TD de topologie et calcul différentiel– Corrigé de la Feuille 4: Espaces complets, Point fixes

Groupe de TD 5

La complétude est une notion d'espace topologique *métrique* et qui ne dépend pas seulement de la topologie des espaces concernés. En particulier, la complétude n'est pas une notion préservée par homéomorphisme (contrairement à la compacité ou la connexité), voir l'exercice 2.

Rappelons qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans une espace métrique (E,d) si et seulement si $d(a_p,a_n) \underset{min(n,p)\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où *min* désigne le minimum.

Exercice 1. On considère un espace discret muni de la distance d telle que $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Quelles sont ses suites de Cauchy ? Est-il complet ?

Correction 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, p > m$ on a $d(a_n, a_p) < \varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon = 1/2$ (ou en fait tout $\varepsilon \leq 1$), on obtient que $a_n = a_p$ pour tout $p, n > m$. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationaire pour n assez grand. Réciproquement toute suite stationaire pour n assez grand est de Cauchy. Une suite stationaire est évidemment convergente, donc l'espace considéré est complet.

Exercice 2. Donner un exemple d'espaces métriques X et Y homéomorphes tels que X soit complet et Y ne le soit pas.

Correction 2. Considérons l'intervalle ouvert $I =]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle). L'intervalle I n'est pas complet car I est ouvert dans $\mathbb{R}$ (et qu'un espace complet est fermé d'après le cours). Considérons maintenant l'application tangente $\tan : I \to \mathbb{R}$, définie par $x \mapsto \tan(x)$. C'est une application continue et bijective dont l'inverse est donné par la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to I$, $x \mapsto \arctan(x)$. Il est bien connu que la fonction arctangente est également continue; donc $\tan : I \to \mathbb{R}$ est une homéomorphisme de I sur $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ est complet d'après le cours.

Il y avait bien entendu bien d'autres exemples possibles... Par exemple la fonction $x \mapsto \exp(x)$ définie de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Soit X et Y deux espaces métriques et f une application $X \to Y$.

a) Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?

b) Supposons f uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Correction 3. **a)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. On veut montrer que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on doit trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, n > m$, on ait

$$d(f(a_n), f(a_p)) < \varepsilon. \tag{0.1}$$

Mais comme f est uniformémment continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ avec $d(x,y) < \delta$, on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Il suffit maintenant de trouver m tel que pour tout $p, n > m$, on ait $d(a_n, a_p) < \delta$ pour que l'inégalité (0.1) soit vérifée. C'est possible puisque, jsutement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La réciproque n'est pas vraie. En effet considérons $\mathbb{R}$ qui est complet (c'est du cours). En particulier les suites de Cauchy de $\mathbb{R}$ sont les suites convergentes (rappelons qu'une suite convergente est toujours de Cauchy dans un espace métrique et que la réciproque est, par définition, vraie dans les espaces complets). Comme toute fonction continue préserve les suites convergentes, elle préserve aussi les suites de Cauchy. Mais il existe des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne sont pas uniformémment continues; par exemple $x \mapsto x^3$.

Pour être complet (sans jeu de mot), démontrons maintenant que $x \mapsto x^3$ n'est pas uniformément continue (même s'il s'agit plus ou moins d'un résultat du cours). Il suffit de montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \delta$ et $|x^3 - y^3| \geq 1$. Soit $x > 0$ et $y = x + \delta$. Alors

$$|x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| = \delta|x^2 + xy + y^2| \geq \delta x^2.$$

Il suffit alors de choisir $x \geq 1/\sqrt{\delta}$ pour avoir $|x^3 - y^3| \geq 1$.

b) Il faut montrer que toute suite de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est convergente. par le a), on sait que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme Y est complet, elle converge donc vers un point $y \in Y$. Comme f est bijective, il existe $x \in X$ tel que $y_0 = f(x)$. Montrons que la suite (a_n) converge vers x. Mais puisque on a supposé que f^{-1} est continue, la suite $(f^{-1}(f(a_n)) = a_n)$ converge vers $f^{-1}(y) = x$. Donc (a_n) est convergente et il en découle que X est complet.

