Université de Paris 7 | **tp08 : Interpolation** | **agreg 2011-2012 (F.Han[1])**

Astuces du jour pour l'interface :

1) N'oubliez pas la possibilité d'insérer une instruction déjà tapée en utilisant `ALT` *fleche haut.*

2) Les sorties xcas (ce qui est en noir) peuvent être sélectionnées et remaniées grâce à des opérations sur la selection. Ex developper (CTRL n), factoriser (CTRL f), ou menus deroulants. On peut aussi les copier en tant que Latex avec CTRL t.

Exercice I: en xcas, interpolation

1) a) Programmez le polynôme L_1 d'interpolation de Lagrange d'une liste $(x_i, y_i)_{0 \le i \le n}$ par la formule de Lagrange (et non par les différences divisées). On fera des boucles, et on n'utilisera pas les fonctions `sum` et `product` d'xcas. On retournera une forme développée simplifiée du polynôme. (Préférez `normal` pour les calculs lourds)

2) a) Créez une fonction `c(a,b,n)` qui retourne la liste des $\left(a + \dfrac{k.(b-a)}{n}\right)_{0 \le k \le n}$

b) En utilisant par exemple la commande `apply`, créez la liste des `[(c,f1(c)]` lorsque c décrit la liste `c(-5,5,3)` où f_1 est définie par $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

c) Calculez l'interpolation de Lagrange à 4 termes avec votre programme, et vérifiez avec la fonction xcas que c'est correct.

d) Assurez vous que xcas effectue ce calcul avec des rationnels exacts, et illustrez la différence de complexité de ces deux méthodes avec 41 points.

e) Illustrez maintenant la répercussion des erreurs d'arrondis selon les 2 méthodes. (On travaillera avec 15 chiffres car en dessous xcas travaille avec plus de chiffres qu'il n'en affiche). On affichera la norme 2 du vecteur des coefficients de la différence entre le calcul en flottants, et la valeur approchée du calcul exact.

3) a) Représentez la fonction f_1 sur $[-5, 5]$ ainsi que ses interpolations de Lagrange à $n+1$ points équirépartis dans cet intervalle, pour $n \in \{1, \ldots, 30\}$ (On travaillera en flottants). On pourra (en mode[2] géométrie 2D) faire apparaître un bouton avec la commande `element` et afficher le dessin correspondant à la valeur de n réglée par le bouton. (on réglera le pas à 1). NB : étudiez les réglages du bouton de type clic-clic. NB : La zone géométrie est réevaluée à chaque déplacement du bouton, donc optimisez les calculs dans cette zone.

b) Ajoutez sur le dessin les points d'interpolation en gros carré rouge. On pourra utiliser le raccourci clavier pour obtenir les options graphiques. (il est rappelé dans le menu déroulant)

c) Pensez vous qu'il y ait une convergence, ou une convergence uniforme sur $[-5, 5]$?

4) Recommencez avec $f_2 : x \mapsto sin(x)$ toujours sur $[-5, 5]$.

5) Expliquez la différence de comportement en étudiant les dérivées de f_1

a) Comparez les différences d'efficacité entre les 5 méthodes suivantes : connaitre les dérivées en 0 à partir du développement de Taylor, ou trouver la dérivée formelle ainsi :

a : `((diff@@(10))(f1))(x)`

b : `diff(f1(x),x$10)` (Astuce : que fait `x$10` ?)

c : `d10f1:=f1(x);for(j:=0;j<10;j++){d10f1:=normal(diff(d10f1,x))};d10f1;`

Laquelle est à proscrire ?

Exercice II: Méthode de Lagrange :

Nous pouvons interpoler le polynôme caractéristique en les valeurs $0 \ldots n$. Autrement dit, nous calculons $n+1$ déterminants d_i, et la réponse sera : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i \prod_{j \ne i} \frac{(x-j)}{(i-j)}$.

1) Implémenter cette méthode en utilisant la fonction déterminant pour les rationnels.

2) Comparez cette méthode avec le calcul de $\det(x.I - A)$ par la méthode du pivot. (cf bareiss qui est un pivot sans dénominateurs). On étudiera la documentation pour être sûr que le logiciel ne calcule pas $\det(x.I - A)$ par interpolation de Lagrange !

3) Comparez ces 2 méthodes avec un même logiciel. Par exemple en utilisant la fonction d'xcas dédiée au polynôme caractéristique. On étudiera la documentation pour être sûr de la méthode utilisée.

a) Pour une matrice à coefficients entiers (petits) de taille 50.

b) Pour une matrice à coefficients rationnels petits de taille 30.

4) Quel est le cout en terme d'opérations sur le corps de base de cette méthode ?

1. http ://www.math.jussieu.fr/∼han/M1MME

2. pour les animations il faut ouvrir une zone de géométrie via le menu déroulant