

CORRECTION DES EXERCICES SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

## 1 Produit extérieur

Sur  $\mathbb{R}^3$  on définit la 2-forme différentielle  $\alpha$  et la 1-forme différentielle  $\beta$  par : pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha_{(x,y,z)} := xydx \wedge dy + z^2dx \wedge dz + xdy \wedge dz \quad \text{et} \quad \beta_{(x,y,z)} := xdx + y^2dz.$$

Calculer  $\alpha \wedge \beta$ ,  $d\alpha$ ,  $d\beta$  et  $\beta(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$ .

**Réponse** — On a

$$\alpha \wedge \beta = (xyz^2 + x^2)dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{seul le dernier terme contribue}), \quad d\alpha = 2dy \wedge dz$$

et

$$\beta(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}) = x \cdot x + y^2 \cdot z = x^2 + y^2z.$$

## 2 Produit intérieur

Pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Lambda^p V^*$  et pour tout vecteur  $X \in V$ , on note  $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$  et on appelle produit intérieur de  $\alpha$  par  $X$  la  $(p-1)$ -forme définie par

$$\forall X_2, \dots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \dots, X_p) = \alpha(X, X_2, \dots, X_p).$$

**1** — On suppose que  $V$  est de dimension  $n$ . On se donne  $\omega \in \Lambda^n V^*$  non nulle. Démontrer (sans calcul) que l'application

$$\begin{aligned} \lambda : V &\longrightarrow \Lambda^{n-1} V^* \\ X &\longmapsto X \lrcorner \omega \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Question : à quoi revient le choix d'une telle forme  $\omega$  ?

**Réponse** — On remarque d'abord que  $\lambda$  est linéaire. De plus les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales toutes les deux à  $n$ . Il suffit donc de vérifier que le noyau de  $\lambda$  est réduit à 0 pour conclure. Soit  $X \in \text{Ker} \lambda$  et supposons que  $X \neq 0$ . Alors, grâce au théorème de la base incomplète, on peut trouver  $n-1$  vecteurs  $X_2, \dots, X_n \in V$  tels que  $(X, X_2, \dots, X_n)$  soit une base de  $V$ . Alors

$$\omega(X, X_2, \dots, X_n) = X \lrcorner \omega(X_2, \dots, X_n) = 0,$$

ce qui entraînerait, puisque  $\omega$  est proportionnel à un déterminant que  $\omega = 0$  : cela est contradictoire. Noter que le choix de  $\omega$  revient à se donner une mesure et une orientation sur  $V$ .

**2** — On suppose que  $V$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Démontrer que

$$\begin{aligned} \ell : V &\longrightarrow \Lambda^1 V^* \\ X &\longmapsto \langle X, \cdot \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Réponse** — A nouveau  $\ell$  est linéaire et la dimension de l'espace de départ est égale à celle de l'espace d'arrivée. Comme précédemment il suffit donc de montrer que  $\ell$  est injectif : soit  $X \in V$  tel que  $\ell(X) = 0$ . Alors  $\forall Y \in V, \langle X, Y \rangle = 0$  et donc  $X = 0$ .

**3** — On suppose que  $V$  est de dimension 3, est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et est orienté. On considère une base orthonormée directe  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $V$  et  $\omega \in \Lambda^3 V^*$  telle que  $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1$ . Exprimer l'application

$$\begin{aligned} V^2 &\longrightarrow V \\ (X, Y) &\longmapsto \lambda^{-1}(\ell(X) \wedge \ell(Y)) \end{aligned}$$

dans les coordonnées données par  $(e_1, e_2, e_3)$ . Conclure.

**Réponse** — Si  $X = \sum_{i=1}^3 X^i e_i$  et  $Y = \sum_{i=1}^3 Y^i e_i$  sont les décompositions de  $X$  et  $Y$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ , on a :

$$\ell(X) = \sum_{i=1}^3 X^i dx^i \quad \text{et} \quad \ell(Y) = \sum_{i=1}^3 Y^i dx^i.$$

Donc

$$\ell(X) \wedge \ell(Y) = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) dx^2 \wedge dx^3 + (X^3 Y^1 - X^1 Y^3) dx^3 \wedge dx^1 + (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) dx^1 \wedge dx^2.$$

Par ailleurs un calcul direct donne :

$$\lambda(Z) = Z^1 dx^2 \wedge dx^3 + Z^2 dx^3 \wedge dx^1 + Z^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Donc

$$\lambda^{-1}(\ell(X) \wedge \ell(Y)) = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + (X^3 Y^1 - X^1 Y^3) e_2 + (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) e_3 = X \times Y.$$

On reconnaît le produit vectoriel, que l'on note ici  $\times$  pour éviter une confusion avec le produit extérieur. Et l'on retrouve le fait que, pour définir un produit vectoriel, il faut se donner une orientation (grâce ici à  $\omega$ ) et un produit scalaire.