Exercice 4 (Distances usuelles sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$)**.** Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f et g dans E, on pose

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

On note d' la distance de la convergence uniforme sur E.

a) Rappeler pourquoi (ou montrer que) (E, d') est complet.

b) Montrer que d est une distance.

c) Montrer que l'application identique de (E, d') dans (E, d) est continue et que par contre l'application identique de (E, d) dans (E, d') n'est pas continue.

d) Montrer que (E, d) n'est pas complet.

Correction 4. a) Rappelons le résultat suivant du cours: soit Y un espace complet et X un espace topologique alors l'espace Y^X des fonctions de X dans Y pour la métrique de la convergence uniforme est complet. Rappelons que si X n'est pas compact, la distance de la convergence uniforme n'est qu'une semi-norme. De plus, d'après le cours, une limite uniforme de fonctiosn continues est continue.On conseille au lecteur de consulter le cours pour plus de détails...

Rappelons rapidement le principe de la démonstration dans le cas de $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On a noté d' la distance de la convergence uniforme (qu'on notera souvent aussi d_∞). Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N$, on ait,

$$\forall t \in [0,1], \quad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \tag{0.2}$$

On en déduti que pour tout t fixé la suite de réels $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente dans $\mathbb{R}$ (qui est complet). On note $f(t)$ la limite de $f_n(t)$.

Toujours en fixant t dans l'inégalité (0.2) et en faisant tendre m vers l'infini on obtient que

$$\forall t \in [0,1], \quad |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon. \tag{0.3}$$

Il suit que f_n converge uniformémemnt vers f. D'après un résultat du cours, comme les f_n sont continues, f est continue (il convient de savoir redémontrer ce résultat; lire la preuve du cours si on ne s'en souveitn pas).

b) Soient $f, g, h \in E$. Comme l'intégrale d'une fonction positive est positive, $d(f,g) \geq 0$ et de plus $|f-g| = |g-f|$ implique $d(f,g) = d(g,f)$. De plus si f, g sont continues, $|f-g|$ est continue et positive. Or l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Il en résulte que $d(f,g) = 0$ ssi $f - g = 0$. Enfin l'inégalité triangulaire $|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - gt(t)| + |g(t) - h(t)|$ (pour tout $t \in [0,1]$) implique $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$ (par linéarité de l'intégrale). On a montré que d est une distance sur E.

c) Montrons que l'identité $id : f \mapsto f$ est continue de (E, d') vers (E, d). Les espaces considérés étant métriques, il suffit de montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction uniformémment convergente vers $f \in E$ (c'est à dire pour la distance d'), alors (f_n) converge vers f pour la distance d. Comme f_n convegre uniformémment vers f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. D'où

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt < \int_0^1 \varepsilon = \varepsilon.$$

On a obtenu que la suite de fonctions f_n converge vers f pour la distance d.

Montrons maintenant que l'application identique $id : x \mapsto x$, cette fois-ci vue comme une fonction (E, d) vers (E, d') n'est pas continue. Il suffit d'exhiber une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction f pour la distance d, mais ne converge pas pour la distance d' (c'est à dire ne converge pas uniformément sur $[0,1]$). Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = 0 \text{ pour } 1/n < t \leq 1 \qquad \text{et} \qquad f_n(t) = 1 - nt \text{ pour } t \leq 1/n.$$

On vérifie que cette fonction est continue. Elle est en fait affine par morceaux (au nombre de deux, les morceaux) et notons que l'on a $f_n(0) = 1$ (il est utile de tracer le graphe de f_n). Montrons que f_n converge vers la fonction nulle $x \mapsto 0$ sur $[0,1]$ pour la distance d. En effet

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^{1/n} 1 - nt = 1/n - n/2n^2 = 1/2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En revanche, la suite de fonctions f_n ne peut pas converger uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$, car $f_n(0) - 0 = 1$ ne tend pas vers 0 quand n devient grand.

