

Chapitre 4

Polynômes : évaluation et interpolation

4.1 Evaluation

4.1.1 Evaluation de Horner

Entrées: a_0, \dots, a_n , coefficients du polynôme P ; t , réel.

Sorties: $val = P(t)$

$val \leftarrow a_n$;

pour i de $n - 1$ à 0 **faire**

$val \leftarrow a_i + t \times val$;

fpour

retourner val ;

Algorithme 14: Evaluation de Horner

L'algorithme est de complexité linéaire en n .

Exercice 4.1.1 Programmez l'évaluation d'Horner en Python et en xcas, vérifiez avec la fonction xcas déjà programmée.

4.1.2 Evaluation de Newton-Horner

Théorème 4.1.2 Soit c_0, \dots, c_{n-1} des réels (distincts ou non).

Alors les polynômes $P_0 = 1$, $P_i = (X - c_0) \dots (X - c_{i-1})$ ($1 \leq i \leq n$) forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'écriture d'un polynôme dans cette base s'appelle *forme de Newton*.

Entrées: c_0, \dots, c_{n-1} , centres de Newton; d_0, \dots, d_n , coefficients de Newton du polynôme P ; t , réel

Sorties: $val = P(t)$

$val \leftarrow d_n$;

pour i de $n - 1$ à 0 **faire**

$val \leftarrow d_i + (t - c_i) \times val$;

fpour

retourner val ;

4.2 Le polynôme d'interpolation

Théorème 4.2.1 Soit $(c_0, y_0), \dots, (c_n, y_n)$ une suite de points, avec les c_i deux à deux distincts.

Il existe un unique polynôme d'interpolation de degré au plus n :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (x - c_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (c_i - c_j)}$$

Soit f la fonction qu'on cherche à interpoler aux centres c_0, c_1, \dots ($y_i = f(c_i)$).

Le k -ième coefficient de Newton du polynôme d'interpolation est noté $d_k = f[c_0, \dots, c_k]$, et on l'appelle la différence divisée relative à c_0, \dots, c_k .

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} d_k \cdot P_k \quad (4.1)$$

Proposition 4.2.2 On a $f[c_0, \dots, c_n] = \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{f(c_i)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (c_i - c_j)}$

Corollaire 4.2.3 On a : $d_0 = y_0, d_1 = \frac{y_1 - y_0}{c_1 - c_0},$

$$d_k = f[c_0, \dots, c_k] = \frac{f[c_1, \dots, c_k] - f[c_0, \dots, c_{k-1}]}{c_k - c_0}$$

Détermination des différences divisées

Entrées: n , entier ; c_0, \dots, c_n , centres distincts ; y_0, \dots, y_n , valeurs.

Sorties: $d = (d_0, \dots, d_n)$, vecteur des différences divisées.

pour i de 0 à n **faire**

$d_i \leftarrow y_i;$

fpour

pour i de 1 à n **faire**

pour j de n à i **faire**

$d_j \leftarrow \frac{d_j - d_{j-1}}{c_j - c_{j-i}};$

fpour

fpour

Algorithme 15: Calcul des différences divisées

Majoration de l'erreur

Théorème 4.2.4 Soit f une fonction C^{n+1} sur $[a, b]$, notons L_n le polynôme d'interpolation de f en $n + 1$ points distincts (c_i) de $[a, b]$. Alors, pour tout x de $[a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que :

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot P_{n+1}(x) \right|$$

où $P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - c_i)$.

Exercice 4.2.5 (Preuve du th). On pose : $E_n = f - L_n$, et pour un x fixé distinct des (c_i) dans $[a, b]$, on pose aussi $G(t) = E_n(t) - \frac{P_{n+1}(t)}{P_{n+1}(x)} \cdot E_n(x)$. Montrer que G est C^{n+1} sur $[a, b]$ et y possède $n + 2$ zéros. Dédurre le résultat du théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4.2.6 (Idées de projets) Etudiez l'interpolation avec des points égaux, ou bien étudiez le cas de la dimension 2, ou de l'interpolation par morceaux. Splines.

Référence : Quarteroni-Sacco-Saleri : "méthodes numériques"

1. en identifiant le coefficient de x^n dans la formule : 4.1

Chapitre 5

Intégration numérique

5.1 Interpolation et intégration. Méthode de Gauss

5.1.1 Dualité et interpolation

On note E_n les éléments de $\mathbb{R}[x]$ de degré strictement inférieur à n . On note $E_n^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel dual.