### 3 Produit extérieur

On pose  $V = \mathbb{R}^n$ . Soit  $\alpha, \beta \in \Lambda^2 V^*$ . Etudier dans les cas suivants si  $\alpha \wedge \beta$  est nul ou non :

**1** —  $n = 3$ .

**Réponse** — Ici  $\alpha \wedge \beta$  est dans  $\Lambda^4(\mathbb{R}^3)^* = \{0\}$ , donc  $\alpha \wedge \beta = 0$ .

**2** —  $n = 4$ .

**Réponse** — Nous utilisons une base  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$  sur  $V$  et les coordonnées associées  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Il peut arriver bien sûr que  $\alpha \wedge \beta = 0$ , par exemple pour  $\alpha = \beta = dx^1 \wedge dx^2$ . Mais en général ce produit est non nul : par exemple, si  $\alpha = dx^1 \wedge dx^2$  et  $\beta = dx^3 \wedge dx^4$ , alors  $\alpha \wedge \beta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \neq 0$ . On peut même avoir  $\alpha \wedge \alpha \neq 0$  : c'est le cas pour  $\alpha = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$ . Enfin en général en utilisant les isomorphismes d'espaces vectoriels :  $R : \Lambda^2 V^* \rightarrow \mathbb{R}^6$  défini par

$$R \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}),$$

et  $T : \Lambda^4 V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , défini par  $T(\omega) = \omega(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ , alors  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$  s'identifie à la forme bilinéaire

$$(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \mapsto \alpha_{12}\beta_{34} + \alpha_{13}\beta_{42} + \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{14} + \alpha_{24}\beta_{31} + \alpha_{34}\beta_{12},$$

qui est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature  $(3, 3)$ .

### 4 Produit extérieur et produit intérieur

Dans ce problème  $\alpha \in V^*$  est une 1-forme et  $\gamma \in \Lambda^2 V^*$  est une 2-forme.

**a)** Montrer que  $\forall u, v, w \in V$  l'expression  $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$  peut se simplifier comme la somme de trois termes. Une application directe de la formule rappelée en (i) plus haut donne

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \frac{1}{2} \alpha(u) (\gamma(v, w) - \gamma(w, v)) + \frac{1}{2} \alpha(v) (\gamma(w, u) - \gamma(u, w)) + \frac{1}{2} \alpha(w) (\gamma(u, v) - \gamma(v, u)).$$

Puis en tenant compte du fait que  $\gamma$  est antisymétrique on obtient

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \alpha(u)\gamma(v, w) + \alpha(v)\gamma(w, u) + \alpha(w)\gamma(u, v).$$

**b)** Soit  $\alpha \in V^*$  une 1-forme non nulle. On note  $H$  le noyau de  $\alpha$ . Montrer qu'il existe  $u \in V$  tel que  $\alpha(u) = 1$ . Ce vecteur  $u$  est-il unique ?

Puisque  $\alpha$  est non nulle, il existe  $x \in V$  tel que  $\alpha(x) \neq 0$ . On prend alors  $u = x/\alpha(x)$ . Si  $\dim V > 1$  alors  $u$  n'est pas unique puisque  $\forall v \in H, \alpha(u+v) = \alpha(u) = 1$ .

c) On suppose dans cette question et dans la suite que  $\alpha \wedge \gamma = 0$ . Montrer que la restriction de  $\gamma$  à  $H$  est nulle (i.e.  $\forall v, w \in H, \gamma(v, w) = 0$ ).

Pour tout  $v, w \in H$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \wedge \gamma(u, v, w) \\ &\stackrel{a)}{=} \alpha(u)\gamma(v, w) + \alpha(v)\gamma(w, u) + \alpha(w)\gamma(u, v) \\ &= 1 \cdot \gamma(v, w) + 0 \cdot \gamma(w, u) + 0 \cdot \gamma(u, v) = \gamma(v, w). \end{aligned}$$

d) On note  $\beta = u \lrcorner \gamma$ , où  $u$  a été introduit à la question b). Montrer que  $\gamma = \alpha \wedge \beta$ .