d) Pour montrer que (E, d) on applique l'idée précèdente pour montrer la non-continuité de $id : (E, d) \to (E, d)$. On considère la suite de fonctions affines par morceaux $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
&f_n(t) = 1 \text{ pour } 0 \leq t \leq 1/2 - 1/n \\
&f_n(t) = -nt + n/2 \text{ pour } 1/2 - 1/n < t \leq 1/2 \\
&f_n(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1/2.
\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que les f_n sont des fonctions continues. La suite f_n est de Cauchy car pour tout $n < p$, on a

$$\begin{aligned}
d(f_n, f_p) &= \int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)| dt \\
&= \int_{1/2-1/n}^{1/2-1/p} (1 - n/2 + nt)\, dt + \int_{1/2-1/p}^{1/2} (n-p)(t-1/2)\, dt \\
& \int_{1/2-1/n}^{1/2} n(t-1/2) dt + \int_{1/2-1/n}^{1/2-1/p} 1 dt - \int_{1/2-1/p}^{1/2} p(t-1/2)\, dt \\
&= 1/2n - 1/p + 1/n - 1/2p \\
&= 3/2n - 3/2p \underset{min(n,p)\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas être convergente. Raisonons par l'absurde. Supposons que f la limite de f_n existe dans E. En particulier f est une fonction continue et $|f - f_n|$ également. Puisque l'intégrale d'une fonction positive est positive, on a

$$0 \leq \int_0^{1/2-1/n} |f(t) - 1|\, dt = \int_0^{1/2-1/n} |f - f_n| \leq d(f, f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, on a que $\int_0^{1/2-1/n} |f - 1|\, dt = 0$. Comme f est continue, on en déduit que $f(t) = 1$ sur $[0, 1/2 - 1/n]$ pour tout $n \geq 1$. Il suit que $f(t) = 1$ pour $t \in [0, 1/2[$. De même, on montre que $f(t) = 0$ pour tout $t \in]1/2, 1]$. On en conclut que f ne peut pas être continue en $1/2$ ce qui est une contradiction.

Exercice 5 (Espaces ℓ^p)**.** Pour tout réel $p \geq 1$, on note ℓ^p l'ensemble des suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p$ soit convergente. On note

$$N_p(U) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\Big)^{1/p} \text{ et } d_p(U, V) = N_p(U - V).$$

a) Montrer que d_p est une distance.

b) Montrer que (ℓ^p, d_p) est complet. Qu'en est-il de $\ell^\infty = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\}$ (avec les notations évidentes) ?

Correction 5. **a)** Il suffit de montrer que N_p est une norme. Or, il est clair que $N_p(\lambda U) = |\lambda| N_p(U) \geq 0$, $N_p(U) = 0$ si et seulement si $U = V$. L'inégalité triangulaire découle de l'identité de Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

(valable pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{C}$). En effet, si $U, V \in \ell^p$ alors de l'inégalité de Minkowski on déduit

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |u_n + v_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |u_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |v_n|^p\right)^{1/p} \leq N_p(U) + N_p(V).$$

Il suit que $\left(\sum_{i=1}^{N}|u_n+v_n|^p\right)^{1/p}$ est convergente et que $N_p(U+V)\leq N_p(U)+N_p(V)$.

b) On considère une suite de Cauchy $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^p. C'est en particulier une suite de suite, c'est à dire que $U_k=(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes vérifiant que $\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,k}|^p$ converge (on prendra bien garde à ne pas confondre l'indice n de $u_{k,n}$ et l'indice k). Dire que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy signifie que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k,l\geq K$ on ait

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,k}-u_{n,l}|^p\right)^{1/p}=d_p(U_k-U_l)<\varepsilon. \tag{0.4}$$

Pour montre que ℓ^p est complet on doit trouver une suite $U=(u_{n,\infty})_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que

i) $d_p(U_k,U)=\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,k}-u_{n,\infty}|^p \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

ii) U est dans (ℓ^p,d_p), c'est à dire $\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,\infty}|^p$ converge.

