plan orthogonal à J .

3 Problème à deux corps (solutions de Kepler)

On considère une solution $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de (1). On suppose que l'image est contenue dans le plan d'équation $x^3 = 0$, de sorte que l'on peut poser

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), 0) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0).$$

On notera $J_3 := mr^2 \dot{\theta}$, où $\dot{\theta} := \frac{d\theta}{dt}$.

1) Écrire les équations de Newton (1) sous la forme de deux équations différentielles ayant les fonctions r et θ comme inconnues. Retrouver le fait que J_3 est une quantité conservée.

Réponse — On note $x = r e^{i\theta}$ pour plus de concision. On a :

$$\dot{x} = \dot{r} e^{i\theta} + i r \dot{\theta} e^{i\theta}$$

puis

$$\ddot{x} = \ddot{r} e^{i\theta} + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) e^{i\theta} - r\dot{\theta}^2 e^{i\theta}.$$

Alors l'équation (1), qui s'écrit $m\ddot{x} = -\frac{e^2}{r^2} e^{i\theta}$ se décompose en

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{r^2}$$

suivant $e^{i\theta}$ et

$$2m\dot{r}\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} = 0$$

suivant $i e^{i\theta}$. En multipliant par r le membre de gauche de cette dernière équation, on retrouve que J_3 est une quantité conservée.

2) On pose $r(t) = \rho \circ \theta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et

$$u(\theta) = \frac{J_3}{m\rho(\theta)}.$$

Exprimer $\dot{r} := \frac{dr}{dt}$ en fonction de ρ et de sa dérivée, puis de u et de sa dérivée.

Réponse — On utilise la relation $\dot{\theta} = J_3/mr^2$ pour calculer :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{J_3}{m\rho^2} = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{J_3}{m\rho} \right) = -\frac{du}{d\theta},$$

où il est sous-entendu que $\rho = \rho(\theta(t))$.

3) De même, exprimer $\ddot{r} := \frac{d^2r}{dt^2}$ en fonction de u et de ses dérivées.

Réponse — En remarquant que

$$\dot{\theta} = \frac{u}{r},$$

on a :

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{du}{d\theta}(\theta) \right) = -\frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{u}{r}.$$

4) Dédire des questions précédentes que u est solution de :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{e^2}{J_3}. \quad (5)$$

Réponse — On utilise l'expression obtenue à la question précédente et le fait que $\dot{\theta}^2 = u^2/r^2$ dans la première équation obtenue à la question 1). Cela donne :

$$-m \frac{u}{r} \frac{d^2u}{d\theta^2} - mr \frac{u^2}{r^2} = -\frac{e^2}{r^2}$$

qui, en simplifiant, puis en utilisant $r = J_3/mu$, donne

$$m \left(u \frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2 \right) = \frac{e^2}{r} = \frac{me^2}{J_3} u,$$

qui donne la relation demandée en simplifiant encore par mu .

5) Retrouver la solution circulaire obtenue à la question 3) du premier problème.

Réponse — Celle-ci correspond à la solution constante $u = e^2/J_3$ de (5) : on trouve que cette relation équivaut à $mr^3\dot{\theta}^3 = e^2$, qui correspond bien à la solution proposée à la question 3) du 1.

6) Déterminer toutes les solutions de (5). En déduire que les trajectoires de x sont toutes des coniques.

Réponse — Les autres solutions s'obtiennent en ajoutant à la solution $u = e^2/J_3$ de (5) les solutions de l'équation homogène $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$. On obtient donc que :

$$u(\theta) = \frac{e^2}{J_3} + a \cos(\theta - \varphi)$$

où a et φ sont des constantes, et donc :

$$r(e^2 + aJ_3 \cos(\theta - \varphi)) = J_3^2,$$

qui est l'équation d'une conique.

4 Gaz parfait

On rappelle la relation d'état d'un gaz parfait :

$$pV = NkT$$

et on note \mathcal{N} la sous-variété de $\{(N, V, T, p)\}$ définie par cette relation. Son énergie interne est : $U = \frac{3}{2}NkT$ et la relation de bilan des échanges d'énergie est : $dU = q + w$. On définit la capacité calorifique à volume constant C_V et la capacité calorifique à pression constante C_p comme étant des fonctions définies sur \mathcal{N} telles que

$$q = C_V dT + adV = C_p dT + bdp,$$

où a et b sont des fonctions sur \mathcal{N} . Déterminer C_V et C_p .

Réponse — On trouve $C_V = \frac{3}{2}kN$, $C_p = \frac{5}{2}kN$ et, par la même occasion, $a = kNT/V$ et $b = -V$.