Pour tout  $v, w \in V$  on a

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v, w) &= \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) \\ &= \alpha(v)\gamma(u, w) - \alpha(w)\gamma(u, v) \\ &= -\alpha(v)\gamma(w, u) - \alpha(w)\gamma(u, v) \\ &\stackrel{\alpha \wedge \gamma = 0}{=} \alpha(u)\gamma(v, w) \\ &\stackrel{et a)}{=} \gamma(v, w). \end{aligned}$$

## 5 Le lemme de Cartan : première version

Démontrer, en utilisant des coordonnées locales, que, sur une variété  $\mathcal{M}$ , pour tout champ de vecteur  $X$  et  $Y$  sur  $\mathcal{M}$  et pour toute 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $\mathcal{M}$ ,

$$d\alpha(X, Y) = L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]). \quad (1)$$

Nous travaillons dans un système de coordonnées locales  $(x^i)$  :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_i dx^i, \\ X &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Le terme de gauche est :

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y) &= \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j(X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) (X^i Y^j - Y^i X^j) \\ &= \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) X^i Y^j. \end{aligned}$$

Le terme de droite est :

$$\begin{aligned} L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_j Y^j) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_j X^j) - \alpha_j \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} Y^j + \alpha_j \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) - Y^i \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} X^j + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &\quad - \alpha_j \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i Y^j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - X^i Y^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \\ &= X^i Y^j \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

## 6 Le lemme de Cartan : deuxième version

On se propose de redémontrer la formule (1) de l'exercice précédent de façon intrinsèque.

1) Démontrer (1) dans le cas où  $\alpha = df$ , avec  $f \in C^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$ .

**Réponse** — Si  $\alpha = df$ , le membre de droite de (1) s'annule puisque  $dd\alpha = 0$ , tandis que le membre de droite est égal à  $L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) - L_{[X,Y]}f$ , quantité qui s'annule par définition de  $[X, Y]$ .

2) On suppose que  $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$  satisfait (1). Montrer que, pour toute fonction  $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $\alpha := g\beta$  satisfait aussi (1).

**Réponse** — On a  $d\alpha = dg \wedge \beta + g d\beta$ , donc  $\alpha$  satisfait (1) ssi

$$(dg \wedge \beta)(X, Y) + g d\beta(X, Y) = (L_X g)\beta(Y) + g L_X(\beta(Y)) - (L_Y g)\beta(X) - g L_Y(\beta(X)) - g\beta([X, Y]).$$

On on a, par définition du produit extérieur :  $(dg \wedge \beta)(X, Y) = (L_X g)\beta(Y) - (L_Y g)\beta(X)$ , ce qui permet de réduire l'équation précédente à  $g d\beta(X, Y) = g L_X(\beta(Y)) - g L_Y(\beta(X)) - g\beta([X, Y])$ , qui est vraie puisque  $\beta$  satisfait (1).

3) Montrer (1) dans le cas général.

**Réponse** — Localement toute 1-forme  $\alpha$  peut se décomposer selon  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ , où les  $x^i$  sont des fonctions coordonnées et les  $\alpha_i$  sont aussi des fonctions. D'après le a), toutes les 1-formes  $dx^i$  satisfont (1) et, d'après le b), on en déduit que c'est aussi le cas pour toutes les formes  $\alpha_i dx^i$ . Le résultat pour  $\alpha$  se déduit donc par additivité.

## 7 Transport par un difféomorphisme d'un produit intérieur et d'une dérivée de Lie

Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un difféomorphisme,  $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur sur  $\mathcal{M}$  et  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  une  $p$ -forme sur  $\mathcal{N}$ . On note  $X := \varphi_* \xi$ .

1) Démontrer que  $\varphi^*(X \lrcorner \alpha) = \xi \lrcorner (\varphi^* \alpha)$ .

**Réponse** — Soit  $x \in \mathcal{M}$  et  $\xi_2, \dots, \xi_p \in T_x \mathcal{M}$ . Nous avons, en utilisant la définition de  $\varphi^*$  et de  $X \lrcorner \alpha$  :

$$\begin{aligned} \varphi^*(X \lrcorner \alpha)_x(\xi_2, \dots, \xi_p) &= (X \lrcorner \alpha)_{\varphi(x)}(d\varphi_x(\xi_2), \dots, d\varphi_x(\xi_p)) \\ &= \alpha_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)), d\varphi_x(\xi_2), \dots, d\varphi_x(\xi_p)) \\ &= \alpha_{\varphi(x)}(d\varphi_x(\xi(x)), d\varphi_x(\xi_2), \dots, d\varphi_x(\xi_p)) \\ &= (\varphi^* \alpha)_x(\xi(x), \xi_2, \dots, \xi_p) \\ &= (\xi \lrcorner \varphi^* \alpha)_x(\xi_2, \dots, \xi_p). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) Démontrer que  $\varphi^*(L_X \alpha) = L_\xi(\varphi^* \alpha)$ .

**Réponse** — Nous appliquons une formule de Cartan et le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} \varphi^*(L_X \alpha) &= \varphi^*(X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)) \\ &= \xi \lrcorner \varphi^* d\alpha + d(\varphi^*(X \lrcorner \alpha)) \\ &= \xi \lrcorner d(\varphi^* \alpha) + d(\xi \lrcorner \varphi^* \alpha) \\ &= L_\xi(\varphi^* \alpha). \end{aligned}$$

## 8 Forme symplectique

L'espace  $\mathbb{R}^{2n}$  est muni des coordonnées  $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) = (x^i, p_i)_i$  et on note

$$\omega := dp_1 \wedge dx^1 + \dots + dp_n \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

1) Montrer que pour toute fonction  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  il existe un unique champ de vecteur  $\xi$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que

$$\xi \lrcorner \omega + dh = 0.$$

Expliciter ce champ de vecteur.