Pour trouver la suite U, on remarque que pour n fixé, on a

$$|u_{n,k}-u_{n,l}|\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,k}-u_{n,l}|^p\right)^{1/p}. \tag{0.5}$$

Alors l'inégalité (0.4) implique que la suite de nombres complexes $(u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (on a fixé l'entier n) est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, elle converge vers un complexe que l'on note $u_{n,\infty}$ (qui dépend bien sur de n). On note $U=(u_{n,\infty})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes obtenue pour les différents n. Il reste 'a montrer **i)** et **ii)**. D'après l'inégalité (0.4), pour tout $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$ et $k,l>K$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|u_{n,k}-u_{n,l}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon. \tag{0.6}$$

En faisant tendre $l\to+\infty$ dans (0.6), on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|u_{n,k}-u_{n,\infty}|^p\right)^{1/p}\leq\varepsilon.$$

et comme ceci-est vrai pour tout N, les sommes partielles sont convergentes et on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,k}-u_{n,\infty}|^p\right)^{1/p}=d_p(U_k,U)\leq\varepsilon. \tag{0.7}$$

On a bien montré **i)**, à savoir que $U_k \underset{k\to\infty}{\to} U$. Il reste à montrer que $U\in\ell^p$. On utilise l'inégalité triangulaire: pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}|u_{n,\infty}|^p\leq\sum_{n=0}^{N}|u_{n,k}-u_{n,\infty}|^p+\sum_{n=0}^{N}|u_{n,k}|^p. \tag{0.8}$$

Il découle alors de (0.4) et du fait qu'une suite de Cuachy est bornée que les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} |u_{n,\infty}|^p$ sont majorées, d'où $U \in \ell^p$.

On adapte sans difficulté le même raisonement au cas de ℓ^∞.

Exercice 6. Soit a un réel positif et (E,d) l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,a]$ à valeurs réelles, muni de la distance de la convergence uniforme. Soit T la fonction $E \to E$ définie sur $[0,a]$ par:

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

a) Montrer que l'on a bien $Tx \in E$ si $x \in E$ et que l'application T est lipschitzienne.

b) On suppose désormais $a < 1$. Montrer qu'il existe une fonction x unique dans E telle que $Tx = x$.

c) En déduire que la fonction exponentielle est limite uniforme sur $[0,a]$ des polynômes $P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction 6. a) $T(x) \in E$ car l'intégrale d'une fonction continue est encore une fonction continue.

Montrons que l'application $T : E \to E$ est a-lipschitzienne. Par définition de la distance de la convergence uniforme, pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0,a]$, on a

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| = |1 - 1 + \int_0^t (x(s) - y(s))\,ds| \leq \int_0^t d(x,y)\,ds \leq a\,d(x,y)$$

d'où il suit que $d\big(T(x), T(y)\big) \leq a\,d(x,y)$.

b) Comme $a < 1$, l'application $T : E \to E$ est une contraction (une application k-lipschitzienne, avec $k < 1$). D'après le Théorème du point fixe pour les contractions , on en déduit qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.

c) Soit x la solution de $x = T(x)$. on a donc, pour tout $t \in [0,a]$, $x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds$. Comme l'intégrale d'une fonction continue est dérivable, on obtient que $x(t)$ est dérivable et que pour tout $t \in [0,a]$, on a $x'(t) = x(t)$. De plus $x(0) = 1 + \int_0^0 x(s)\,ds = 1$. On en conclut que x est l'unique solution de l'équation différentielle $x' = x$ sur $[0,a]$ qui satisfait $x(0) = 1$. C'est à dire la fonction exponentielle $t \mapsto \exp(t)$.

D'après le Théorème du point fixe pour les contractions, pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_n = T(x_{n-1}) = \cdots = T^n(x_0)$ (pour la distance d, c'est à dire uniformément) vers x. Prenons $x_0(t) = 1 = P_0(t)$. On a alors $x_1(t) = 1 + \int_0^1 1\,ds = 1 + t = P_1(t)$. Une récurence facile montre que $T^n(x_0)(t) = P_n(t)$, d'où le résultat.

Exercice 7. Soit une application f d'un espace métrique complet dans lui-même telle que f^p soit contractante pour un certain p. Montrer que f possède un unique point fixe.