NB : E_n et E_n^* sont deux espaces vectoriels de dimension n .

Définition 5.1.1 Soit c un réel, alors l'application $\delta_c : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ est un élément de E_n^*
 $P \mapsto P(c)$

Proposition 5.1.2 Si $(c_i)_{(0 \leq i < n)}$ sont n réels distincts, alors $(\delta_{c_i})_{(0 \leq i < n)}$ est une base de E_n^* .

Proposition 5.1.3 Pour $0 \leq i < n$, si $L_i = \prod_{0 \leq j < n, j \neq i} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}$, alors la famille $(L_i)_{(0 \leq i < n)}$ est une base de E_n , et c est la base duale¹ de $(\delta_{c_i})_{(0 \leq i < n)}$.

5.1.2 Intégration

Définition 5.1.4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n l'application $E_n \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto \int_{-1}^1 P(t) dt$

Comme I_n est un élément de E_n^* , et que si $(c_i)_{(0 \leq i < n)}$ sont n réels distincts, alors $(\delta_{c_i})_{(0 \leq i < n)}$ est une base de E_n^* , on obtient grace aux coordonnées de I_n dans cette base :

Proposition 5.1.5 Pour tout n -uplet $(c_i)_{(0 \leq i < n)}$ de réels distincts, il existe $(\alpha_i)_{0 \leq i < n} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in E_n, \int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot P(c_i)$$

5.1.3 Polynômes orthogonaux

Proposition 5.1.6 L'application bilinéaire : $E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$ détermine un produit scalaire sur E_n .
 $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t) \cdot Q(t) dt$

Définition 5.1.7 (Polynômes de Legendre) On note $(l_k)_{0 \leq k < n}$ la famille de polynômes unitaires obtenue à partir de $(x^k)_{0 \leq k < n}$ par orthogonalisation de Schmidt pour le produit scalaire précédent.

1. On rappelle qu'il y a une identification canonique entre un espace et son bidual. On a donc identifié E_n et E_n^*

Proposition 5.1.8 Les polynômes de Legendre vérifient la formule de récurrence :

$$l_0 = 1; l_1 = x; \forall n > 1, l_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}x.l_n - \frac{n}{n+1}.l_{n-1}.$$

Remarque 5.1.9 Dans le cas plus général d'un produit scalaire du type $(P, Q)_w = \int (P(t).Q(t).w(t)dt$ où w est une fonction fixée intégrable positive, la famille orthogonalisée serait toujours solution de la récurrence :

$$l_{n+1} = (x - \alpha_n).l_n - \beta_n.l_{n-1}$$

où $\alpha_n = \frac{(x.l_n, l_n)}{(l_n, l_n)}$ et $\beta_n = \frac{(l_n, l_n)}{(l_{n-1}, l_{n-1})}$

5.1.4 Méthode de Gauss

Les polynômes de Legendre permettent d'améliorer la proposition 5.1.5 par un choix optimal des (c_k) .

Théorème 5.1.10 Si $(c_k)_{0 \leq k < n}$ sont les n racines de l_n , alors il existe $(\alpha_i)_{0 \leq i < n} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in E_{2n}, \int_{-1}^1 P(t).dt = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i.P(c_i)$$

Exercice 5.1.11 1) On considère le polynome de Legendre l_5 .

a) Etudiez sa définition dans la documentation d'xcas, et trouvez ses racines c_0, \dots, c_4 (valeurs exactes).

b) Calculez vous même la suite (l_n) en utilisant la relation de récurrence.

2) Trouvez les coordonnées $(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ de I_5 dans la base $\delta_{c_0}, \dots, \delta_{c_4}$.

3) Comparez pour $n < 10$: $\int_{-1}^1 t^n .dt$ avec $\sum_{i=0}^4 \alpha_i .c_i^n$. Que peut on dire de I_9 ?

4) a) Définir le produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t).Q(t).dt$

b) Calculez (x^i, l_5)

5) Comparez les valeurs approchées de $\int_{-1}^1 f(t).dt$ avec $\sum_{i=0}^4 \alpha_i .f(c_i)$ pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$