**Réponse** — On pose  $\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$  et on substitue dans la relation. On obtient

$$\left( b_i + \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) dx^i + \left( -a_i + \frac{\partial h}{\partial p_i} \right) dp_i = 0,$$

donc

$$\xi_h = \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Dans la suite on notera  $\xi_h$  ce champ de vecteur.

2) Montrer que si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  est solution de :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma) \quad \text{alors} \quad \frac{d(h \circ \gamma)}{dt} = 0.$$

**Réponse** — On a

$$\frac{d(h \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} = 0.$$

3) Pour toute paire de fonctions  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , on note :

$$\{f, g\} := \omega(\xi_f, \xi_g)$$

(crochet de Poisson). Montrer que si  $\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$  alors

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \{h, f\} \circ \gamma$$

et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

**Réponse** — On a

$$\{h, f\} = \omega(\xi_h, \xi_f) = -\omega(\xi_f, \xi_h) = -(\xi_f \lrcorner \omega)(\xi_h) = df(\xi_h).$$

et donc

$$\{h, f\} \circ \gamma = df_\gamma(\xi_h(\gamma)) = df_\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}.$$

4) Expliciter  $\{f, g\}$ .

**Réponse** — Un calcul donne :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 2) grâce à celui de la question 3), car  $\{h, h\} = 0$ .

5) Montrer que

$$L_{\xi_f} \omega = 0.$$

**Réponse** — On utilise la formule de Cartan :

$$L_{\xi_f} \omega = \xi_f \lrcorner (d\omega) + d(\xi_f \lrcorner \omega) = 0 - ddf = 0.$$

6) On rappelle que, pour deux champs de vecteur  $X_1$  et  $X_2$ ,  $L_{X_1} X_2 = [X_1, X_2]$  et on admet que, pour une forme  $\alpha$ ,  $L_X(Y \lrcorner \alpha) = (L_X Y) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner (L_X \alpha)$ . Montrer que :

$$\xi_{\{f, g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

**Réponse** — On a, en utilisant à la deuxième ligne le résultat de la question 5 :

$$\begin{aligned} [\xi_g, \xi_f] \lrcorner \omega &= (L_{\xi_f} \xi_g) \lrcorner \omega = L_{\xi_f}(\xi_g \lrcorner \omega) - \xi_g \lrcorner (L_{\xi_f} \omega) \\ &= L_{\xi_f}(-dg) - \xi_g \lrcorner (0) \\ &= -\xi_f \lrcorner d(dg) - d(\xi_f \lrcorner dg) = 0 - d(-\xi_f \lrcorner \xi_g \lrcorner \omega) \\ &= -d\omega(\xi_f, \xi_g) = -d\{f, g\}. \end{aligned}$$

**Remarque :** montrons la formule  $L_X(Y \lrcorner \alpha) = (L_X Y) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner (L_X \alpha)$ . Nous avons, en appliquant la définition de la dérivée de Lie d'une forme différentielle :

$$L_X(Y \lrcorner \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ (e^{tX})^* (Y \lrcorner \alpha) - Y \lrcorner \alpha \right].$$

or, en utilisant le résultat de l'exercice 7, question 1) avec  $\varphi = e^{tX}$  et  $\xi = (e^{-tX})_* Y$ , on a (en remarquant que  $Y = (e^{tX})_* \xi$ ) :

$$(e^{tX})^* (Y \lrcorner \alpha) = (e^{-tX})_* Y \lrcorner (e^{tX})^* \alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned} L_X(Y \lrcorner \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((e^{-tX})_* Y - Y) \lrcorner (e^{tX})^* \alpha}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y \lrcorner ((e^{tX})^* \alpha - \alpha)}{t} \\ &= L_X Y \lrcorner \alpha + Y \lrcorner L_X \alpha. \end{aligned}$$

7) Dédurre de la question suivante l'identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

(Indication : calculer de deux façons différentes  $L_{\xi_{\{h,g\}}} f$ ).

**Réponse** — D'une part, on a :

$$L_{\xi_{\{h,g\}}} f = \{\{h, g\}, f\} = \{f, \{g, h\}\},$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} L_{\xi_{\{h,g\}}} f &= L_{[\xi_h, \xi_g]} f = L_{\xi_h} L_{\xi_g} f - L_{\xi_g} L_{\xi_h} f \\ &= L_{\xi_h} \{g, f\} - L_{\xi_g} \{h, f\} = \{h, \{g, f\}\} - \{g, \{h, f\}\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.