Correction 7. Puisque f^p est une contraction, f^p admet un unique point fixe x (toujours d'après le Théorème du point fixe). On a alors $x = f^p(x)$. Appliquons f à l'identité précédente; on obtient $f(x) = f(f^p(x)) = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$. Donc $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p. Par unicité du point fixe de f^p, on a $f(x) = x$ et x est un point fixe de f. Montrons maitenant que x est l'unique point fixe de f. En effet si y est un point fixe de f, on a $y = f(y)$, en composant par f, on obtient $f(y) = f^2(y)$, d'où $y = f(y)$. En itérant le raisonement, on obtient que $y = f^p(y)$, donc y est un point fixe de f^p, et, par unicité des points fixes de f^p, on a $y = x$.

Exercice 8. On considère l'espace X des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la distance de la convergence uniforme. Montrer que l'application $F : X \to X$ définie par

$$F(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x))$$

est continue, lipschitzienne [1] mais n'est pas une contraction. Vérifier que $F \circ F$ est contractante et en déduire l'existence et l'unicité de $f \in X$ telle que

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x)).$$

Rappelons que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continument dérivable et qu'il existe un réel k tel que $|f'(x)| \leq k$ (pour tout $x \in [a, b]$), alors, une application immédiate de la formule des accroissements finis assure que f est k-lipschitzienne, c'est à dire $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Correction 8. Montrons directement que F est lipschitzienne (ce qui implique continue). Rappelons que l'application $x \mapsto \cos(x)$ est 1-lipchsitzienne (car la dérivée de la fonction cosinus, $-\sin$, est bornée par 1 en valeur absolue). Il en découle que, pour tout $f, g \in X$, on a (en utilisant l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned}
|F(f)(t) - F(g)(t)| &= \int_0^t \big(f(s) - g(s)\big)\, ds + 1/5\big(cos(f(t) - cos(g(t))\big)| \\
&\leq t\, d(f, g) + 1/5|f(t) - g(t)| \qquad \text{d'où} \\
sup_{t\in[0,1]}|F(f)(t) - F(g)(t)| &\leq (1 + 1/5)d(f, g)
\end{aligned}$$

c'est à dire $d(F(f), G(f)) \leq (1 + 1/5)d(f, g)$, donc F est lipschitzienne de rapport $\leq 1 + 1/5$.

Supposons, par l'absurde, que F soit une contraction. Alors, il existerait $0 < a < 1$ tel que $d(F(f), F(g)) \leq ad(f, g)$. Mais alors, si f est la fonction constante $\lambda : x \mapsto \lambda$ et g la fonction nulle, on obtient

$$0 \leq d(F(\lambda), 0)/d(\lambda, 0) \leq a < 1$$

pour tout $\lambda > 0$. En particulier, la quantité $d(F(\lambda), 0)/d(\lambda, 0)$ ne peut pas converger vers 1 (et en fait vers toute quantité supérieure à a). Or, $d(\lambda, 0) = \lambda$ et $F(\lambda), 0) = \int_0^t \lambda ds + 1/5\cos(\lambda) = \lambda t + 1/5\cos(\lambda) = \lambda(t + \dfrac{\cos(\lambda)}{5\lambda})$. Comme $\cos(\lambda)/\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que, pour tout $t > 0$, $t + \dfrac{\cos(\lambda)}{5\lambda}) \sim t$ quand $\lambda \to +\infty$. par conséquent $d(F(\lambda), 0) \sim \lambda$ et on a $d(F(\lambda), 0)/d(\lambda, 0) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui est une contradiction. On peut également, dans ce cas particulier, exhiber deux fonctions f, g telles que

[1] On rappelle que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ en vertu de l'inégalité des accroissements finis..

$d(F(f),F(g)) \geq d(f,g)$; par exemple f la fonction nulle et g la fonction constante égale à 2π (les calculs explicites sont laissés au lecteur...).

Montrons que $F^2 = F \circ F$ est une contraction. On a

$$F^2(f)(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds + \frac{1}{5}\cos(f(t)) \right) + \frac{1}{5}\cos\left(\int_0^t f(s)\,ds + \frac{1}{5}\cos(f(t)) \right)$$

En utilisant que cos est 1-lipschitzienne, on a, pour tout x,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \left(\int_0^t f(s) - g(s)\,ds + \frac{1}{5}(\cos(f(t)) - cos(g(t)) \right) \right| &\leq \int_0^x \left(\int_0^t d(f,g)\,ds + \frac{1}{5}d(f,g) \right) \\
&\leq x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5} \right) d(f,g) \\
&\leq \frac{7}{10} d(f,g).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\left| \frac{1}{5}\cos\left(\int_0^t f(s)\,ds + \frac{1}{5}\cos(f(t)) \right) - \frac{1}{5}\cos\left(\int_0^t g(s)\,ds + \frac{1}{5}\cos(g(t)) \right) \right|$$
$$\leq \frac{1}{5}\int_0^t |f(s) - g(s)|\,ds + \frac{1}{5}d(f,g)$$
$$\leq \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{5} \right) d(f,g).$$

On en conclut que $d(F^2(f),F^2(g)) \leq \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) d(f,g)$. Comme

$$\frac{7}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{47}{50} < 1$$

on a bien que F^2 est une contraction. Il résulte de l'exercice 7 que F a un unique point fixe. C'est à dire qu'il existe uen unique application f dans X telle que

$$f(x) = F(f)(x) = \int_0^x f(s)\,ds + \frac{1}{5}\cos(f(x)).$$

Exercice 9. Soit $f : [0,\pi/2] \to [0,\pi/2]$ la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

a) Montrer que la fonction f est lipschitzienne[2], non-contractante mais que f^2 est contractante.

b) Déduire de **a)** que f admet un unique point fixe. Peut-on retrouver ce résultat en étudiant la fonction f?

Correction 9. a) On raisonne comme dans l'exercice précédent. On a vu que $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$ donc $x \mapsto \cos(x)$ est lipschitzienne. Elle n'est aps contractante car $\lim\limits_{x \mapsto 0} \cos(\pi/2 - x)/x = 1$. Enfin, on a

$$|cos^2(x) - cos^2(y)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1}(\sin(t))|\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x-y|$$

car la fonction cos envoie $[0,\pi/2]$ dans $[0,1]$. Comme $\sin(1) < 1$, $\cos^2$ est contractante.

[2] On rappelle que $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$ en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

b) Comme $[0, \pi/2]$ est complet (il est fermé dans $\mathbb{R}$ qui est complet), il suit du théorème du point fixe que $\cos^2$ admet un unique point fixe. D'après l'exercice **7**, c'est aussi le cas de la fonction cos. Cet exemple átant assez simple, on peut en fait retrouver ce résultat en étudiant la fonction $x \mapsto x - \cos(x)$ (on laisse l'étude de la fonction, qui est sans difficulté, au lecteur).

Exercice 10. Soient f, g deux applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, on ait

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x',y')| &\leqslant a|x - x'| + b|y - y'| \\ |g(x,y) - g(x',y')| &\leqslant c|x - x'| + d|y - y'|. \end{aligned}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance d_∞. Montrer que si $a + b < 1$ et $c + d < 1$ alors le système

$$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

admet une unique solution.

Correction 10. Une solution du système est la donnée d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) = \big(f(x, y), g(x, y)\big)$, c'est à dire d'un point fixe de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \big(f(x, y), g(x, y)\big)$. Il suffit maintenant, d'après le thórème du point fixe (valabre dans $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est complet) de démontrer que φ est contractante. Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x',y')| &\leqslant a|x - x'| + b|y - y'| \leq (a+b)\, d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) \\ |g(x,y) - g(x',y')| &\leqslant c|x - x'| + d|y - y'| \leq (c+d)\, d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$d_\infty\big(\varphi(x,y), \varphi(x',y')\big) \leq \max\big((a+b),(c+d)\big)\, d_\infty\big((x,y),(x',y')\big).$$

Comme $a + b < 1$ et $c + d < 1$, on a bien obtenu que φ est contractante.